МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОРТОНОРМИРОВАННЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ФОРМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ

Рыбаков К.А. (Москва)

rkoffice@mail.ru

При решении многих задач теории управления с применением спектральной формы математического описания возникает необходимость в базисных системах, ортонормированных в неограниченных областях (бесконечном или полубесконечных интервалах). К подобным задачам относятся задачи анализа, синтеза, фильтрации и идентификации [1, 2]. Наиболее изученными из таких базисных систем являются полиномы Эрмита и Лагерра, однако их оказывается недостаточно, поскольку при использовании для разложения небольшого числа функций этих систем не всегда удается добиться приемлемой точности аппроксимации, — возникает задача формирования новых базисных систем.

В статье приведены соотношения для обобщенных функций Эрмита и Лагерра, описана методика формирования ортонормированных систем функций на основе базисных систем, заданных на отрезках. Наличие таких числовых параметров у рассматриваемых функций, как параметры сдвига и масштаба, а также параметр, характеризующий «распределение» весовой функции, позволяет оптимальным образом решать различные задачи с помощью представления функций конечными отрезками ортогональных рядов.

В [3] введены обобщенные функции Эрмита, обладающие как свойствами полиномов Эрмита (ортогональность с весом, позволяющим представлять в виде сходящихся рядов полиномы), так и функций Эрмита (интегрируемость функций системы на множестве действительных чисел). Нормированные обобщенные функции Эрмита определяются следующим образом:

$$e_j^{m,D,\alpha}(x) = \omega^{\frac{1-\alpha}{2}}(x)\frac{G_j^{m,D}(x)}{\sqrt{j!D^j}}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2D}},\ G_j^{m,D}(x) = (-1)^j D^j \mathrm{e}^{\frac{(x-m)^2}{2D}}\frac{d^j}{dx^j}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2D}}\right),$$

а m, $D > 0$ и $\alpha \in [0, 1]$ — параметры. Обобщенные функции Эрмита образуют базис пространства $L_2((-\infty, +\infty); \omega^\alpha(x))$. При $\alpha = 1$ функции $e_j^{m,D,\alpha}(x)$ совпадают с нормированными полиномами Эрмита, а при $\alpha = 0$ — с нормированными функциями Эрмита. В [3] подробно изложены свойства функций $e_j^{m,D,\alpha}(x)$ в контексте применения спектральной формы математического описания и приведены примеры их использования в различных задачах.

Несмотря на то что $\{e_j^{m,D,\alpha}(x)\}_{j=0}^\infty$ — полная ортонормированная система функций и, следовательно, любую функцию из пространства $L_2((-\infty, +\infty); \omega^\alpha(x))$ можно сколь угодно точно представить в виде конечного отрезка ряда по функциям $e_j^{m,D,\alpha}(x)$, может возникнуть необходимость в других базисных системах для представления функций, заданных на множестве действительных чисел. Особенно это важно, когда при аппроксимации используется лишь небольшое число функций базисной системы, тогда существенное значение имеют такие их свойства, как, например, скорость убывания.

Рассмотрим методику формирования ортонормированных на множестве $(-\infty, +\infty)$ систем функций при помощи базисных систем, заданных на отрезках. Пусть $\{p_j(x)\}_{j=0}^\infty$ — базисная система в пространстве $L_2([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$, а функции системы $\{r_j(x)\}_{j=0}^\infty$ задаются в виде $r_j(x) = p_j(\operatorname{arctg} x)$, тогда

$$\big(r_i(x), r_j(x)\big)_{L_2((-\infty,+\infty);\rho(x))} = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x) r_i(x) r_j(x) dx = \delta_{ij},$$

где $\rho(x) = \frac{1}{1+x^2}$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Таким образом, система функций $\{r_j(x)\}_{j=0}^\infty$ образует базис пространства $L_2((-\infty, +\infty); \rho(x))$. Полнота этой системы следует из полноты $\{p_j(x)\}_{j=0}^\infty$.

На основе базисной системы $\{r_j(x)\}_{j=0}^\infty$ с помощью введения дополнительных параметров построим новую систему функций. Во-первых, это параметры сдвига и масштаба (m и D), а во-вторых, параметр α, характеризующий «распределение» весовой функции:

$$r_j^{m,D,\alpha}(x) = \rho^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\frac{x-m}{D}\right) r_j\left(\frac{x-m}{D}\right), \quad D > 0, \quad \alpha \in [0, 1].$$

Функции $\{r_j^{m,D,\alpha}\}_{j=0}^\infty$ являются ортонормированными с весом $\frac{1}{D}\rho^\alpha(\frac{x-m}{D})$. При $\alpha = 0$ весовая функция — константа.

