

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2013

Электронный журнал,

рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: jodiff@mail.ru

Стохастические дифференциальные уравнения

Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей*

Т. А. Аверина

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирский государственный университет, ata@osmf.sccc.ru

К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт, rkoffice@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются два метода решения задачи анализа стохастических систем с разрывами траекторий, образующими пуассоновский поток событий: метод статистического моделирования и спектральный метод. В работе изложены алгоритмы решения задачи анализа, основанные на методе статистического моделирования и спектральной форме математического описания систем управления. Сравнение и эффективность методов демонстрируются на решении модельных и прикладных задач.

Ключевые слова: задача анализа, импульсные воздействия, метод статистических испытаний, пуассоновская мера, пуассоновский поток событий, спектральный метод, стохастическая система, уравнение Колмогорова – Феллера.

Введение

Для описания математических моделей различных явлений, например, процессов в технических системах (управление движущимися объектами, радиолокационные, навигационные и измерительные системы, электрические цепи с импульсными источниками), в экономических задачах (описание динамики курсов акций и макроэкономических показателей), в математической биологии и медицине (управление биомассой, действие лекарственных препаратов) широкое применение нашли стохастические дифференциальные уравнения с пуассоновской составляющей [7, 20, 32, 33, 36–39]. Такие модели называют стохастическими системами с импульсными воздействиями, а также системами со случайным периодом квантования. Наличие импульсных воздействий приводит к тому, что в

*Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 11-01-00282-а, 12-01-00490-а и 12-08-00892-а).

случайные моменты времени вектор состояния системы получает случайные приращения, образующие пуассоновский поток событий.

В работе приводятся известные формы математического описания стохастических систем рассматриваемого класса и разработанные авторами методы и алгоритмы приближенного анализа — нахождения вероятностных характеристик вектора состояния системы.

Один из предлагаемых методов — метод статистического моделирования, который состоит в моделировании решений стохастических дифференциальных уравнения и вычислении статистических оценок искомых вероятностных характеристик решения.

Другой метод — спектральный, основанный на приближенном решении интегро-дифференциального уравнения в частных производных, описывающего эволюцию плотности вероятности вектора состояния (уравнение Колмогорова – Феллера [7, 33]), с помощью представления искомой плотности вероятности в виде функционального ряда по подходящему базису.

Преимущества предлагаемых подходов состоят в простоте реализации и универсальности, а именно возможности решения задачи анализа для линейных и нелинейных, одномерных и многомерных моделей стохастических систем, для различных законов распределения величин приращений вектора состояния. Апробация предлагаемых алгоритмов проводилась на модельных и прикладных задачах. Как показали расчеты, во всех примерах получены достаточно точные оценки различных вероятностных характеристик.

Стохастические дифференциальные уравнения с пуассоновской составляющей

Многие математические модели технических и экономических систем, учитывающие воздействие шума, описываются стохастическими дифференциальными уравнениями с пуассоновской составляющей [7, 12, 13, 20, 21, 32, 33, 36–39]. Рассмотрим различные варианты описания таких моделей.

Пусть $\{\Omega, \mathfrak{F}, P\}$ — основное вероятностное пространство; $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ — неубывающий поток полных σ -подалгебр \mathfrak{F} , $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$; $(\Theta, \mathfrak{B}_\Theta)$ — измеримое пространство; \mathfrak{B}_Θ и $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$ — σ -алгебры борелевских множеств на Θ и \mathbb{R}_+ соответственно.

Приведем необходимые определения [14]. Говорят, что на пространстве $\Theta \times \mathbb{R}_+$ определена пуассоновская мера ν , если

- а) на измеримом пространстве $(\Theta, \mathfrak{B}_\Theta)$ задана некоторая конечная мера Π ;
- б) для всякого $B \in \mathfrak{B}_\Theta$ процесс

$$\nu_t(B) = \nu(B \times [0, t])$$

является однородным пуассоновским процессом с параметром $\Pi(B)$, согласованным с $\{\mathfrak{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, т.е. при $\Delta t > 0$

$$\begin{aligned} P(\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B) = 1) &= \Pi(B)\Delta t + o(\Delta t), \\ P(\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B) = 0) &= 1 - \Pi(B)\Delta t + o(\Delta t), \end{aligned} \tag{1}$$

и, кроме того, при всех t величина $\nu_t(B)$ измерима относительно σ -алгебры \mathfrak{F}_t , а приращения $\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B)$ при $\Delta t > 0$ не зависят от σ -алгебры \mathfrak{F}_t ;

в) если множества $B_1, \dots, B_n, n = 1, 2, \dots$, из \mathfrak{B}_Θ попарно не пересекаются, то процессы $\{\nu_t(B_n)\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ независимы в совокупности;

г) если множества $C_1, \dots, C_n, n = 1, 2, \dots$, из $\mathfrak{B}_\Theta \times \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}$ попарно не пересекаются, то почти наверное

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(C_n).$$

Пуассоновская мера ν однозначно определяется своей характеристической мерой Π .

Моментом остановки относительно потока $\{\mathfrak{S}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ называется такая неотрицательная случайная величина τ со значениями в \mathbb{R}_+ , что событие $\{\tau \leq t\} \in \mathfrak{S}_t$ для всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Для пуассоновской случайной меры ν существуют последовательности моментов остановки τ_k и \mathfrak{S}_{τ_k} -измеримых величин $\theta_k \in \Theta$ таких, что [9]

$$\nu(C) = \sum_k I_{\{(\theta_k, \tau_k) \in C\}}, \quad C \in \mathfrak{B}_\Theta \times \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+},$$

где $I_{\{\cdot\}}$ — индикаторная функция.

В более общем случае процесс $\nu_t(B)$ может быть неоднородным, тогда условие (1) следует переписать в виде

$$P(\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B) = 1) = \Pi(B, t)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$P(\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B) = 0) = 1 - \Pi(B, t)\Delta t + o(\Delta t).$$

Далее, не ограничивая общности, будем полагать, что $t \in [t_0, T]$. Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ заданы:

а) поток σ -алгебр $\{\mathfrak{S}_t\}_{t \in [t_0, T]}$;

б) s -мерный стандартный винеровский процесс $w(t)$, согласованный с $\{\mathfrak{S}_t\}_{t \in [t_0, T]}$, приращения которого $w(t + \Delta t) - w(t)$ при $\Delta t > 0$ не зависят от σ -алгебры \mathfrak{S}_t ;

в) \mathfrak{S}_0 -измеримый m -мерный случайный вектор y_0 , независимый с $w(t)$, причем $\langle |y_0|^2 \rangle < \infty$ (здесь и далее $\langle \cdot \rangle$ означает математическое ожидание).

