МЕТОДИКА ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ДОПУСТИМЫХ УПРАВЛЕНИЙ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ[1]

Рыбаков К.А. (Москва)
rkoffice@mail.ru

Будем предполагать, что задана функция $u(t)\colon T=[t_0,t_1]\to\mathbb{R}^1$. Система функций $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ образует ортонормированный базис пространства $L_2(T)$ [2], функции $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ непрерывны либо односторонне непрерывны на T. Таким образом, если $u(t)\in L_2(T)$, то

$$u(t)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i\cdot q(i,t),\quad t\in T,$$

где u_i — коэффициенты разложения функции $u(t)$:

$$u_i=\big(q(i,t),u(t)\big)_{L_2(T)}=\int_{t_0}^{t_1}q(i,t)u(t)dt,\quad i=0,1,2,\ldots$$

Спектральной характеристикой U функции $u(t)$, определенной относительно базисной системы $\{q(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$, называется [3, 4] упорядоченная совокупность коэффициентов разложения u_i, представленных в виде бесконечной матрицы-столбца (транспонированной матрицы-строки):

$$U=[\,u_0\ \ u_1\ \ u_2\ \ \ldots\,]^{\mathrm{T}}.$$

Преобразование, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику, называют спектральным преобразованием и обозначают $\mathbb{S}$, тогда $U=\mathbb{S}[u(t)]$, $u(t)=\mathbb{S}^{-1}[U]$, $\mathbb{S}^{-1}$ — обратное спектральное преобразование.

Наряду с точным представлением функции $u(t)$ в виде ряда можно рассматривать задачу приближенного представления в виде частичной суммы:

$$u(t)\approx u_L(t)=\sum_{i=0}^{L-1}u_iq(i,t),$$

[1] Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. VIII Международная конференция, Воронеж, 12-14 декабря 2013 г.: Материалы конф. – Воронеж: Изд.-полиграф. центр «Научная книга», 2014. – С. 255–260.

где L называется порядком усечения спектральных характеристик [3, 4]. В этом случае спектральная характеристика представляется конечной матрицей-столбцом:

$$U_L = [\, u_0 \;\; u_1 \;\; \ldots \;\; u_{L-1} \,]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^L.$$

Пространство $L_2(T)$ линейно, конечномерное подпространство $L_2(T)_L$, образованное первыми L базисными функциями $q(0,t)$, $q(1,t)$, $\ldots$, $q(L-1,t)$, линейно по построению:

$$L_2(T)_L = \mathrm{Lin}\bigl\{q(0,t), q(1,t), \ldots, q(L-1,t)\bigr\},$$

поэтому множество всех спектральных характеристик функций из $L_2(T)_L$ совпадает с $\mathbb{R}^L$. Для функций из $L_2(T)$ множество всех спектральных характеристик — пространство квадратично суммируемых последовательностей l_2.

Предположим, что для функций $u(t)$ заданы дополнительные условия вида $|u(t)| \leqslant \upsilon$, $t \in T$, часто используемые в задачах оптимального управления с ограничениями, т.е. $u(t)$ — допустимые управления некоторой динамической системой, t — время. Задача построения множества допустимых управлений в спектральной области состоит в построении множества спектральных характеристик $\mathbb{U}_L \subset \mathbb{R}^L$, соответствующих функциям из

$$L_2(T)_L \cap \{u(t)\colon |u(t)| \leqslant \upsilon\}$$

при спектральном преобразовании $\mathbb{S}$.

Нетрудно показать, что множество $\mathbb{U}_L$ — выпуклое, замкнутое, ограниченное подмножество $\mathbb{R}^L$, симметричное относительно нуля $[\,0 \;\; 0 \;\; \ldots \;\; 0\,]^{\mathrm{T}}$, соответствующего управлению $u(t) \equiv 0$. Граница множества $\mathbb{U}_L$ является образом управлений, достигающих заданного ограничения υ.

