Новые алгоритмы фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа*

Рыбаков К.А.

Московский авиационный институт

rkoffice@mail.ru

В докладе рассматривается задача фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа. Предполагается, что система описывается двумя уравнениями Ито:

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0,$$
$$dY(t) = c\big(t, X(t)\big)dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = 0,$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта наблюдения; $Y \in \mathbb{R}^m$ – вектор измерений; $t \in T = [t_0, t_1]$; $W(t)$ и $V(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы размерностей s и d соответственно; $f(t,x)$, $\sigma(t,x)$, $c(t,x)$, $\zeta(t)$ – заданные функции; $Q(t)$ – общий пуассоновский процесс, задаваемый интенсивностью $\lambda(t,x)$ и условной плотностью вероятности $\eta(t,x\,|\,\xi)$, которая характеризует распределение $X(\tau_k)$ при условии $X(\tau_k - 0) = \xi$ в момент времени $t = \tau_k$ разрыва траектории случайного процесса $X(t)$. Начальное состояние X_0 задается плотностью вероятности $\varphi_0(x)$.

Решение задачи фильтрации будем понимать как нахождение ненормированной апостериорной плотности вероятности $\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)$ вектора состояния X объекта наблюдения при фиксированных измерениях $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$, удовлетворяющей уравнению Дункана–Мортенсена–Закаи [1, 2], которое можно представить в виде [3]:

$$\frac{\partial \varphi(t,x\,|\,Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) - \lambda(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) + \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\varphi(t,\xi\,|\,Y_0^t)d\xi -$$
$$- \mu^-\big(t,x,Y(t)\big)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) + \mu^+\big(t,x,Y(t)\big)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t), \quad \varphi(t,x\,|\,Y_0^t)|_{t=t_0} = \varphi_0(x),$$

где

$$\mathcal{A}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) = -\nabla^{\mathrm{T}}\big(f(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)\big) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\big(\nabla\nabla^{\mathrm{T}}\big(\sigma(t,x)\sigma^{\mathrm{T}}(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)\big)\big),$$

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00892-а). Математическая теория управления и механика. Международная конференция, Суздаль, 3–7 июля 2015 г.: Тез. докл. – М.: МИАН, 2015. – С. 114–115.

$$\mu^-(t,x,y) = \begin{cases} -\mu(t,x,y), \ \mu(t,x,y) < 0, \\ 0, \ \mu(t,x,y) \geqslant 0, \end{cases} \qquad \mu^+(t,x,y) = \begin{cases} \mu(t,x,y), \ \mu(t,x,y) > 0, \\ 0, \ \mu(t,x,y) \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\mu\big(t,x,Y(t)\big) = c^{\mathrm{T}}(t,x)\big(\zeta(t)\zeta^{\mathrm{T}}(t)\big)^{-1}\left(\frac{dY(t)}{dt} - \frac{c(t,x)}{2}\right).$$

Зная ненормированную апостериорную плотность вероятности $\varphi(t,x \,|\, Y_0^t)$, нетрудно получить оценку $\hat{X}(t)$ траектории случайного процесса $X(t)$ по результатам измерений Y_0^t. Например, оценка

$$\hat{X}(t) = \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} x\varphi(t,x \,|\, Y_0^t)dx}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t,x \,|\, Y_0^t)dx}$$

обладает свойством несмещенности и гарантирует минимум среднеквадратической ошибки оценивания.

Предлагаемые алгоритмы решения задачи фильтрации базируются на моделировании ансамбля траекторий специального случайного процесса $X(t)$ по коэффициентам сноса $f(t,x)$ и диффузии $\sigma(t,x)$, интенсивности $\lambda(t) = \lambda(t,X(t))$ появления разрывов и распределению величины приращения при разрыве согласно $\eta(t,x \,|\, \xi)$ с учетом того, что эти траектории обрываются или разветвляются с интенсивностями

$$\mu^-(t) = \mu^-(t,X(t),Y(t)) \quad \text{и} \quad \mu^+(t) = \mu^+(t,X(t),Y(t))$$

соответственно. При этом используются известные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков событий. По полученному в результате моделирования ансамблю траекторий можно оценить как апостериорную плотность вероятности $\varphi(t,x \,|\, Y_0^t)$, так и найти оценку $\hat{X}(t)$.

В качестве альтернативы моделированию траекторий специального случайного процесса с обрывами и ветвлениями можно «имитировать» обрывы и ветвления, моделируя наряду с каждой траекторией $X(t)$ дополнительную траекторию – весовой коэффициент. Изменение весового коэффициента осуществляется на основе тех же интенсивностей $\mu^-(t)$ и $\mu^+(t)$, которые определены выше, весовым коэффициентом косвенно управляет случайный процесс $Y(t)$.

Ранее алгоритмы фильтрации, в основе которых лежит моделирование траекторий специального случайного процесса с обрывами и ветвлениями, были сформированы для более простых стохастических систем диффузионного типа [4], т.е. без разрывов траекторий случайного процесса $X(t)$, а потом адаптированы для решения задачи прогнозирования [5].

Список литературы

[1] Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. – М.: Советское радио, 1976.

[2] Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. – М.: Логос, 2007.

[3] Рыбаков К.А. Приближенный метод фильтрации сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. – 2014, № 207. – С. 54–60.

[4] Рыбаков К.А. Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2012, № 3. – С. 91–110.

[5] Рыбаков К.А. Алгоритмы прогнозирования состояний в стохастических дифференциальных системах на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2015, № 1. – С. 25–38.