Задача Коши для стохастического дифференциального уравнения с пуассоновской составляющей формулируется следующим образом [14]: найти m -мерный случайный процесс $y(t)$ ($y \in \mathbb{R}^m$ — вектор состояния стохастической системы), согласованный с потоком σ -алгебр $\{\mathfrak{S}_t\}$, имеющий стохастический дифференциал

$$dy(t) = f(t, y(t))dt + \sum_{j=1}^s \sigma_{\cdot j}(t, y(t))dw_j(t) + \int_{\Theta} c(t, y(t^-), \theta)\nu(d\theta \times dt), \quad y(t_0) = y_0, \quad (2)$$

где $w_j(t)$ — независимые стандартные винеровские процессы, образующие процесс $w(t)$; ν — пуассоновская мера на $\Theta \times [t_0, T]$ с характеристической мерой Π , заданной неотрицательной функцией $\pi(\theta, t, y): \Theta \times [t_0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_+$; $f(t, y): [t_0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $c(t, y, \theta): [t_0, T] \times \mathbb{R}^m \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}^m$ — m -мерные вектор-функции; $\sigma(t, y): [t_0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times s}$ — матричная функция $m \times s$; $\sigma_{\cdot j}(t, y)$ — j -й столбец матрицы $\sigma(t, y)$; $y_0 \in \mathbb{R}^m$ — случайный вектор начальных значений.

Существует интегральная форма записи задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения с пуассоновской составляющей

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^t \sigma_{\cdot j}(\tau, y(\tau))dw_j(\tau) + \int_{t_0}^t \int_{\Theta} c(\tau, y(\tau^-), \theta)\nu(d\theta \times d\tau). \quad (3)$$

Так как решением уравнений (2) и (3) является непрерывный справа процесс без разрывов второго рода, $y(t^-)$ обозначает значение решения в точке t слева.

Если стохастический интеграл по винеровскому процессу $w(t)$ в (3) понимается в смысле Ито, то уравнения (2) и (3) являются стохастическими дифференциальными уравнениями в смысле Ито, если стохастический интеграл по винеровскому процессу $w(t)$ в (3) понимается в смысле Стратоновича, то и уравнения (2) и (3) — это уравнения в смысле Стратоновича.

Связь между интегралами Ито и Стратоновича выражается формулой

$$\int_{t_0}^t \sigma_{\cdot j}(\tau, y(\tau)) dw_j(\tau) = \int_{t_0}^t \sigma_{\cdot j}(\tau, y(\tau)) \circ dw_j(\tau) - \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \sum_{k=1}^m \frac{\partial \sigma_{\cdot j}(\tau, y(\tau))}{\partial y_k} \sigma_{kj}(\tau, y(\tau)) d\tau,$$

в которой

$$\int_{t_0}^t \sigma_{\cdot j}(\tau, y(\tau)) \circ dw_j(\tau)$$

обозначает интеграл Стратоновича. Поэтому уравнения (2) и (3) в смысле Ито соответствуют следующим уравнениям в смысле Стратоновича:

$$dy(t) = a(t, y(t))dt + \sum_{j=1}^s \sigma_{\cdot j}(t, y(t)) \circ dw_j(t) + \int_{\Theta} c(t, y(t^-), \theta) \nu(d\theta \times dt), \quad y(t_0) = y_0,$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t a(\tau, y(\tau))d\tau + \sum_{j=1}^s \int_{t_0}^t \sigma_{\cdot j}(\tau, y(\tau)) \circ dw_j(\tau) + \int_{t_0}^t \int_{\Theta} c(\tau, y(\tau^-), \theta) \nu(d\theta \times d\tau),$$

где

$$a_i(t, y) = f_i(t, y) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^m \frac{\partial \sigma_{ij}(t, y)}{\partial y_k} \sigma_{kj}(t, y).$$

Таким образом, всегда возможен переход от уравнения в смысле Ито к уравнению в смысле Стратоновича и наоборот. Отметим, что в случае, если матрица $\sigma(t, y)$ не зависит от y , уравнение в смысле Ито и соответствующее ему уравнение в смысле Стратоновича совпадают.

Характеристическая мера Π , задающая пуассоновскую случайную меру ν , определяется через функцию $\pi(\theta, t, y)$ следующим образом:

$$\Pi(B, t, y(t^-)) = \int_B \pi(\theta, t, y(t^-)) d\theta, \quad B \in \Theta.$$

Заметим, что здесь условие (1), определяющее меру ν , задается в виде

$$\begin{aligned} P(\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B) = 1 \mid y(t^-) = y) &= \Pi(B, t, y) \Delta t + o(\Delta t), \\ P(\nu_{t+\Delta t}(B) - \nu_t(B) = 0 \mid y(t^-) = y) &= 1 - \Pi(B, t, y) \Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Если же $\Pi(B, t, y) = \Pi(B)$, т.е. в случае, когда $\nu_t(B)$ — однородный пуассоновский процесс, не зависящий от $y(t)$, то и $\pi(\theta, t, y) = \pi(\theta)$. Разумеется, возможны варианты, когда $\Pi(B, t, y) = \Pi(B, t)$ или $\Pi(B, t, y) = \Pi(B, y)$.

Стохастический интеграл по пуассоновской мере ν

$$\int_{t_0}^t \int_{\Theta} c(\tau, y(\tau^-), \theta) \nu(d\theta \times d\tau) = \sum_{\tau_k < t} c(\tau_k, y(\tau_k^-), \theta_k),$$

если

$$\sum_k |c(\tau_k, y(\tau_k^-), \theta_k)| < \infty,$$

как функция верхнего предела представляет собой случайный процесс, который изменяется скачком в случайные моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k, \dots$ на случайные значения $c(\tau_1, y(\tau_1^-), \theta_1), \dots, c(\tau_k, y(\tau_k^-), \theta_k), \dots$. Распределение моментов скачков τ_k и величин θ_k определяются характеристической мерой Π .

Если в уравнениях (2) и (3) отсутствует пуассоновская составляющая ($c(t, y, \theta) \equiv 0$), то процесс $y(t)$ называется *диффузионным*. Если отсутствует гауссовская составляющая ($\sigma(t, y) \equiv 0$), то процесс $y(t)$ называется *скачкообразным*.

При условии, что все элементы функции $f(t, y)$ в (2) дифференцируемы, а все элементы матрицы $\sigma(t, y)$ дважды дифференцируемы по y , то для процесса y , удовлетворяющего уравнению (2), переходная функция $p(t, y | t_0, y_0)$ как функция t и y удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова [20]:

$$\frac{\partial p(t, y | t_0, y_0)}{\partial t} = \mathcal{K}p(t, y | t_0, y_0) \tag{4}$$

с начальным условием

$$\lim_{t \rightarrow t_0} p(t, y | t_0, y_0) = \delta(y - y_0),$$

где $\delta(y)$ — дельта-функция.

Оператор \mathcal{K} определяется выражением $\mathcal{K} = \mathcal{A} + \mathcal{M}$, в котором

$$\begin{aligned} \mathcal{A}p(y) &= - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial y_i} [f_i(t, y)p(y)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [g_{ij}(t, y)p(y)], \\ \mathcal{M}p(y) &= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{\Theta} p(z) (\delta(y - z - c(t, z, \theta)) - \delta(y - z)) \pi(\theta, t, z) d\theta dz, \end{aligned} \tag{5}$$

где $g_{ij}(t, y)$ — элементы матрицы диффузии $g(t, y) = \sigma(t, y)\sigma^T(t, y)$. Операторы \mathcal{K} , \mathcal{A} , \mathcal{M} называют *прямыми производящими операторами* процесса $y(t)$.