Для приближенного построения множества допустимых управлений в спектральной области выберем конечное множество управлений, достигающих ограничения υ. Их выпуклая комбинация образует замкнутую многогранную область, граница которой — выпуклый многогранник.

Выпуклый многогранник может быть задан множеством вершин и плоскостями граней [1]. Найдем для некоторых классов управлений соответствующие им множества вершин.

Выберем функции $a_i(t) = \alpha_i q(i,t)$, где величины α_i определяются из условия $\max|a_i(t)| = \upsilon$, $i = 0, 1, \ldots, L-1$. Тогда спектральные характеристики $A_i = \mathbb{S}[a_i(t)] = \alpha_i E_i$, где E_i — орты координатных осей, или столбцы единичной матрицы порядка L. Это является следствием ортогональности функций $\{q(l,t)\}_{l=0,1,\ldots,L-1;\, l\neq i}$ и $a_i(t)$.

Для аппроксимации множества $\mathbb{U}_L$ можно брать в качестве управлений суммы двух и более функций $a_i(t)$ с разными весовыми коэффициентами. Для этого, например, введем множество мультииндексов

$$J(m) = \left\{(j_0, j_1, \ldots, j_{L-1})\colon j_i \in \mathbb{Z} \cap [-m, m],\ \sum_{i=0}^{L-1} |j_i| \neq 0\right\}$$

и функции

$$a_j(t) = \gamma_j \sum_{i=0}^{L-1} j_i a_i(t), \quad j \in J(m),$$

где величины γ_j определяются из условия $\max|a_j(t)| = \upsilon$, m — натуральное число.

В $J(m)$ требуется дополнительно отождествить пропорциональные индексы, т.е. вместо $J(m)$ нужно рассматривать его факторизацию по отношению эквивалентности: $j_1 \sim j_2$, $j_1, j_2 \in J(m)$, если $j_1 = \chi j_2$, где χ — некоторое ненулевое рациональное число.

Далее найдем спектральные характеристики функций $a_j(t)$:

$$A_j = \mathbb{S}[a_j(t)] = \gamma_j [\, j_0\alpha_0 \ \ j_1\alpha_1 \ \ \ldots \ \ j_{L-1}\alpha_{L-1}\,]^{\mathrm{T}} = \gamma_j \sum_{i=0}^{L-1} j_i \alpha_i E_i,$$

которые образуют множество вершин многогранника, аппроксимирующего множество $\mathbb{U}_L$: $\mathbb{U}_L^{(m)} = \mathrm{Conv}\{A_j, j \in J(m)\}$, $\mathbb{U}_L^{(m)} \subseteq \mathbb{U}_L$.

Рассмотрим другой класс функций — функции, порожденные кусочно-постоянными функциями. Выберем натуральное число n и определим функции

$$b_i(t) = \upsilon I(t - t_0 - i\eta/n), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

где $I(t)$ — индикатор множества $[0, \eta/n)$, $\eta = t_1 - t_0$.

Далее определим множество мультииндексов

$$K(n) = \big\{(k_0, k_1, \ldots, k_{n-1})\colon k_i \in \{\pm 1\}\big\},$$

а также функции

$$\hat{b}_k(t) = \sum_{i=0}^{n-1} k_i b_i(t) \quad \text{и} \quad b_k(t) = \beta_k \hat{b}_k(t), \quad k \in K(n),$$

где β_k определяются из условия $\max |\mathbb{S}^{-1}[\hat{B}_k]| = \upsilon$, в котором $\hat{B}_k$ — усеченная спектральная характеристика функции $\hat{b}_k(t)$, $k \in K(n)$.

Введение функций $\hat{b}_k(t)$ связано с тем, что если построить проекцию $L_2(T) \cap \{u(t)\colon |u(t)| \leqslant \upsilon\}$ на $L_2(T)_L$, то она, вообще говоря, не совпадет с $L_2(T)_L \cap \{u(t)\colon |u(t)| \leqslant \upsilon\}$, поскольку при обратном преобразовании усеченной спектральной характеристики результат может не удовлетворять исходным ограничениям или не достигать заданного значения υ. Более того, с ростом n норма $b_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, будет уменьшаться, а соответствующие им усеченные спектральные характеристики — приближаться к нулю.

