НОВЫЕ АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С РАЗРЫВАМИ ТРАЕКТОРИЙ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЗАДАЧАХ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

А. С. Кожевников, К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт

AlexKozhevnikov@yandex.ru, rkoffice@mail.ru

Москва, РОССИЯ

Для описания первых математических моделей динамики цены акции исследователи использовали диффузионный процесс, который позволял учитывать случайный характер поведения цены. Однако подобный подход не учитывал разрывное (скачкообразное) поведение цены и вследствие этого не позволял в равной степени моделировать ее динамику во всех временных масштабах.

В настоящее время при моделировании колебаний рынка пользуются популярностью случайные процессы со скачками, они могут обладать различными характеристиками, описывающими интервалы времени появления скачков и их величину. Большинство таких моделей задаются с помощью процессов Леви с ненулевой диффузионной компонентой и компонентой, которая является пуассоновским процессом, позволяющим моделировать скачки цен акции. Примерами таких моделей являются диффузионно-скачкообразные модели Мертона [1] и Бейтса [2] со скачками, величины которых задаются логарифмически нормальным распределением. Основным отличием модели Бейтса от модели Мертона является зависимость волатильности от времени, которая задается диффузионным процессом.

Использование пуассоновского процесса для описания скачков хоть и упрощает модель и анализ поведения цены акции, но значительно снижает возможность точно моделировать появление скачков, поэтому предлагается использовать эрланговский закон появления скачков цены акции. Такой подход позволяет исследовать модели цены акции при скачках, интервалы времени между которыми могут описываться не только показательным законом распределения. Обобщение моделей Мертона и Бейтса позволяет приблизиться к более точному описанию динамики цены после обработки статистических данных по активам, использование эрланговских процессов дает возможность учитывать более сложный характер скачкообразного поведения цен.

В работе рассматривается достаточно общая модель многомерной нелинейной стохастической системы с разрывами траекторий, описываемая стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

в котором $X \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $t \in T$, $T = [t_0, t_1]$ – заданный отрезок времени функционирования системы, $f(t,x)\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $\sigma(t,x)\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times s}$ – заданные функции; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от X_0; слагаемое $dQ(t)$ описывает «экстремальные события», сопровождающиеся скачками в траекториях вектора состояния (например, обвал на рынке ценных бумаг, скачкообразное изменение цены). Предполагается, что $Q(t) = \sum_{i=1}^{J(t)} Y(\tau_i)$, где $J(t)$ – эрланговский процесс порядка N, $Y(\tau_i)$ – независимые случайные величины из $\mathbb{R}^n$, распределение которых задано плотностью вероятности, т.е. вектор состояния получает случайные приращения в моменты времени τ_1, τ_2, …, образующие эрланговский поток событий: $X(\tau_i) = X(\tau_i - 0) + Y(\tau_i)$. Эрланговский поток событий формируется в результате пропуска подряд $N-1$ события пуассоновского потока, задаваемого интенсивностью $\lambda(t)$ следования событий.

Для анализа таких стохастических систем разработан алгоритм, в основе которого лежит применение математического аппарата описания систем со случайной структурой [3] и спектральной формы математического описания систем управления [4]. Его применение позволяет получить решение задачи анализа (плотность вероятности вектора состояния) в виде конечного отрезка ряда по любой подходящей ортонормированной системе функций.

Разработанный алгоритм был использован для анализа обобщенных моделей Мертона и Бейтса динамики цен акции. Остановимся на этих моделях более подробно. Динамика цены акции с учетом эрланговского потока событий в обобщенной модели Мертона описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t) = (\mu - \xi)\, X(t)\, dt + \sigma X(t)\, dW_1(t) + X(t)\, dQ(t), \quad X(0) = X_0, \tag{2}$$

а в обобщенной модели Бейтса задается системой стохастических дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} dX(t) = (\mu - \xi)\, X(t)\, dt + \sqrt{\nu(t)}\, X(t)\, dW_1(t) + X(t)\, dQ(t), \quad X(0) = X_0, \\ d\nu(t) = \kappa\big(\theta - \nu(t)\big)dt + \varepsilon\sqrt{\nu(t)}\, dW_2(t), \quad \nu(0) = \nu_0, \end{gathered} \tag{3}$$

где $t \in T = [0, t_1]$, $X \in (0, +\infty)$ – цена акции, μ – ожидаемая доходность, σ – волатильность, $\nu \in (0, +\infty)$ – вариация, характеризующая изменчивость цены акции, θ – равновесная вариация, κ – скорость возвращения к равновесной вариации, ε – волатильность вариации. Начальная цена X_0 и начальная вариация ν_0 независимы и имеют заданные распределения; $W_1(t)$ и $W_2(t)$ – винеровские процессы с коэффициентом корреляции $\rho \in [-1, 1]$; $Q(t) = \sum_{i=1}^{J(t)} (Y_i - 1)$, $J(t)$ – эрланговский процесс порядка N, который формируется в результате пропуска подряд $N-1$ события пуассоновского потока постоянной интенсивности λ, Y_i – независимые скалярные случайные величины, имеющие логарифмически нормальное распределение с параметрами γ и δ; $W_1(t)$, $W_2(t)$ и $J(t)$ не зависят от X_0, ν_0 и Y_i. Величина ξ зависит от интенсивности λ и параметров γ и δ [1, 2]. Отметим, что системы (2) и (3) сводятся к (1) с помощью замены переменных $S(t) = \ln X(t)$ и введения дополнительного винеровского процесса, не зависящего от $W_1(t)$.

Для систем (2) и (3) получены уравнения для первых двух моментов цены акции и вариации. В некоторых задачах анализа этих характеристик бывает достаточно и в определении плотности вероятности нет необходимости.

Литература. [1] Merton R. C. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous // J. Finan. Econ., 1976, v. 3, no. 1–2, p. 125–144. [2] Bates D. S. Jump and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options // Rev. Financ. Stud., 1996, v. 9, no. 1, p. 69–107. [3] Артемьев В. М., Ивановский А. В. Дискретные системы управления со случайным периодом квантования, М., Энергоатомиздат, 1986. [4] Пантелеев А. В., Рыбаков К. А., Сотскова И. Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления, М., Вузовская книга, 2006.