Обратные производящие операторы \mathcal{K}^* , \mathcal{A}^* , \mathcal{M}^* процесса $y(t)$ имеют вид $\mathcal{K}^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{M}^*$, где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^*p(y) &= \sum_{i=1}^m f_i(t, y) \frac{\partial p(y)}{\partial y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m g_{ij}(t, y) \frac{\partial^2 p(y)}{\partial y_i \partial y_j}, \\ \mathcal{M}^*p(y) &= \int_{\Theta} (p(y + c(t, y, \theta)) - p(y)) \pi(\theta, t, y) d\theta. \end{aligned}$$

С помощью непосредственной проверки можно показать, что прямые и обратные операторы сопряжены между собой, т.е. для произвольной области V пространства \mathbb{R}^m , в которой элементы функции $f(t, y)$ дифференцируемы, элементы матрицы $\sigma(t, y)$ дважды дифференцируемы по координатам вектора y , справедливо следующее равенство [20]:

$$\int_V u(y) \mathcal{K}v(y) dy = \int_V v(y) \mathcal{K}^*u(y) dy,$$

где $u(y)$ и $v(y)$ — произвольные скалярные функции, из которых хотя бы одна вместе со своими первыми производными равна нулю на границе области V .

Приведенные выше условия вносят слишком много ограничений при решении прикладных задач. Вопросы, связанные с ослаблением условий, рассмотрены, например, в [8], а решение уравнения (4) можно понимать в обобщенном смысле [28] как элемент пространства $L_1([t_0, T] \times \mathbb{R}^m)$, $L_2([t_0, T] \times \mathbb{R}^m)$ или $W_2^{1,1}([t_0, T] \times \mathbb{R}^m)$ при фиксированных t_0 и y_0 .

Во многих инженерных задачах модели, учитывающие воздействие шума, описываются стохастическими дифференциальными уравнениями с пуассоновской составляющей в другой записи. Так, в работах [21, 33] рассматривается задача Коши для стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dy(t) = f(t, y(t))dt + \sigma(t, y(t))dw(t) + dq(t), \quad y(t_0) = y_0, \quad (6)$$

где наряду с уже введенными обозначениями $q(t)$ — общий (обобщенный, составной) пуассоновский процесс, заданный в форме

$$q(t) = \sum_{k=1}^{p(t)} \theta_k.$$

Здесь $p(t)$ — пуассоновский процесс, θ_k — независимые случайные величины из \mathbb{R}^m , распределение которых задано плотностью вероятности $\psi(\tau_k, \theta)$, т.е. вектор состояния y получает случайные приращения в моменты времени τ_1, τ_2, \dots , образующие пуассоновский поток событий:

$$y(\tau_k) = y(\tau_k^-) + \theta_k.$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности $\psi(\tau_k, y | z)$, характеризующая распределение $y(\tau_k)$ при условии $y(\tau_k^-) = z$. В частном случае $\psi(\tau_k, y | z) = \psi(\tau_k, y - z)$. Пуассоновский поток событий и, следовательно, пуассоновский процесс $p(t)$ определяется интенсивностью $\lambda(t, y)$:

$$\begin{aligned} P(p(t + \Delta t) - p(t) = 1 | y(t^-) = y) &= \lambda(t, y)\Delta t + o(\Delta t), \\ P(p(t + \Delta t) - p(t) = 0 | y(t^-) = y) &= 1 - \lambda(t, y)\Delta t + o(\Delta t). \end{aligned}$$

Математическая модель стохастических систем с разрывами траекторий, образующими пуассоновский поток событий, вида (6), может быть представлена как (2), если

$$\begin{aligned} \Theta \subseteq \mathbb{R}^m, \quad p(t) = \nu_t(\Theta), \quad \pi(\theta, t, z) &= \lambda(t, z)\psi(t, z + \theta | z), \\ \Pi(\Theta, t, y) &= \lambda(t, y), \quad c(t, y, \theta) = \theta. \end{aligned} \quad (7)$$

Если в модели (2) функция $c(t, y, \theta)$ задана иначе, нежели в (7), то в модели (6) это можно учесть, например, с помощью введения дополнительного коэффициента при слагаемом $dq(t)$ — функции переменных t и y , или с помощью переопределения плотности вероятности $\psi(t, y | z)$.

Пуассоновская составляющая $dq(t)$ может быть формально записана в виде [7, 33]

$$dq(t) = \sum_k \theta_k \delta(t - \tau_k) dt,$$

где $\delta(t)$ — асимметричная дельта-функция. Существуют и другие формы записи математической модели систем с разрывами траекторий, образующими пуассоновский поток событий [37, 40], но далее они не используются.

Если задана плотность вероятности $\varphi_0(y)$ случайного вектора начальных значений y_0 , то плотность вероятности $\varphi(t, y)$ вектора состояния (в случае, если такая плотность существует) удовлетворяет уравнению Колмогорова – Феллера — интегро-дифференциальному уравнению в частных производных, следующему из (4) с учетом (7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial y_i} [f_i(t, y) \varphi(t, y)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [g_{ij}(t, y) \varphi(t, y)] - \\ & - \lambda(t, y) \varphi(t, y) + \int_{\mathbb{R}^m} \lambda(t, z) \psi(t, y | z) \varphi(t, z) dz, \quad \varphi(t_0, y) = \varphi_0(y). \end{aligned} \quad (8)$$

Решение уравнения (8), как и уравнения (4), можно понимать в обобщенном смысле.

Задача анализа стохастических систем с разрывами траекторий заключается в нахождении вероятностных характеристик вектора состояния (плотности вероятности, моментных характеристик) в соответствии с заданной математической моделью.

Статистический алгоритм численного решения стохастических систем с разрывами траекторий

Статистический алгоритм численного решения стохастических систем с разрывами траекторий должен в себя включать: моделирование моментов разрыва траекторий, моделирование величины скачка, а также вычисление между скачками численного решения стохастического дифференциального уравнения с непрерывными траекториями.

В работах [1, 2, 5] рассмотрены алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских полей, которые могут быть применены для моделирования пуассоновской случайной меры. Сравнение разных алгоритмов моделирования пуассоновской меры проведено в работе [1].

Опишем статистический алгоритм моделирования стохастических систем с разрывами траекторий.

В рассматриваемом случае распределение моментов разрыва траекторий определяется интенсивностью $\lambda(t, y)$ пуассоновского процесса $p(t)$. Так как интенсивности зависят от времени, то моделирование моментов смены структуры будет осуществляться по методу «максимального сечения» [1, 10, 16]. Применение этого метода требует выполнения условий $\lambda(t, y) \leq \bar{\lambda} = \text{const}$, на всем интервале интегрирования $[t_0, T]$.

