

А.В. ПАНТЕЛЕЕВ А.С. ЯКИМОВА К.А. РЫБАКОВ

УДК 517.9
ББК 22.161.5
П16

Рецензенты:

Кафедра «Прикладная математика»

Московского государственного технического университета гражданской авиации
(заведующий кафедрой доктор технических наук, профессор В.Л. Кузнецов)

Н.А. Бодунов, доктор физико-математических наук, профессор
(Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»)

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРАКТИКУМ

*Рекомендовано Редакционно-издательским советом
Московского авиационного института
(национального исследовательского университета)
в качестве учебного пособия*

Пантелеев А.В., Якимова А.С., Рыбаков К.А.
П16 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум: Учеб.
пособие. — М.: Инфра-М, 2016. — 432 с.: ил.
ISBN 978-5-XXXX-XXX-X

Изложены аналитические, приближенно-аналитические и численные методы и алгоритмы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Применение каждого метода продемонстрировано на решении типовых и нетиповых примеров, охватывающих различные приложения к задачам механики, экономики, расчета электрических цепей и биологических систем. Особое внимание уделено специфике решения задач анализа выходных процессов и устойчивости одномерных и многомерных динамических систем, исследуемых в теории управления.

Для студентов высших учебных заведений, получающих образование по направлениям (специальностям) естественных наук, техники и технологий, информатики и экономики на квалификацию специалиста, степени бакалавра и магистра.

ББК 22.161.5

Москва
2016

ISBN 978-5-XXXX-XXX-X © Пантелеев А.В., Якимова А.С., Рыбаков К.А., 2016
© Инфра-М, 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение		7
Глава 1. Общие теоретические положения		15
1.1. Основные определения		15
1.1.1. Дифференциальные уравнения		15
1.1.2. Системы дифференциальных уравнений		22
1.2. Основные понятия, связанные с исследованием и решением дифференциальных уравнений		26
1.2.1. Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений		26
1.2.2. Сведение дифференциального уравнения высшего порядка к системе дифференциальных уравнений		27
1.2.3. Поле направлений. Приближенное решение уравнений методом изоклин		28
1.2.4. Свойства решений линейных дифференциальных уравнений и систем		30
1.2.5. Анализ выходных процессов		32
1.2.6. Анализ устойчивости		35
Глава 2. Дифференциальные уравнения первого порядка		40
2.1. Уравнения с разделяющимися переменными		40
2.1.1. Метод решения		40
2.1.2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными		45
2.2. Однородные уравнения		50
2.2.1. Метод решения		50
2.2.2. Уравнения, приводящиеся к однородным		53
2.3. Линейные уравнения		56
2.3.1. Метод решения		56
2.3.2. Уравнения, приводящиеся к линейным		62
2.4. Уравнение Риккати		67
2.4.1. Случай интегрируемости уравнения Риккати		67
2.4.2. Метод вспомогательных переменных		75
2.5. Уравнения в полных дифференциалах		77
2.5.1. Метод решения		77
2.5.2. Уравнения, приводящиеся к уравнениям в полных дифференциалах		82
2.6. Уравнения, не разрешенные относительно производной		97
2.6.1. Постановка задачи		97
2.6.2. Уравнения первого порядка n -й степени		99
2.6.3. Неполные уравнения		101
2.6.4. Полные уравнения		105
2.7. Уравнения высшего порядка, приводящиеся к уравнениям первого порядка. Понижение порядка дифференциальных уравнений		113
2.8. Простейшие краевые задачи		123
Глава 3. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка		131
3.1. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами		131
3.1.1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами		131
3.1.2. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами		137
3.2. Решение задачи Коши		154
3.3. Анализ выходных процессов		158
3.4. Анализ устойчивости		164
3.5. Линейные дифференциальные уравнения высшего порядка с переменными коэффициентами		167
3.5.1. Уравнение Эйлера		167
3.5.2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами		178
Глава 4. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами		186
4.1. Методы нахождения и исследования общего решения однородной системы		186
4.1.1. Метод приведения системы линейных уравнений к одному уравнению высшего порядка		187
4.1.2. Метод сведения решения системы к задаче отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы системы		192

4.1.3. Метод неопределенных коэффициентов	203
4.2. Методы нахождения общего решения неоднородных систем	212
4.2.1. Метод приведения системы линейных уравнений к одному уравнению высшего порядка	212
4.2.2. Метод вариации произвольных постоянных	218
4.2.3. Метод подбора частного решения	223
4.3. Решение задачи Коши	234
4.4. Анализ выходных процессов	236
4.5. Анализ устойчивости линейных многомерных стационар- ных динамических систем	243
Глава 5. Применение операционного исчисления для реше- ния линейных дифференциальных уравнений и систем	248
5.1. Преобразование Лапласа	248
5.1.1. Основные определения	248
5.1.2. Свойства преобразования Лапласа	252
5.1.3. Нахождение изображения по оригиналу	259
5.1.4. Нахождение оригинала по изображению	269
5.2. Применение преобразования Лапласа	275
5.2.1. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем	275
5.2.2. Применение передаточных функций для анализа вы- ходных процессов	293
Глава 6. Анализ поведения динамических систем на фазовой плоскости	304
6.1. Динамические системы и их исследование в фазовом про- странстве. Основные положения	304
6.2. Анализ поведения линейных динамических систем второго порядка на фазовой плоскости	307
6.3. Анализ поведения нелинейных автономных динамических систем второго порядка	319
Глава 7. Приближенно-аналитические методы решения дифференциальных уравнений и систем	337
7.1. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов	337
7.1.1. Постановка задачи	337
7.1.2. Метод неопределенных коэффициентов	339
7.1.3. Метод последовательного дифференцирования	349

7.2. Метод последовательных приближений	356
7.3. Спектральный метод	364
7.4. Метод Чаплыгина	382
7.5. Метод Ньютона–Канторовича	387
Глава 8. Численные методы решения дифференциальных уравнений и систем	391
8.1. Постановка задачи. Основные понятия	391
8.2. Явные методы решения дифференциальных уравнений и систем	397
8.2.1. Явный метод Эйлера	397
8.2.2. Метод Эйлера–Коши	402
8.2.3. Модифицированный метод Эйлера	402
8.2.4. Явные методы Рунге–Кутты	402
8.2.5. Метод Рунге–Кутты–Мерсона	407
8.2.6. Методы Адамса–Башфорта	408
8.2.7. Методы Фельберга	409
8.2.8. Методы Ингланда	410
8.2.9. Методы Нюстрема	411
8.2.10. Явные методы Милна	412
8.2.11. Явные методы Хемминга	412
8.2.12. Методы прогноза и коррекции	413
8.3. Неявные методы решения дифференциальных уравнений и систем	415
8.3.1. Неявный метод Эйлера	415
8.3.2. Метод трапеций	416
8.3.3. Методы Адамса–Мултона	416
8.3.4. Неявные методы Милна	417
8.3.5. Неявные методы Хемминга	418
8.3.6. Методы Гира	418
8.3.7. Неявные методы Рунге–Кутты	420
Предметный указатель	427
Список литературы	430