О применении метода статистических испытаний к решению уравнений параболического типа*

К. А. Рыбаков

Рассматривается задача решения дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа с помощью моделирования траекторий специального ветвящегося процесса. Каждая из ветвей, рассматриваемая отдельно, представляет собой часть траектории случайного процесса, описываемого стохастическим дифференциальным уравнением, составленным по коэффициентам параболического уравнения, часть слагаемых параболического уравнения влияет на распределение моментов времени обрывов и появления новых ветвей. Разработан алгоритм приближенного решения на основе численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений [1] и метода максимального сечения [2].

Пусть задано уравнение в частных производных

$$\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t,x) + \lambda(t,x)\varphi(t,x) + \eta(t,x), \quad (t,x) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$\mathcal{A}\varphi(t,x) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_i(t,x)\varphi(t,x)\big] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\big],$$

с начальным условием $\varphi(t_0,x) = \varphi_0(x)$ и краевым условием $\varphi(t,\infty) = 0$, где $f_i(t,x)$ и $g_{ij}(t,x)$ – известные функции, $g_{ij}(t,x) = g_{ji}(t,x)$, $i = 1,2,...,n$. Вектор-функцию размеров $n \times 1$, образованную элементами $f_i(t,x)$, будем обозначать через $f(t,x)$, а матричную функцию размеров $n \times n$, образованную элементами $g_{ij}(t,x)$, будем обозначать через $g(t,x)$, предполагая, что $g(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^{\mathrm{T}}(t,x)$, $\sigma(t,x)$ – матричная функция размеров $n \times s$ с элементами $\sigma_{il}(t,x)$ (полученная, например, с помощью разложения Холецкого). Решение этого уравнения можно понимать как в классическом, так и в обобщенном смысле в зависимости от условий, накладываемых на функции $f_i(t,x)$, $\sigma_{il}(t,x)$, $\lambda(t,x)$, $\eta(t,x)$ и $\varphi_0(x)$, $i = 1,2,...,n$, $l = 1,2,...,s$. Функции $\lambda(t,x)$ и $\eta(t,x) \geqslant 0$ ограничены, причем $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(t,x)dx < \infty$ $\forall t \in [t_0,T]$.

В случае, когда $\lambda(t,x) = 0$, $\eta(t,x) = 0$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(x)dx = 1$, уравнение (1) описывает закон изменения плотности вероятности $\varphi(t,x)$ случайного вектора $X \in \mathbb{R}^n$ – сечения

*XVIII Международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (ВМСППС'2013), Алушта, 22–31 мая 2013 г.: Материалы конф. – М.: МАИ, 2013. – С. 130–132.

случайного процесса $X(t)$, удовлетворяющего стохастическому дифференциальному уравнению Ито [1]

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{2}$$

где $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от случайного вектора X_0, определяемого плотностью вероятности $\varphi_0(x)$ ($\mathcal{A}$ – прямой производящий оператор процесса $X(t)$). Функция $\varphi(t,x)$ может быть найдена приближенно по результатам моделирования траекторий случайного процесса $X(t)$ с использованием методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений [1].

Рассмотрим случай $\lambda(t,x) \neq 0$, $\eta(t,x) \neq 0$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(x)dx = 1$. Пусть

$$\lambda(t,x) = -\lambda^-(t,x) + \lambda^+(t,x), \tag{3}$$

где

$$\lambda^-(t,x) = \begin{cases} -\lambda(t,x), & \lambda(t,x) < 0, \\ 0, & \lambda(t,x) \geqslant 0, \end{cases} \qquad \lambda^+(t,x) = \begin{cases} \lambda(t,x), & \lambda(t,x) > 0, \\ 0, & \lambda(t,x) \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда уравнение

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t,x) - \lambda^-(t,x)\varphi(t,x) + \lambda^+(t,x)\varphi(t,x) + \eta(t,x) \tag{4}$$

описывает закон изменения ненормированной плотности вероятности $\varphi(t,x)$ случайного вектора X – сечения случайного процесса $X(t)$, допускающего обрывы и ветвления траекторий [3] с интенсивностями $\lambda^-(t) = \lambda^-(t, X(t))$ и $\lambda^+(t) = \lambda^+(t, X(t))$ соответственно (обрывы и ветвления траекторий образуют неоднородные пуассоновские потоки событий, при ветвлении в фиксированный момент времени может появиться только одна новая ветвь, при обрыве прекращается моделирование только одной ветви). Поведение траекторий процесса $X(t)$ между моментами ветвлений определяется уравнением (2). Для удобства моделирования каждая из новых ветвей рассматривается как самостоятельная траектория. Дополнительно могут появляться ветви с интенсивностью $\nu(t,x)$ и распределением начальной точки в момент появления ветви, задаваемым плотностью вероятности $\psi(t,x)$. Для этого должны выполняться условия $\eta(t,x) = \nu(t,x)\psi(t,x)$, $\int_{\mathbb{R}^n} \psi(t,x)dx = 1$, например, $\nu(t,x) = \nu(t)$, где $\nu(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(t,x)dx$.

Для приближенного решения уравнения (1) предлагается использовать метод статистических испытаний: моделировать траектории случайного процесса $X(t)$ с учетом обрывов, ветвлений траекторий процесса $X(t)$ и появления новых независимых ветвей, применяя различные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков. Функция $\varphi(t,x)$ может быть приближена, например, гистограммой, при этом отношение первоначального числа траекторий и текущего с учетом обрывов и ветвлений задает условие нормировки [4].

Замечания и дополнения.

1. При условии $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_0(x)dx = C \neq 1$ предварительно следует выполнить замену: $\mu(t,x) = \varphi(t,x)/C$, тогда для новой функции $\int_{\mathbb{R}^n} \mu(t_0,x)dx = 1$.

2. Предложенный подход может быть применен при $(t,x) \in [t_0,T] \times \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, и заданных краевых условиях $\varphi(t,x)|_{\partial\Omega} = 0$ или $\pi(t,x)|_{\partial\Omega} = 0$, где $\pi(t,x)$ – вектор-функция размеров $n \times 1$, образованная элементами

$$\pi_i(t,x) = f_i(t,x)\varphi(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x)\big], \quad i = 1,2,...,n.$$

При такой постановке задачи помимо обрывов и ветвлений траекторий случайного процесса $X(t)$ необходимо рассматривать поглощение или отражение на границе $\partial\Omega$ [5].

3. Точность расчетов зависит от выбранного метода численного решения стохастических дифференциальных уравнений и метода моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

Преимущество рассмотренного подхода в первую очередь состоит в простоте реализации: можно применять известные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков, при этом вычислительная сложность алгоритма зависит от вычислительной сложности применяемых численных методов и генераторов псевдослучайных чисел. Алгоритм может применяться и для случая разрывных функций $f_i(t,x)$, $\sigma_{il}(t,x)$, $\lambda(t,x)$, $\eta(t,x)$ и $\varphi_0(x)$, $i = 1,2,...,n$, $l = 1,2,...,s$.

Список литературы

[1] Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. – М.: Вузовская книга, 2008.

[2] Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. – 2009. Т. 428. № 2. – С. 163–165.

[3] Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. – М.: Физматлит, 1993.

[4] Рыбаков К.А. Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2012. № 3. – С. 91–110. – http://www.math.spbu.ru/diffjournal.

[5] Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977.