Статистический алгоритм моделирования траекторий случайного процесса $y(t)$ для стохастических систем с разрывами траекторий

- 0) $k := 0$; $stop := 0$; $\tau_k := 0$; моделируем y_k согласно заданному y_0 ;
- 1) моделируем возможный момент разрыва траекторий $\tau_{k+1} = \tau_k + \xi$, где ξ — случайная величина с плотностью

$$p_\xi(x) = \bar{\lambda} e^{-\bar{\lambda}x},$$

по формуле $\xi = -\ln \alpha / \bar{\lambda}$, где α — равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ случайная величина; если $\tau_{k+1} > T$, то $\tau_{k+1} := T$ и $stop := 1$;

2) решаем стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Ито

$$y(t) = y(\tau_k) + \int_{\tau_k}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau + \int_{\tau_k}^t \sigma(\tau, y(\tau)) dw(\tau) \quad (9)$$

или эквивалентное стохастическое дифференциальное уравнение в смысле Стратоновича

$$y(t) = y(\tau_k) + \int_{\tau_k}^t a(\tau, y(\tau)) d\tau + \int_{\tau_k}^t \sigma(\tau, y(\tau)) \circ dw(\tau) \quad (10)$$

на интервале $[\tau_k, \tau_{k+1}]$ соответствующим численным методом [34] с шагом h и находим y_{k+1} — решение системы в момент τ_{k+1} ; если $stop = 1$, то процесс моделирования завершается;

- 3) проверяем условие разрыва: если $\alpha_1 \leq \lambda(\tau_{k+1}, y_{k+1})/\bar{\lambda}$, где α_1 — равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ случайная величина, то переходим к п. 4; иначе переходим к п. 5;
- 4) моделируем случайную величину y согласно плотности $\psi(t, y | y_{k+1})$ и полагаем $y_{k+1} := y$; или моделируем величину скачка θ_{k+1} согласно плотности $\psi(t, \theta)$ и полагаем $y_{k+1} := y_{k+1} + \theta_{k+1}$;
- 5) если $\tau_{k+1} \neq T$, то $k := k + 1$ и переходим к п. 1, иначе процесс моделирования завершается.

Замечания.

1. Пункт 3 в алгоритме будет отсутствовать, если интенсивность λ постоянна, так как проверяемое условие будет всегда истинно.
2. Выбор численного метода решения конкретного стохастического дифференциального уравнения или систем таких уравнений и шага интегрирования h определяются видом этой системы и требуемой точностью вычисления вероятностных характеристик выходных процессов.
3. Сетка по времени $\{t_k\}$ является суперпозицией равномерной сетки с шагом h и моментов разрыва.
4. Метод «максимального сечения» предполагает моделирование времени $\bar{\tau}$, через которое произойдет разрыв траектории, по следующему правилу:

$$\bar{\tau} = \zeta_N, \quad N = \min \left\{ n : \alpha_n \leq \frac{\lambda(\bar{t} + \zeta_n)}{\bar{\lambda}} \right\}, \quad \zeta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k,$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотностью $p_\xi(x)$ (см. п. 1 алгоритма); $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ — последовательность независимых равномерно распределенных на интервале $(0, 1)$ случайных величин; \bar{t} — начальный момент времени или предыдущий момент разрыва.

Вместо описанного подхода можно использовать более экономичный *модифицированный метод «максимального сечения»*, согласно которому

$$N = \min \left\{ n : 1 - \alpha > \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\lambda(\bar{t} + \zeta_i)}{\bar{\lambda}} \right) \right\},$$

где α — равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ случайная величина [5].

Использование модифицированного метода «максимального сечения» сокращает время моделирования неоднородного пуассоновского процесса (последовательности моментов разрывов) примерно на 10% и снижает конструктивную размерность алгоритма, связанную с многомерной равномерностью используемых псевдослучайных чисел [2, 29].

Определение. Численный метод *сходится* на решении задачи Коши для (10) с порядком p в среднеквадратическом смысле, если

$$\max_{1 \leq k \leq K} \langle |y(t_k) - y_k|^2 \mid y(t_0) = y_0 \rangle = O(h^p), \quad h \rightarrow 0,$$

где y_k — численное решение в момент времени t_k , $t_k = t_0 + kh$, h — постоянный шаг интегрирования, $t_K = T$.

Определение. Численный метод *слабо сходится* на решении задачи Коши для (10) с порядком p , если для любой достаточно гладкой функции $f(y)$

$$\max_{1 \leq k \leq K} |\langle f(y(t_k)) \mid y(t_0) = y_0 \rangle - \langle f(y_k) \mid y(t_0) = y_0 \rangle| = O(h^p), \quad h \rightarrow 0.$$

Существует много численных методов решения задачи Коши для стохастических дифференциальных уравнений. В работе [4] для численного решения уравнения (10) в смысле Стратоновича построено семейство численных методов. При численных расчетах использовался устойчивый метода из этого семейства:

$$\begin{aligned} y_{n+1} = y_n + \left(I - \frac{h}{2} \frac{\partial a(t_n, y_n)}{\partial y} \right)^{-1} \frac{h}{2} (a(t_n, y_n) + a(t_n, y_{n+1}^p)) + \\ + \frac{\sqrt{h}}{2} (\sigma(t_n, y_{n+1}^p) + \sigma(t_n, y_n)) \zeta_n, \quad y_{n+1}^p = y_n + \sqrt{h} \sigma(t_n, y_n) \zeta_n, \end{aligned} \quad (11)$$

где y_n — значение приближенного решения уравнения (10) в узле сетки по времени $\{t_n\}$; I — единичная матрица $m \times m$; $h = t_{n+1} - t_n$ — шаг интегрирования в узле t_{n+1} , $\zeta_n = [\zeta_{1n} \dots \zeta_{sn}]^T$ — вектор независимых между собой случайных величин, имеющих нормальное распределение с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями. Сетка $t_0 < t_1 < \dots < t_{n_T} = T$ на отрезке $[t_0, T]$ строится для каждой траектории численного решения и включает все моменты скачков.

Нормальные случайные величины ζ_{jn} с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями моделировались по формуле

$$\zeta_{jn} = \sqrt{-2 \ln \beta_1} \cos(2\pi\beta_2), \quad j = 1, \dots, s.$$

Для моделирования α , β_1 , β_2 — равномерных на интервале $(0, 1)$ случайных величин (различных для всех j) — использовался датчик псевдослучайных чисел RAND [10].

Этот метод имеет первый порядок среднеквадратической и слабой сходимости для произвольных систем стохастических дифференциальных уравнений и второй порядок — в случае систем со скалярным шумом ($s = 1$) или когда $\sigma(t, y)$ не зависит от y [34].

Для линейных систем с аддитивным шумом метод является *асимптотически несмещенным с любым шагом h* .

При вычислении вероятностных характеристик выходных процессов будем использовать следующие обозначения: N — общее число моделируемых траекторий (объем выборки), h — шаг численного метода, h_g — шаг гистограммы, n_g — число узлов гистограммы.

Погрешность оценки вероятностных характеристик решения складывается из ошибки численного метода решения задачи Коши для стохастического дифференциального уравнения и статистической ошибки. Аналогично работе [6] можно показать, что если используемый численный метод решения стохастических дифференциальных уравнений имеет p -й порядок слабой сходимости, то при вычислении функционалов от решения условно оптимальным является число испытаний, вычисленное по формуле

$$N = O(h^{-2p}),$$

а при вычислении гистограммы — по формуле

$$n_g = O(N^{1/3}), \quad N = O(h^{-3p}).$$

В разделе численных экспериментов рассмотрены две задачи с известными аналитическими решениями и две задачи их радиотехники, описывающие воздействие импульсов на электрические цепи. При решении методом статистического моделирования оценки функционалов от решения и гистограммы вычислялись одновременно. Оптимальными параметрами для получения наилучшей оценки гистограммы при объеме выборки $N = 10^6$ являются $h = 10^{-2}$, $n_g = 10^2$. Дальнейшее уменьшение шага гистограммы или шага численного метода точность вычисления гистограммы не увеличивает. Приводимые в таблицах результаты численных экспериментов подтверждают сделанные предположения и даже демонстрируют более высокую точность вычисления известных вероятностных характеристик решения тестовых примеров.

