

ПРИМЕНЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА АНАЛИЗА СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМ ПЕРИОДОМ КВАНТОВАНИЯ К МОДЕЛИ МЕРТОНА

А.С. Кожевников, К.А. Рыбаков

Московский авиационный институт (государственный технический университет) «МАИ»,
Москва, Россия

Первое математическое описание цены актива в виде диффузионного процесса, представляющего собой броуновское движение, дано в докладе Башелье [1]. В дальнейшем Блэк и Шоулз, Хестон в своих моделях также использовали диффузионный процесс для описания динамики цены актива. Однако данный подход имеет ряд недостатков. В частности, при описании процесса только с помощью броуновского движения цена актива в течение короткого промежутка времени может изменяться только на небольшую величину [2], хотя по существу реальные цены движутся скачками (имеют большие изменения на малых промежутках времени). То есть, если цена актива рассматривается в масштабах дня или месяца, то она имеет разрывное (скачкообразное) поведение, и только на более длительных временных промежутках при их крупном разбиении движение цены будет напоминать броуновское движение. Поэтому в течение последнего десятилетия при моделировании колебаний рынка все более популярными (по сравнению с диффузионными процессами) становятся случайные процессы со скачками как для управления рисками, так и для определения справедливой цены опциона.

Финансовые модели со скачками подразделяются на две категории. В первой категории, к которой относятся так называемые диффузионно-скачкообразные модели, динамика цены определяется диффузионным процессом, который время от времени испытывает скачки в случайные моменты времени. Такое развитие может быть представлено на основе моделирования цены как процесса Леви с ненулевой гауссовой компонентой и компонентой, которая является пуассоновским процессом, позволяющим моделировать скачки цен (предполагается, что в течение малого интервала времени возможен только один скачок). Ко второй категории относятся модели с бесконечным числом скачков на малом временном интервале. В этих моделях нет необходимости вводить броуновское движение, поскольку динамика скачков уже достаточно богата, чтобы моделировать нетривиальное поведение на малом промежутке времени.

В данной работе рассматривается модель Мертона [3], относящаяся к первой категории, в которой поведение цены актива описывается процессом, порождаемым смесью диффузионного и скачкообразного процессов, за счет чего можно учесть разрывное (скачкообразное) поведение цены. Предполагается, что скачки цены актива независимы, одинаково распределены и образуют пуассоновский поток событий с постоянной интенсивностью, характеризующей среднее количество скачков за единицу времени.

Ставится задача нахождения закона распределения стоимости актива, ожидаемого значения стоимости в срок исполнения опциона, а также стоимости опциона в модели Мертона в зависимости от выбранных значений срока исполнения опциона и цены исполнения.

Для решения задачи анализа динамики цены актива разработан алгоритм, основанный на использовании спектральной формы математического описания (спектрального метода) [4–7]. Согласно данному подходу искомая функция представляется упорядоченной совокупностью коэффициентов разложения в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций. Основное преимущество, отличающее данный подход, это универсальность применения и простота реализации. Спектральный метод позволяет сводить уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова и Колмогорова-Феллера, которым удовлетворяет плотность вероятности вектора состояния стохастической системы, к линейным алгебраическим уравнениям относительно

коэффициентов разложения. Форма этих уравнений не зависит от выбора базисных систем и их свойств, а также от вида областей изменения времени и координат вектора состояния.

Проводится анализ результатов расчета для различных сценариев поведения цены актива, а также производятся расчеты для оценки влияния интенсивности скачков цен и их распределения. Сравняются результаты расчета для моделей Мертона и Блэка-Шоулза.

Список литературы

1. Bachelier L. Théorie de la spéculation // Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. – 1900. S. 3. V. 17. – P. 21–86.
2. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // The Journal of Political Economy. – 1973. V. 81. № 3. – P. 637–654.
3. Merton R. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous // Journal of Financial Economics. – 1976. V. 3. – P. 125–144.
4. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Спектральный метод анализа стохастических систем в приложении к задачам финансовой математики на примере модели Блэка-Шоулза // Вестник Московского авиационного института. – 2009. Т. 16. № 4. – С. 113–125.
5. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006.
6. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004. № 16. – <http://www.mai.ru>.
7. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. Анализ систем управления со случайным периодом квантования в классе обобщенных характеристических функций // Тез. докл. 8-й Межд. конф. «Авиация и космонавтика – 2009». – М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. – С. 72.