В качестве порождающей базисной системы $\{p_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ могут быть использованы, например, полиномы Лежандра, тригонометрические функции, функции Уолша и др. [1, 2], в том числе функции, ортонормированные на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ с весом $\nu(x)$, тогда весовая функция для системы $\{r_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ — $\nu(\operatorname{arctg} x)\rho(x)$. Выбор типа базисной системы (полиномиальный, периодический, кусочно-постоянный) определяется необходимыми свойствами порождаемой системы функций $\{r_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$. Функции, ортонормированные на произвольном отрезке $[a, b]$, сначала с помощью линейной замены переменной приводятся к системе функций, ортонормированной на $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Используя для замены переменной в $\{p_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ функцию $\operatorname{arctg} x^n$, где $n > 0$ — нечетное число, можно получить более широкий набор базисных систем $\{r_j^n(x)\}_{j=0}^{\infty}$ с весовыми функциями $\rho(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}$ (здесь $n > 0$ — параметр, характеризующий скорость убывания). Затем, как и для системы $\{r_j^{m,D,\alpha}(x)\}_{j=0}^{\infty}$, дополнительно вводятся параметры m, D и α.

Можно указать и другие варианты: так, при использовании замены $\operatorname{arctg}(x + x^n)$ весовая функция $\rho(x) = \frac{1+nx^{n-1}}{1+(x+x^n)^2}$ принимает только положительные значения и не обращается в нуль ($n > 0$ — нечетное число), что важно при решении некоторых начальных или краевых задач.

Для представления функций, заданных на множестве неотрицательных действительных чисел, могут применяться обобщенные функции Лагерра:

$$f_j^{\alpha,\beta}(x) = \gamma^{\frac{1-\beta}{2}}(x) \frac{L_j^{\alpha}(x)}{\sqrt{j!\,\Gamma(\alpha + j + 1)}}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$\gamma(x) = x^{\alpha} \mathrm{e}^{-x}, \quad L_j^{\alpha}(x) = (-1)^j x^{-\alpha} \mathrm{e}^{x} \frac{d^j}{dx^j}(x^{\alpha+j} \mathrm{e}^{-x}),$$

а $\alpha > -1$ и $\beta \in [0, 1]$ — параметры, $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция. Обобщенные функции Лагерра являются базисными в пространстве $L_2([0, +\infty); \gamma^{\beta}(x))$. При $\beta = 1$ функции $f_j^{\alpha,\beta}(x)$ совпадают с нормированными полиномами Лагерра, а при $\beta = 0$ — с нормированными функциями Лагерра. Свойства этих функций, необходимые для применения спектральной формы математического описания, приведены в [4].

Введение параметров сдвига и масштаба, а именно определение системы функций $\{f_j^{\alpha,\beta,m,D}(x) = f_j^{\alpha,\beta}(\frac{x-m}{D})\}_{j=0}^{\infty}$, позволяет при $D > 0$ получить систему, ортонормированную на множестве $[m, +\infty)$ с весовой функцией $\frac{1}{D}\gamma^{\beta}(\frac{x-m}{D})$, а при $D < 0$ — систему, ортонормированную на множестве $(-\infty, m]$ с весовой функцией $-\frac{1}{D}\gamma^{\beta}(\frac{x-m}{D})$.

Альтернатива обобщенным функциям Лагерра — ортонормированные на $[0, +\infty)$ системы функций, которые определяются с помощью базисных систем, заданных на отрезках. Методика их формирования аналогична приведенной выше для бесконечного интервала $(-\infty, +\infty)$, только в качестве порождающей системы $\{p_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ выступает базис пространства $L_2([0, \frac{\pi}{2}])$. Кроме того, можно использовать базисные системы, ортонормированные на отрезках $[a, \frac{\pi}{2}]$ или $[-\frac{\pi}{2}, b]$, где $-\frac{\pi}{2} < a, b < \frac{\pi}{2}$, получая таким образом системы функций, ортонормированные на полубесконечных интервалах, отличных от $[0, +\infty)$.

Литература

1. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.

2. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. — М.: Изд-во МАИ, 2012.

3. Романов В.А., Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Электронный журнал «Труды МАИ». — 2010, № 39.

4. Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Лагерра // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2012, № 1. — С. 114–141.