Спектральный метод анализа стохастических систем с разрывами траекторий

Спектральный метод анализа стохастических систем базируется на применении спектральной формы математического описания систем управления [30]. В основе этого подхода лежит представление функций их спектральными характеристиками — упорядоченными совокупностями коэффициентов разложения в ряды по подходящей системе ортонормированных или биортонормированных функций. Применение спектральной формы математического описания позволяет перейти от операторных уравнений для искомым функций (в данном случае интегро-дифференциального уравнения (8)) к алгебраическим (для коэффициентов разложения), которые представляются в матричной форме, причем специфика задач и формирования систем ортонормированных функций приводит к необходимости использовать базовый математический аппарат теории многомерных матриц, который в достаточном объеме изложен в [18, 19]. Там же содержатся определения спектральных характеристик и спектральных преобразований, их свойства.

Для применения спектральной формы математического описания удобнее использовать операторную форму записи уравнения (8):

$$\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, y) - \mathcal{L}\varphi(t, y) + \mathcal{H}\varphi(t, y), \quad \varphi(t_0, y) = \varphi_0(y), \quad (12)$$

где линейные операторы \mathcal{A} , \mathcal{L} и \mathcal{H} определяются выражениями

$$\mathcal{A}\varphi(t, y) = - \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial y_i} [f_i(t, y)\varphi(t, y)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [g_{ij}(t, y)\varphi(t, y)],$$

$$\mathcal{L}\varphi(t, y) = \lambda(t, y)\varphi(t, y), \quad \mathcal{H}\varphi(t, y) = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda(t, z)\psi(t, y | z)\varphi(t, z) dz.$$

Оператор \mathcal{A} называют оператором Фоккера–Планка–Колмогорова, \mathcal{L} — оператор умножения на функцию $\lambda(t, y)$, \mathcal{H} — оператор Фредгольма с ядром $\lambda(t, z)\psi(t, y | z)$. Заметим, что $-\mathcal{L} + \mathcal{H} = \mathcal{M}$ при выполнении условий (7) (оператор \mathcal{M} определен в (5)).

Пусть $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$ — ортонормированный базис пространства $L_2([t_0, T] \times \mathbb{R}^m)$, причем функции $e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)$ порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ и $\{p(i_1, \dots, i_m, y)\}_{i_1, \dots, i_m=0}^\infty$ пространств $L_2([t_0, T])$ и $L_2(\mathbb{R}^m)$ соответственно, т.е.

$$e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y) = q(i_0, t) \cdot p(i_1, \dots, i_m, y), \quad i_0, i_1, \dots, i_m = 0, 1, 2, \dots$$

Напомним [17–19], что спектральной характеристикой функции $z(t, y)$, определенной относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$, называется $(m + 1)$ -мерная бесконечная матрица $Z(m + 1, 0)$ с элементами

$$\begin{aligned} z_{i_0 i_1 \dots i_m} &= (e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y), z(t, y))_{L_2([t_0, T] \times \mathbb{R}^m)} = \\ &= \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^m} e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y) z(t, y) dt dy, \quad i_0, i_1, \dots, i_m = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

т.е. $z_{i_0 i_1 \dots i_m}$ — коэффициенты разложения функции $z(t, y)$ в ряд по функциям базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$, обозначение: $\mathbb{S}[z(t, y)] = Z(m + 1, 0)$. Спектральная характеристика плотности вероятности называется *обобщенной характеристической функцией*.

Применяя спектральное преобразование \mathbb{S} (отображение, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику) к левой и правой частям уравнения (12), получаем

$$\mathbb{S} \left[\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} \Big|_{\varphi(t_0, y) = \varphi_0(y)} \right] = \mathbb{S}[\mathcal{A}\varphi(t, y)] - \mathbb{S}[\mathcal{L}\varphi(t, y)] + \mathbb{S}[\mathcal{H}\varphi(t, y)],$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \left[\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} \Big|_{\varphi(t_0, y) = \varphi_0(y)} \right] &= - \sum_{i=1}^m \mathbb{S} \left[\frac{\partial}{\partial y_i} [f_i(t, y) \varphi(t, y)] \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^m \mathbb{S} \left[\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [g_{ij}(t, y) \varphi(t, y)] \right] - \\ &- \mathbb{S} \left[\lambda(t, y) \varphi(t, y) \right] + \mathbb{S} \left[\int_{\mathbb{R}^m} \lambda(t, z) \psi(t, y | z) \varphi(t, z) dz \right]. \end{aligned}$$

Согласно свойствам спектрального преобразования функций и линейных операторов имеем

$$\mathbb{S} \left[\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} \Big|_{\varphi(t_0, y) = \varphi_0(y)} \right] = P(m + 1, m + 1) \cdot \Phi(m + 1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(m, 0),$$

где

$$P(m + 1, m + 1) = \mathcal{P}(m + 1, m + 1) + (q(1, 0; t_0) \cdot q^T(1, 0; t_0)) \otimes E(m, m).$$

В этих соотношениях $\mathcal{P}(m + 1, m + 1)$ — спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени [19], определенная относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$; $\Phi(m + 1, 0)$ — спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t, y)$ вектора состояния y (обобщенная характеристическая функция), опреде-

ленная относительно той же базисной системы; $E(m, m)$ — $2m$ -мерная единичная матрица; $q(1, 0; t_0)$ — матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ при $t = t_0$:

$$q(1, 0; t_0) = [q(0, t_0) \quad q(1, t_0) \quad q(2, t_0) \quad \dots]^T.$$

Через $\Phi_0(m, 0)$ обозначена спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(y)$ начального состояния y_0 , определенная относительно базисной системы $\{p(i_1, \dots, i_m, y)\}_{i_1, \dots, i_m=0}^\infty$. Это означает, что $\Phi_0(m, 0)$ — m -мерная бесконечная матрица с элементами

$$\begin{aligned} \varphi_{0 i_1 \dots i_m} &= (p(i_1, \dots, i_m, y), \varphi_0(y))_{L_2(\mathbb{R}^m)} = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} p(i_1, \dots, i_m, y) \varphi_0(y) dy, \quad i_1, \dots, i_m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Далее,

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}\varphi(t, y)] = A(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0),$$

$$\mathbb{S}[\mathcal{L}\varphi(t, y)] = \Lambda(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0), \quad \mathbb{S}[\mathcal{H}\varphi(t, y)] = H(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0),$$

где $A(m+1, m+1)$, $\Lambda(m+1, m+1)$ и $H(m+1, m+1)$ — спектральные характеристики линейных операторов \mathcal{A} , \mathcal{L} и \mathcal{H} соответственно.