Спектральные характеристики функций $b_k(t)$ вычисляются по определению:

$$B_k = \mathbb{S}[b_k(t)] = \beta_k \sum_{i=0}^{n-1} k_i \mathbb{S}[b_i(t)].$$

Они образуют множество вершин многогранника, аппроксимирующего множество $\mathbb{U}_L$: $\mathbb{U}_L^{(n)} = \mathrm{Conv}\{B_k, k \in K(n)\}$, $\mathbb{U}_L^{(n)} \subseteq \mathbb{U}_L$.

Функции $b_k(t)$, $k \in K(n)$, в общем случае уже не являются кусочно-постоянными и не ортогональны при непересекающихся носителях, поэтому они не так удобны, как введенные ранее функции $a_j(t)$, $j \in J(m)$. Тем не менее, их тоже можно использовать для построения множества допустимых управлений в спектральной области.

Для построения множества вершин многогранника возможно объединение $\{A_j, j \in J(m)\}$ и $\{B_k, k \in K(n)\}$:

$$\mathbb{U}_L^{(m,n)} = \mathrm{Conv}\big\{\{A_j, j \in J(m)\} \cup \{B_k, k \in K(n)\}\big\}, \quad \mathbb{U}_L^{(m,n)} \subseteq \mathbb{U}_L,$$

а также добавление вершин, полученных другим способом, например, на основе моделирования случайных функций из множества $L_2(T)_L \cap \{u(t)\colon |u(t)| \leqslant \upsilon\}$.

Выпуклую многогранную область можно построить как пересечение полупространств, заданных граничными плоскостями. Уравнение гиперплоскости в $\mathbb{R}^L$, проходящей через вершины $U_0, U_1, \ldots,$

$U_{L-1} \in \mathbb{R}^L$, задается в виде

$$\det(X - U_0, U_1 - U_0, U_2 - U_0, \ldots, U_{L-1} - U_0) = 0,$$

где $X = [\,x_0 \;\; x_1 \;\; \ldots \;\; x_{L-1}\,]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^L$. Чтобы гиперплоскость была граничной, очевидно, остальные точки, являющиеся вершинами многогранника, и нуль, должны быть по одну сторону этой гиперплоскости. Раскрывая определитель, уравнение гиперплоскости можно переписать следующим образом: $n_0x_0+n_1x_1+\ldots+n_{L-1}x_{L-1}-d=0$, где $d > 0$, тогда $N = [\,n_0 \;\; n_1 \;\; \ldots \;\; n_{L-1}\,]^{\mathrm{T}}$ — внешняя нормаль к гиперплоскости [1]. Все точки X, для которых

$$(N, X) - d = n_0x_0 + n_1x_1 + \ldots n_{L-1}x_{L-1} - d < 0,$$

лежат в полупространстве, содержащем нуль.

Таким образом, можно перейти от задания выпуклого многогранника множеством вершин к заданию его плоскостями граней P_l, где l принимает значения из конечного множества. Каждая из этих плоскостей определяется внешней нормалью N_l и числом d_l, т.е. уравнением $(N_l, X) - d_l = 0$. Тогда проверка принадлежности точки $U \in \mathbb{R}^L$, которая соответствует некоторому управлению $u(t) = \mathbb{S}^{-1}[U]$, сводится к проверке условия $(N_l, U) - d_l \leqslant 0$ для каждого l.

Построение плоскостей граней по известному множеству вершин многогранника может осуществляться методами вычислительной геометрии [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00892-а).

Литература

1. Александров А.Д. Выпуклые многогранники. — М.: ГИТТЛ, 1950.

2. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.

3. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.

4. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. — М.: Изд-во МАИ, 2012.

5. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия: Введение. — М.: Мир, 1989.