УДК 519.7

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Рыбаков К.А.

МАИ, Москва, Россия, E-mail: rkoffice@mail.ru

Предлагается новый подход к решению задачи оптимальной нелинейной фильтрации с использованием спектральной формы математического описания систем управления (спектрального метода). В его основе лежит переход к системе линейных уравнений для коэффициентов разложения решения робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи.

Ключевые слова: апостериорная плотность вероятности, оптимальная фильтрация, спектральный метод, стохастическая система, уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи.

OPTIMAL SIGNAL FILTERING BY SPECTRAL METHOD

Rybakov K.A.

MAI, Moscow, Russia, E-mail: rkoffice@mail.ru

A new approach to the optimal nonlinear filtering by using the spectral method is considered. It is based on a transition to the linear equations for Fourier coefficients of a solution of the robust Duncan–Mortensen–Zakai equation.

Key words: conditional probability density, Duncan–Mortensen–Zakai equation, optimal filtering, spectral method, stochastic system.

Задача оценивания вектора состояния является одной из основных задач теории стохастических систем управления, так как координаты вектора состояния, как правило, могут быть измерены лишь косвенно и со случайными ошибками, поэтому возникает задача приближенного восстановления вектора состояния по результатам измерений: задача оценивания текущего состояния, или задача фильтрации. Задача оптимального оценивания, или задача оптимальной фильтрации, состоит в восстановлении вектора состояния по результатам измерений в соответствии с заданным критерием оптимальности, например, критерием минимума среднеквадратической ошибки оценивания [1–3]. Задача оптимальной фильтрации далее будет рассматриваться для нелинейных стохастических систем с непрерывным временем.

Модель объекта наблюдения описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

где $X \in R^n$ – вектор состояния; $t \in T$, T – отрезок времени функционирования; $f(t,x)\colon T \times R^n \to R^n$ и $\sigma(t,x)\colon T \times R^n \to R^{n\times s}$ – заданные функции; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния X_0, заданного плотностью вероятности $\phi_0(x)$.

Упрощенная модель измерительной системы также записывается в форме стохастического дифференциального уравнения:

$$dY(t) = c(X(t))dt + dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0,$$

в котором $Y \in R^m$ – вектор измерений; $c(x): R^n \to R^m$ – заданная функция; $V(t)$ – m-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $W(t)$ и X_0.

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t)$ по результатам измерений Y_0^t: $\hat{X}(t) = \psi(t, Y_0^t)$, где $\psi(t, Y_0^t)$ – функция, обеспечивающая в каждый момент времени t выполнение условия

$$M\left[(X(t) - \hat{X}(t))^{\mathrm{T}}(X(t) - \hat{X}(t))\right] \to \min,$$

а $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [0, t)\}$ – доступные измерения к моменту времени t. В этом критерии и далее M – знак математического ожидания.

Известно [1], что в этом случае

$$\psi(t, Y_0^t) = M\left[X(t) \,|\, Y_0^t\right] = \int_{R^n} x p(t, x \,|\, Y_0^t) dx,$$

где $p(t, x \,|\, Y_0^t)$ – апостериорная плотность вероятности вектора состояния X.

Теория оптимальной фильтрации имеет много приложений в самых разных областях, одна из важнейших областей – управление подвижными объектами (надводными и подводными судами, наземными средствами передвижения, летательными аппаратами) и обработка информации, получаемой с автономных, спутниковых и гибридных навигационных систем. Разработка новых методов и алгоритмов оптимальной фильтрации не теряет своей актуальности, что связано с развитием глобальных (GPS, ГЛОНАСС, Galileo, COMPASS) и региональных (BeiDou, IRNSS, QZSS) навигационных спутниковых систем, систем повышения точности позиционирования (WAAS, СДКМ, EGNOS) [4].

Альтернативой применению существующих методов решения задачи оптимальной фильтрации [1, 2] может служить применение спектральной формы математического описания. Ее использование положительно зарекомендовало себя при решении задач анализа стохастических систем управления, в том числе систем со случайным периодом квантования (стохастических систем с импульсными воздействиями, приводящими к разрыву траекторий) и систем со случайной структурой (многорежимных или гибридных стохастических систем, в которых изменение режима функционирования носит случайный характер и происходит в случайные моменты времени); при решении задач синтеза оптимального управления стохастическими системами [5–7].