Спектральная характеристика линейного оператора \mathcal{A} — это $2(m+1)$ -мерная бесконечная матрица $A(m+1, m+1)$, элементы которой определяются соотношением

$$\begin{aligned} a_{i_0 i_1 \dots i_m j_0 j_1 \dots j_m} &= (e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y), \mathcal{A}e(j_0, j_1, \dots, j_m, t, y))_{L_2([t_0, T] \times \mathbb{R}^m)} = \\ &= \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^m} e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y) \mathcal{A}e(j_0, j_1, \dots, j_m, t, y) dt dy, \end{aligned} \quad (15)$$

$$i_0, i_1, \dots, i_m, j_0, j_1, \dots, j_m = 0, 1, 2, \dots$$

Спектральные характеристики $\Lambda(m+1, m+1)$ и $H(m+1, m+1)$ линейных операторов \mathcal{L} и \mathcal{H} определяются аналогично.

Одно из преимуществ спектральной формы математического описания систем управления состоит в развитом алгоритмическом обеспечении: явным и рекуррентным формулам для расчета спектральных характеристик линейных операторов, соответствующих элементарным звеньям систем управления, для различных базисных систем [18, 19, 22, 24, 26, 27, 30, 31]. Это операторы умножения, дифференцирования и интегрирования. Поэтому спектральную характеристику $A(m+1, m+1)$ линейного оператора \mathcal{A} целесообразно представлять следующим образом [19]:

$$\begin{aligned} A(m+1, m+1) &= - \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i(m+1, m+1) \cdot F_i(m+1, m+1) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \mathcal{P}_{ij}(m+1, m+1) \cdot G_{ij}(m+1, m+1), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\mathcal{P}_i(m+1, m+1)$ и $\mathcal{P}_{ij}(m+1, m+1)$ — спектральные характеристики операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам y_i и y_j , а через $F_i(m+1, m+1)$ и $G_{ij}(m+1, m+1)$ обозначены спектральные характеристики операторов умножения на функции $f_i(t, y)$ и $g_{ij}(t, y)$ соответственно; $i, j = 1, 2, \dots, m$. Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} & P(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(m, 0) = \\ & = A(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0) - L(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0) + \\ & \quad + H(m+1, m+1) \cdot \Phi(m+1, 0), \end{aligned} \quad (17)$$

или

$$\begin{aligned} & (P(m+1, m+1) - A(m+1, m+1) + L(m+1, m+1) - \\ & \quad - H(m+1, m+1)) \cdot \Phi(m+1, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(m, 0). \end{aligned}$$

Эти уравнения будем называть, как и в случае отсутствия пуассоновской составляющей, *уравнениями обобщенной характеристической функции* [17–19]. Они представляют собой матричную запись системы линейных неоднородных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются элементы $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_m}$ матрицы $\Phi(m+1, 0)$ — коэффициенты разложения плотности вероятности $\varphi(t, y)$ в функциональный ряд по функциям базисной системы $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^{\infty}$. Их решение записывается в форме

$$\begin{aligned} \Phi(m+1, 0) = & (P(m+1, m+1) - A(m+1, m+1) + \\ & + L(m+1, m+1) - H(m+1, m+1))^{-1} \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(m, 0)). \end{aligned} \quad (18)$$

С учетом (16) это решение можно представить так:

$$\begin{aligned} \Phi(m+1, 0) = & \left(P(m+1, m+1) + \sum_{i=1}^m \mathcal{P}_i(m+1, m+1) \cdot F_i(m+1, m+1) - \right. \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m \mathcal{P}_{ij}(m+1, m+1) \cdot G_{ij}(m+1, m+1) + L(m+1, m+1) - \\ & \left. - H(m+1, m+1) \right)^{-1} \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(m, 0)). \end{aligned}$$

Отметим, что более детальное представление для некоторых спектральных характеристик (используемое далее в примерах), входящих в уравнения обобщенной характеристической функции, изложено в [19].

После нахождения обобщенной характеристической функции $\Phi(m+1, 0)$ плотность вероятности $\varphi(t, y)$ вектора состояния может быть представлена в виде ряда

$$\varphi(t, y) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_m} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y), \quad (t, y) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^m. \quad (19)$$

Представление решения задачи анализа стохастических систем с разрывами траекторий рядом (19) носит скорее теоретический характер. На практике получить всю совокупность коэффициентов разложения функции $\varphi(t, y)$ в общем случае вряд ли возможно. Для этого требуется, чтобы многомерная матрица

$$P(m+1, m+1) - A(m+1, m+1) + L(m+1, m+1) - H(m+1, m+1)$$

или ее сечения и структура имели специальный вид [19], например, треугольный или ленточный. Поэтому далее будем говорить о приближенном решении задачи анализа, т.е.

о представлении решения в виде частичной суммы

$$\varphi(t, y) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \cdots \sum_{i_m=0}^{L_m-1} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_m} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y), \quad (20)$$

где числа L_0, L_1, \dots, L_m — порядки усечения спектральных характеристик. Индексы в формулах (13)–(15) в этом случае принимают лишь конечное число значений: $i_0, j_0 = 0, 1, \dots, L_0 - 1$; $i_1, j_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1, \dots, i_m, j_m = 0, 1, \dots, L_m - 1$; все перечисленные спектральные характеристики будут конечными матрицами, а уравнение (17) — матричная запись системы конечного числа линейных алгебраических уравнений (число уравнений и число неизвестных: $L = L_0 \cdot L_1 \cdots L_m$).

По найденной спектральной характеристике $\Phi(m+1, 0)$ могут быть определены маргинальные плотности вероятности (при $m \geq 2$) и моментные характеристики вектора состояния с использованием свойств спектральных характеристик линейных функционалов [19, 23], при этом для определения маргинальных плотностей вероятности спектральным методом достаточно, чтобы функции базисной системы $\{p(i_1, \dots, i_m, y)\}_{i_1, \dots, i_m=0}^\infty$ порождались всевозможными произведениями функций базисных систем $\{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty, \dots, \{p_m(i_m, y_m)\}_{i_m=0}^\infty$ пространства $L_2(\mathbb{R})$, т.е.

$$p(i_1, \dots, i_m, y) = p_1(i_1, y_1) \cdots p_m(i_m, y_m), \quad i_1, \dots, i_m = 0, 1, 2, \dots$$

Алгоритм приближенного решения задачи анализа

стохастических систем с разрывами траекторий спектральным методом

1) выбрать базисные системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ и $\{p(i_1, \dots, i_m, y)\}_{i_1, \dots, i_m=0}^\infty$ (или базисные системы $\{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty, \dots, \{p_m(i_m, y_m)\}_{i_m=0}^\infty$), сформировать систему функций $\{e(i_0, i_1, \dots, i_m, t, y)\}_{i_0, i_1, \dots, i_m=0}^\infty$. Выбрать порядки усечения спектральных характеристик L_0, L_1, \dots, L_m ;

2) вычислить спектральные характеристики операторов дифференцирования по времени и координатам вектора состояния: $\mathcal{P}(m+1, m+1)$, $\mathcal{P}_i(m+1, m+1)$, $\mathcal{P}_{ij}(m+1, m+1)$, спектральные характеристики операторов умножения: $F_i(m+1, m+1)$, $G_{ij}(m+1, m+1)$, $\Lambda(m+1, m+1)$, спектральную характеристику $H(m+1, m+1)$ оператора \mathcal{H} , спектральную характеристику $\Phi_0(m, 0)$ плотности вероятности начального состояния y_0 ; сформировать матрицу-столбец $q(1, 0; t_0)$, матрицу $P(m+1, m+1)$;

3) найти решение (18) уравнения обобщенной характеристической функции;

4) представить плотность вероятности $\varphi(t, y)$ в виде (20).

