УДК 517.977.5

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ ДИФФУЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНЫМ ПРОЦЕССОМ НА МНОГООБРАЗИИ[1]

К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Рассматривается модель динамической системы, заданной стохастическим дифференциальным уравнением Ито со скачкообразной компонентой [1]:

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t) + \int_\Theta c\big(t, X(t-), \theta\big)\nu(dt \times d\theta), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — n-мерный вектор состояния системы; $t \in T = [t_0, t_1]$ — время, моменты времени t_0 и t_1 заданы; $f(t,x)\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и $c(t,x,\theta)\colon T \times \mathbb{R}^n \times \Theta \to \mathbb{R}^n$ — заданные n-мерные вектор-функции, $\Theta = \mathbb{R}^k$; $\sigma(t,x)\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times s}$ — заданная $(n \times s)$-мерная матричная функция; $W(t)$ — s-мерный стандартный винеровский процесс; ν — пуассоновская мера на $T \times \Theta$ с характеристической мерой Π, заданной неотрицательной функцией $\pi(t,x,\theta)\colon T \times \mathbb{R}^n \times \Theta \to \mathbb{R}_+$.

Модели динамических систем вида (1) позволяют описывать многие явления и процессы, которые изучаются в различных областях физики, экономики, биологии и, конечно, в технических науках. Наличие диффузионной и скачкообразной компонент дает возможность учитывать непрерывные и импульсные случайные воздействия (последние приводят к скачкам, т.е. к разрывам траекторий случайного процесса $X(t)$).

Предполагается, что траектории случайного процесса $X(t)$ находятся на гладком многообразии $\mathcal{M} \subset T \times \mathbb{R}^n$, которое задается соотношением

$$\mathcal{M} = \{(t,x) \in T \times \mathbb{R}^n \colon M(t,x) = C = \mathrm{const}\};$$

начальный вектор состояния X_0 задается плотностью вероятности $\varphi_0(x)$, $(t_0, X_0) \in \mathcal{M}$.

Как показано в [2, 3], для гладкого многообразия $\mathcal{M}$ существует класс стохастических систем вида (1), для которых $(t, X(t)) \in \mathcal{M}$ с вероятностью 1. Этот класс характеризуется определенной структурой коэффициентов $f(t,x)$, $\sigma(t,x)$ и $c(t,x,\theta)$. Ключевым является то, что коэффициенты $f(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ зависят от набора функций, которые можно принять за координаты вектора управления.

Таким образом, уравнение (1) следует переписать в виде

$$dX(t) = f\big(t, X(t), \mathbf{u}(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t), \mathbf{u}(t)\big)dW(t) + \int_\Theta c\big(t, X(t-), \theta\big)\nu(dt \times d\theta), \quad (2)$$

где к уже введенным обозначениям добавляется $\mathbf{u} \in U \subseteq \mathbb{R}^q$ — q-мерный вектор управления, q зависит от размерностей вектора состояния и многообразия [3].

При управлении системой (2) можно использовать информацию о времени и о величине m первых координат вектора состояния: $0 \leqslant m \leqslant n$, т.е. $X = [X_{(1)}\ X_{(2)}]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{u}(t) = u(t, X_{(1)}(t))$,

[1]Рыбаков К.А. Об оптимальном управлении при неполной информации диффузионно-скачкообразным процессом на многообразии // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Международная научно-техническая конференция, Воронеж, 12–15 сентября 2016 г.: Сб. тр. конф. — Воронеж: Изд-во «Научно-исследовательские публикации», 2016. — С. 401–402.

где $X_{(1)} = [X_1\ X_2\ \ldots\ X_m]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $X_{(2)} = [X_{m+1}\ \ldots\ X_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-m}$. В предельных случаях, т.е. при $m = 0$ и $m = n$, управление будет программным и позиционным (с полной обратной связью) соответственно.

Далее определим функционал качества на множестве допустимых управлений (теоретико-функциональные ограничения здесь не оговариваются; они связаны, в частности, с существованием решения уравнения (2)) и множестве соответствующих им плотностей вероятности $\varphi(t,x)$ вектора состояния:

$$J\big(u(t,x_{(1)}),\varphi(t,x);\varphi_0(x)\big) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} \omega\big(t,x,u(t,x_{(1)})\big)\varphi(t,x)dtdx + \int_{\mathbb{R}^n}\gamma(x)\varphi(t_1,x)dx, \quad (3)$$

где $\omega(t,x,u)\colon T\times\mathbb{R}^n\times U \to \mathbb{R}$ и $\gamma(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — заданные функции, на них можно накладывать дополнительные условия, обеспечивающие конечность величины функционала качества.

Задача оптимального в среднем управления состоит в нахождении таких управления $u^*(t,x_{(1)})$ и плотности вероятности $\varphi^*(t,x)$ соответствующего оптимального процесса, что

$$J\big(u^*(t,x_{(1)}),\varphi^*(t,x);\varphi_0(x)\big) = \min_{u(\cdot),\,\varphi(\cdot)} J\big(u(t,x_{(1)}),\varphi(t,x);\varphi_0(x)\big). \quad (4)$$

К задаче (2)–(4) можно применить достаточные условия оптимальности и соотношения для нахождения оптимального управления, полученные в [4] во всех случаях информированности о векторе состояния ($0 \leqslant m \leqslant n$). Необходимо учесть связи характеристической меры Π и интенсивности, а также закона распределения величины скачков [1], поскольку при построении класса динамических систем вида (1), для которых $(t,X(t)) \in \mathcal{M}$, это не имеет значения, но для нахождения оптимального управления является необходимым. Кроме того, требуется переопределить множество допустимых плотностей вероятности в [4]. Если же допустить, что скачки задаются более сложным образом, например, интервалы времени между двумя последовательными скачками имеют не экспоненциальное, а эрланговское или гиперэкспоненциальное распределение, то окажутся справедливыми достаточные условия оптимальности и соотношения для нахождения оптимального управления, приведенные в [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-07-00419-а).

Литература

1. *Аверина Т. А., Рыбаков К. А.* Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2013. – № 3. – С. 85–116.

2. *Карачанская Е. В.* Построение программных управлений с вероятностью 1 для динамической системы с пуассоновскими возмущениями // Вестник ТОГУ. – 2011. – № 2 (21). – С. 51–60.

3. *Карачанская Е. В.* Построение программных управлений динамической системы на основе множества ее первых интегралов // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2011. – Т. 42. – С. 125–133.

4. *Рыбаков К. А.* Достаточные условия оптимальности в задаче управления системами диффузионно-скачкообразного типа // XII Всероссийское совещание по проблемам управления (ВСПУ-2014). Москва, 16–19 июня 2014 г.: Тр. – М.: Институт проблем управления РАН, 2014. – С. 734–744.

5. *Рыбаков К. А.* Оптимальное управление стохастическими системами со случайным периодом квантования // Труды МФТИ. – 2015. – Т. 7, № 1. – С. 145–165.