С помощью спектральной формы математического описания можно получить спектральные аналоги уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи и его робастного варианта [3]. Уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи структурно более простое по сравнению с робастным, но содержит множитель типа белого шума, что существенно затрудняет его решение с помощью методов и подходов, использующих различные аппроксимации. Робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи, полученное посредством специальной замены переменной (апостериорной плотности вероятности), более громоздко, но не содержит белого шума. Именно решение робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи представляется перспективным. Использование спектральной формы математического описания позволит свести это уравнение (при фиксированных измерениях это детерминированное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка) к системе линейных уравнений относительно коэффициентов разложения его решения в функциональный ряд по некоторому подходящему базису, таким образом определив и апостериорную плотность вероятности. В рамках применяемого подхода вид этой системы не зависит от выбранного базиса, что отличает его от других методов, называемых спектральными и связанными с конкретными системами функций.

Приведем уравнение для определения ненормированной апостериорной плотности вероятности (в форме Стратоновича):

$$\frac{d_{1/2}\phi(t,x\,|\,Y_0^t)}{dt} = L\phi(t,x\,|\,Y_0^t) + C_{Y(t)}\phi(t,x\,|\,Y_0^t), \quad \phi(t_0,x) = \phi_0(x),$$

где

$$L\phi(t,x\,|\,Y_0^t) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[f_i(t,x)\phi(t,x\,|\,Y_0^t)\Big] +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Big[g_{ij}(t,x)\phi(t,x\,|\,Y_0^t)\Big] - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}c_k^2(x)\phi(t,x\,|\,Y_0^t),$$

$$g_{ij}(t,x) = \sum_{l=1}^{s}\sigma_{il}(t,x)\sigma_{jl}(t,x), \quad C_{Y(t)}\phi(t,x\,|\,Y_0^t) = \sum_{k=1}^{m}c_k(x)\frac{dY_k(t)}{dt}\phi(t,x\,|\,Y_0^t).$$

Апостериорная плотность вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^t)$ вектора состояния X выражается через функцию $\phi(t,x\,|\,Y_0^t)$ следующим образом:

$$p(t,x\,|\,Y_0^t) = \frac{\phi(t,x\,|\,Y_0^t)}{\int\limits_{R^n}\phi(t,x\,|\,Y_0^t)dx}.$$

С помощью замены

$$\rho(t,x\,|\,Y_0^t) = \mathrm{e}^{-\sum\limits_{k=1}^{m}c_k(x)Y_k(t)}\phi(t,x\,|\,Y_0^t)$$

получаем робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи [3]:

$$\frac{\partial\rho(t,x\,|\,Y_0^t)}{\partial t} = L\rho(t,x\,|\,Y_0^t) - \sum_{k=1}^{m}Y_k(t)L_k\rho(t,x\,|\,Y_0^t) +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}Y_k(t)Y_r(t)L_{kr}\rho(t,x\,|\,Y_0^t),$$

где

$$L_k = \big[c_k(x), L\big], \quad L_{kr} = \frac{1}{2}\big[c_k(x),[c_r(x),L]\big] \quad ([\,\cdot\,,\cdot\,]\text{ – скобки Пуассона}).$$

Последнее уравнение при фиксированных измерениях Y_0^t – детерминированное уравнение в частных производных второго порядка. Оно не содержит множителей типа белого шума, что делает его удобным для применения спектральной формы математического описания.

Преимущество предлагаемого подхода к оптимальному оцениванию состоит в возможности получения оценки в темпе с поступлением измерений (при использовании базисных систем, заданных на нестационарном отрезке времени); простоте реализации, основанной на развитом методическом, алгоритмическом и программном обеспечении спектрального метода [5–7]; универсальности (возможности решения задачи оптимальной фильтрации для линейной, нелинейной или существенно нелинейной моделей объекта наблюдения и измерительной системы, для одномерного и многомерного случаев).

Литература

1. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Теория стохастических систем. – М.: Логос, 2004.
2. Chen Z. Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond / Technical Report: Adaptive Syst. Lab., McMaster University, Hamilton, ON, Canada, 2003.
3. Hazewinkel M. Lectures on Linear and Nonlinear Filtering // Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems (ed. by W.O. Schiehlen, W. Wedig). – Springer-Verlag, 1988. – P. 103–136.
4. Global Positioning System [Электронный ресурс]. – http://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System (15.09.2012).
5. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006.
6. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.
7. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. – М.: Изд-во МАИ, 2012.