В качестве базисных систем $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty, \{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty, \dots, \{p_m(i_m, y_m)\}_{i_m=0}^\infty$ могут применяться подходящие для конкретных задач системы ортонормированных функций: полиномиальные, тригонометрические, кусочно-постоянные и др. [18, 19, 22, 24–27, 30, 31].

Численное испытание алгоритмов

Рассмотрим примеры стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей, результаты их численного анализа и приближенные решения соответствующих уравнений Колмогорова – Феллера.

Пример 1. Задача Коши для скалярного стохастического дифференциального уравнения в смысле Стратоновича

$$y(t) = y_0 - \int_0^t \alpha y(\tau) d\tau + \int_0^t \sigma y(\tau) \circ dw(\tau) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} c(\theta) \nu(d\theta \times d\tau), \quad (21)$$

в котором $t \in [0, T]$; $\alpha > 0$, σ — числовые параметры, $c(\theta)$ — некоторая функция.

Задача Коши (21) решалась методом (11) при следующих условиях: $T = 5$, $\alpha = 0.55$, $\sigma = \sqrt{0.1}$, $c(\theta) = 0.5\theta$, y_0 — имеет нормальное распределение с параметрами $m_0 = 1$, $\sigma_0 = \sqrt{0.5}$ и задается соответствующей плотностью $\varphi_0(y)$. В качестве множества скачков рассматривалось одноточечное множество $\{1\}$. В этом случае пуассоновская случайная мера вырождается в пуассоновский процесс. Параметр пуассоновского процесса λ задавался равным трем, т.е. $\pi(\theta) = 3\delta(\theta - 1)$.

Математическое ожидание $m(t)$ и второй начальный момент $\mu(t)$ процесса $y(t)$ для рассматриваемой модели можно представить в форме:

$$m(t) = \left(\langle y_0 \rangle - \frac{\lambda\Delta}{a} \right) e^{-at} + \frac{\lambda\Delta}{a}, \quad \mu(t) = (\langle y_0^2 \rangle - A - B) e^{(\sigma^2 - 2a)t} + A e^{-at} + B,$$

где

$$a = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}, \quad A = \frac{2\lambda\Delta}{a - \sigma^2} \left(\langle y_0 \rangle - \frac{\lambda\Delta}{a} \right), \quad B = \frac{\lambda\Delta^2}{2a - \sigma^2} \left(\frac{2\lambda}{a} + 1 \right), \quad \Delta = c(1) = 0.5,$$

а $\langle y_0 \rangle$ и $\langle y_0^2 \rangle$ — начальные моменты соответственно первого и второго порядка начального состояния. Эти соотношения, очевидно, справедливы при $a \neq 0$, $a \neq \sigma^2$, $2a \neq \sigma^2$.

При численном решении моделировалось $N = 10^6$ траекторий. Сетка по времени представляет собой суперпозицию равномерной сетки с шагом $h = 0.01$ и моментов скачков. Для оценивания плотности вероятности строилась гистограмма, результаты расчетов приведены рис. 1.

Далее приведем уравнение Колмогорова – Феллера, соответствующее уравнению (21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} = & \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} [y\varphi(t, y)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [y^2\varphi(t, y)] - \lambda\varphi(t, y) + \\ & + \lambda \int_{\mathbb{R}} \psi(t, y - z)\varphi(t, z) dz, \quad \varphi(0, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\frac{(y-m_0)^2}{2\sigma_0^2}}, \end{aligned}$$

где $\psi(t, \Delta) = \delta(\Delta - 0.5)$ — дельта-функция, так как приращение состояния y в моменты скачков постоянно и равно $c(1) = 0.5$. Следовательно, уравнение, описывающее эволюцию плотности вероятности $\varphi(t, y)$, для этого примера имеет вид

$$\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial y} [y\varphi(t, y)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [y^2\varphi(t, y)] - \lambda\varphi(t, y) + \lambda\varphi(t, y - 0.5),$$

т.е. является уравнением в частных производных с отклоняющимся аргументом (здесь оператор \mathcal{H} — оператор сдвига).

Выберем в качестве базисной системы $\{e(i_0, i_1, t, y)\}_{i_0, i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2([0, T] \times \mathbb{R})$ систему функций $\{q(i_0, t)p(i_1, y)\}_{i_0, i_1=0}^{\infty}$, где $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$ — базисы пространств $L_2([0, T])$ и $L_2(\mathbb{R})$ соответственно, и запишем уравнение обобщенной характеристической функции:

$$(P(2, 2) - A(2, 2) + L(2, 2) - H(2, 2)) \cdot \Phi(2, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(1, 0),$$

в котором спектральная характеристика $A(2, 2)$ представляется следующим образом:

$$A(2, 2) = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot Y(2, 2) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \mathcal{P}_{11}(2, 2) \cdot Y^2(2, 2).$$

Соотношения для вычисления спектральной характеристики $P(2, 2)$ оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент и спектральных характеристик $\mathcal{P}_1(2, 2)$ и $\mathcal{P}_{11}(2, 2)$ операторов дифференцирования первого и второго порядков по переменной y :

$$P(2, 2) = (\mathcal{P}_t(1, 1) + q(1, 0; 0) \cdot q^T(1, 0; 0)) \otimes E(1, 1),$$

$$\mathcal{P}_1(2, 2) = E(1, 1) \otimes \mathcal{P}(1, 1), \quad \mathcal{P}_{11}(2, 2) = E(1, 1) \otimes \mathcal{P}^2(1, 1).$$

Здесь $\mathcal{P}_t(1, 1)$ — спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; $q(1, 0; 0)$ — матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t = 0$:

$$q(1, 0; 0) = [q(0, 0) \quad q(1, 0) \quad q(2, 0) \quad \dots]^T;$$

$\mathcal{P}(1, 1)$ — спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$; $E(1, 1)$ — двумерная единичная матрица.

