Синтез оптимального управления стохастическими системами при импульсных воздействиях, образующих непуассоновские потоки событий*

Рыбаков К.А.

Московский авиационный институт
rkoffice@mail.ru

В докладе рассматривается задача оптимального управления стохастическими системами, которые описываются уравнением Ито со скачкообразной компонентой:

$$dX(t) = f\big(t, X(t), \mathbf{u}(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t), \mathbf{u}(t)\big)dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния; $\mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^q$ – вектор управления; $t \in T = [t_0, t_1]$, моменты времени t_0 и t_1 заданы; $f(t,x,u)\colon T \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ – вектор-функция размера n, $\sigma(t,x,u)\colon T \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n\times s}$ – матричная функция размеров $n \times s$; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния X_0, задаваемого плотностью вероятности $\varphi_0(x)$. Слагаемое $dQ(t)$ описывает импульсные воздействия [3]. Варианты описания процесса $Q(t)$ следующие:

1. Случайный процесс $Q(t)$ представляется в виде

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{J(t)} Y(\tau_i),$$

где $J(t)$ – эрланговский процесс порядка N, $Y(\tau_i)$ – независимые случайные величины из $\mathbb{R}^n$, распределение которых задано плотностью вероятности $q(t,y)$, т.е. вектор состояния получает случайные приращения в моменты времени τ_1, τ_2, ..., образующие эрланговский поток событий: $X(\tau_i) = X(\tau_i - 0) + Y(\tau_i)$.

Эрланговский поток событий формируется в результате пропуска подряд $N-1$ события пуассоновского потока, который определяется интенсивностью λ следования событий и задает пуассоновский процесс $P(t)$. С учетом введенных обозначений

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{P(t)} \xi_i Y(\theta_i), \quad J(t) = \left[\frac{P(t)}{N}\right],$$

где $\xi_i = 1$ при $i \pmod N = 0$ и $\xi_i = 0$ при $i \pmod N \neq 0$; моменты времени θ_1, θ_2, ... соответствуют событиям пуассоновского потока: $\theta_{iN} = \tau_i$.

2. Случайный процесс $Q(t)$ представляется в виде

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{J(t)} \big(\xi_i Y_1(\tau_i) + (1-\xi_i) Y_2(\tau_i)\big),$$

где $J(t)$ – гиперэрланговский процесс, ассоциированный со случайным потоком событий, состоящих в том, что вектор состояния X получает приращения $Y_1(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$ или $Y_2(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$ в случайные моменты времени τ_1, τ_2, ... Случайный вектор $Y_1(\tau_i)$ характеризуется плотностью вероятности $q_1(t,y)$, а $Y_2(\tau_i)$ – плотностью вероятности $q_2(t,y)$; $t = \tau_i$. Выбор приращения $Y_1(\tau_i)$ или $Y_2(\tau_i)$ зависит от случайной величины ξ_i, принимающей значения

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00892-а).
Математическая теория управления и механика. Международная конференция, Суздаль, 5–9 июля 2013 г.: Тез. докл. – М.: МИАН, 2013. – С. 202–205.

1 с вероятностью $\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$ и 0 с вероятностью $\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$ (случайные величины ξ_1, $\xi_2, \ldots$ имеют распределение Бернулли).

Заданные положительные числа λ_1 и λ_2, а также натуральные числа N_1 и N_2 определяют гиперэрланговский закон распределения промежутков времени $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ $(\tau_0 = t_0)$, который является эрланговским с параметрами λ_1 и N_1, если $\xi_i = 1$, или эрланговским с параметрами λ_2 и N_2, если $\xi_i = 0$. Случайные величины ξ_i независимы, поэтому выбор закона распределения для случайного приращения – $q_1(t,y)$ или $q_2(t,y)$ – в момент времени τ_i не зависит от предыстории.

3. Случайный процесс $Q(t)$ представляется в виде

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{P(t)} Y(i,\tau_i), \quad Y(i,\tau_i) = \begin{cases} Y_1(\tau_i), & i \pmod N = N_1, \\ Y_2(\tau_i), & i \pmod N = 0, \\ 0, \quad i \pmod N \neq N_1 & \text{и} \quad i \pmod N \neq 0, \end{cases}$$

где $P(t)$ – пуассоновский процесс интенсивности λ, ассоциированный со случайным потоком событий, состоящих в том, что вектор состояния X может получить приращения $Y_1(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$ или $Y_2(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$ в случайные моменты времени τ_1, τ_2, ...

Распределение промежутков времени $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ $(\tau_0 = t_0)$, определяется показательным законом с параметром λ. Случайный вектор $Y_1(\tau_i)$ характеризуется плотностью вероятности $q_1(t,y)$, а $Y_2(\tau_i)$ – плотностью вероятности $q_2(t,y)$; $t = \tau_i$. Приращения $Y_1(\tau_i)$ и $Y_2(\tau_i)$ чередуются между собой.

Заданное положительное число λ, а также натуральные числа N_1 и N определяют гиперэрланговский закон распределения промежутков времени между последовательными разрывами траектории процесса $X(t)$. Это распределение можно описать с помощью чередования эрланговских законов распределений, имеющих одинаковую интенсивность λ и различные порядки N_1 и $N - N_1$.

При управлении используется информация о времени и о величине m первых координат вектора состояния, $0 \leqslant m \leqslant n$, т.е. $X = [X_{(1)}\ X_{(2)}]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{u}(t) = u(t, X_{(1)}(t))$, где $X_{(1)} = [X_1\ X_2\ \ldots\ X_m]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $X_{(2)} = [X_{m+1}\ \ldots\ X_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-m}$. Таким образом, решается задача синтеза оптимального управления при неполной информации о состоянии.

Требуется найти пару $\varphi^*(t,x)$, $u^*(t,x_{(1)})$, доставляющую минимум функционалу

$$J\big(\varphi(t,x), u(t,x_{(1)})\big) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} \omega\big(t, \varphi(t,x), u(t,x_{(1)})\big)dtdx + \theta\big(\varphi(t_1,x)\big),$$

где $\varphi(t,x)$ – плотность вероятности вектора состояния, $\omega(t,\varphi(t,x),u)\colon T\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}$ – ограниченная функция, а $\theta(\varphi)\colon \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ – ограниченный функционал ($\mathfrak{F}$ – множество допустимых плотностей вероятности).

С помощью достаточных условий оптимальности в задаче управления системами со случайной структурой [4] получены соотношения для определения оптимального управления в задачах, сформулированных выше, рассмотрен частный случай нахождения оптимального в среднем управления. В основе применяемых достаточных условий лежит принцип расширения [1]. Методика вывода соотношений ранее применялась для стохастических систем без импульсных воздействий [2].

Список литературы: [1] Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973. [2] Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. – М.: Изд-во МАИ, 2012. [3] Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. [4] Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Оптимальное управление нелинейными системами со случайной структурой при неполной информации о векторе состояния // Автоматика и телемеханика. – 2006, №7. – С. 62–75.