Если обозначить через $Y(1, 1)$ спектральную характеристику оператора умножения на переменную y , определенную относительно базисной системы $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$, то спектральные характеристики $Y(2, 2)$ и $Y^2(2, 2)$ операторов умножения на величины y и y^2 (операторов, рассматриваемых уже на пространстве функций времени и переменной y) представляются в виде

$$Y(2, 2) = E(1, 1) \otimes Y(1, 1), \quad Y^2(2, 2) = E(1, 1) \otimes Y^2(1, 1).$$

Спектральные характеристики $F(2, 2)$ и $G(2, 2)$ операторов умножения на функции $f(t, y)$ и $g(t, y)$ соответственно (см. алгоритм приближенного решения задачи анализа стохастических систем с разрывами траекторий спектральным методом) определяются следующим образом:

$$F(2, 2) = -\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right) \cdot Y(2, 2) \quad \left(f(t, y) = -\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)y\right),$$

$$G(2, 2) = \sigma^2 \cdot Y^2(2, 2) \quad (g(t, y) = \sigma^2 y^2).$$

Спектральная характеристика $L(2, 2)$ оператора умножения на константу λ записывается в виде произведения

$$L(2, 2) = \lambda \cdot E(2, 2) = \lambda \cdot (E(1, 1) \otimes E(1, 1)),$$

где $E(2, 2)$ — четырехмерная единичная матрица, а для спектральной характеристики $H(2, 2)$ справедливо соотношение

$$H(2, 2) = \lambda \cdot (E(1, 1) \otimes H(1, 1)),$$

в котором $H(1, 1)$ — спектральная характеристика оператора сдвига, задаваемого формулой

$$\mathcal{H}\varphi(y) = \varphi(y - 0.5)$$

и рассматриваемого как оператора на множестве функций одной переменной y (такой оператор соответствует звену чистого запаздывания [30]). Спектральная характеристика $H(1, 1)$ определяется относительно системы функций $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$.

Спектральная характеристика $\Phi_0(1, 0)$ вычисляется по определению (14).

Получим решение уравнения обобщенной характеристической функции, выражая спектральную характеристику $\Phi(2, 0)$:

$$\Phi(2, 0) = (P(2, 2) - A(2, 2) + \Lambda(2, 2) - H(2, 2))^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)),$$

тогда плотность вероятности $\varphi(t, y)$ определяется по формуле обращения

$$\varphi(t, y) = \mathbb{S}^{-1}[\Phi(2, 0)] = \sum_{i_0, i_1=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1} \cdot e(i_0, i_1, t, y), \quad (t, y) \in [0, T] \times \mathbb{R},$$

где $\varphi_{i_0 i_1}$ — элементы обобщенной характеристической функции $\Phi(2, 0)$.

Используя спектральную форму математического описания можно записать выражения для спектральных характеристик математического ожидания и второго начального момента процесса $y(t)$:

$$M_1(1, 0) = (E(1, 1) \otimes Y_1(0, 1)), \quad M_2(1, 0) = (E(1, 1) \otimes Y_2(0, 1)),$$

в которых $Y_1(0, 1)$ и $Y_2(0, 1)$ — спектральные характеристики линейных функционалов [19, 23], ставящих в соответствие плотности вероятности $\varphi(y)$ соответственно первый и второй начальные моменты. Спектральные характеристики $Y_1(0, 1)$ и $Y_2(0, 1)$ равны транспонированным спектральным характеристикам функций $h_1(y) = y$ и $h_2(y) = y^2$ (перечисленные спектральные характеристики определены относительно системы функций $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$). Тогда тогда плотность вероятности $\varphi(t, y)$ определяется по формуле обращения

$$m(t) = \mathbb{S}^{-1}[M_1(1, 0)] = \sum_{i_0=0}^{\infty} m_{i_0} \cdot q(i_0, t), \quad \mu(t) = \mathbb{S}^{-1}[M_2(1, 0)] = \sum_{i_0=0}^{\infty} \mu_{i_0} \cdot q(i_0, t), \quad t \in [0, T],$$

где m_{i_0} и μ_{i_0} — элементы спектральных характеристик $M_1(1, 0)$ и $M_2(1, 0)$ соответственно.

При решении спектральным методом в качестве базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ были выбраны полиномы Лежандра [18, 19, 27, 30, 31], а в качестве базисной системы $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$ — функции Эрмита с параметрами $m = 2$ и $D = 1$ [22], порядки усечения $L_0 = L_1 = 48$. Результаты вычислений приведены на рис. 1. Оценки математического ожидания $m(t)$, второго начального момента $\mu(t)$ и дисперсии $D(t)$ приведены на рис. 2.

Дополнительно были проведены расчеты методом статистического моделирования при другом объеме выборки N и шаге интегрирования h , а также спектральным методом при других порядках усечения L_0 и L_1 . Точность оценивалась посредством сравнения моментов. Использовались два варианта для сравнения аналитического решения $\gamma_{\text{т}}(t)$ и соответствующего приближенного решения $\gamma_{\text{п}}(t)$:

$$J_1(\gamma) = \max_{t_0 \leq t \leq T} |\gamma_{\text{т}}(t) - \gamma_{\text{п}}(t)| \quad \text{и} \quad J_2(\gamma) = \left\{ \int_{t_0}^T |\gamma_{\text{т}}(t) - \gamma_{\text{п}}(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где в качестве функции $\gamma(t)$ выступают функции $m(t)$, $\mu(t)$ или $D(t)$.

Наряду с оценкой точности нахождения вероятностных характеристик будем приводить время, затрачиваемое на решение задачи (для расчетов использовался ПК с процессором Intel Core 2 Quad Q9300 2.5ГГц). Погрешности вычисления математического ожидания $m(t)$, второго начального момента $\mu(t)$ и дисперсии $D(t)$ приведены в табл. 1 и 2 (через дробь даны значения для критериев J_1 и J_2 соответственно, $t_{\text{сч}}$ — время счета). Формулы для математического ожидания и второго начального момента даны выше, а для расчета дисперсии применяется соотношение $D(t) = \mu(t) - m^2(t)$.

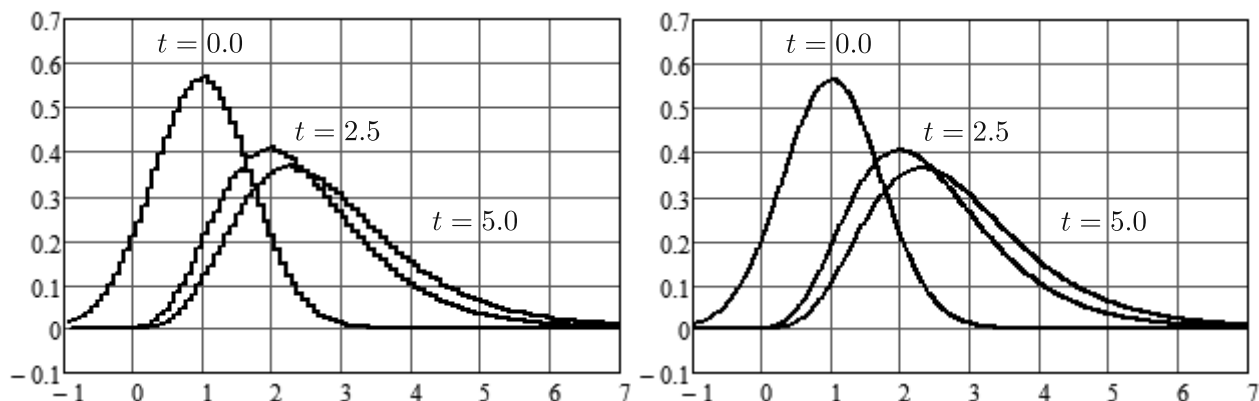


Рис. 1. Гистограмма плотности вероятности (слева) и график приближенного решения уравнения Колмогорова – Феллера (справа) в различные моменты времени.

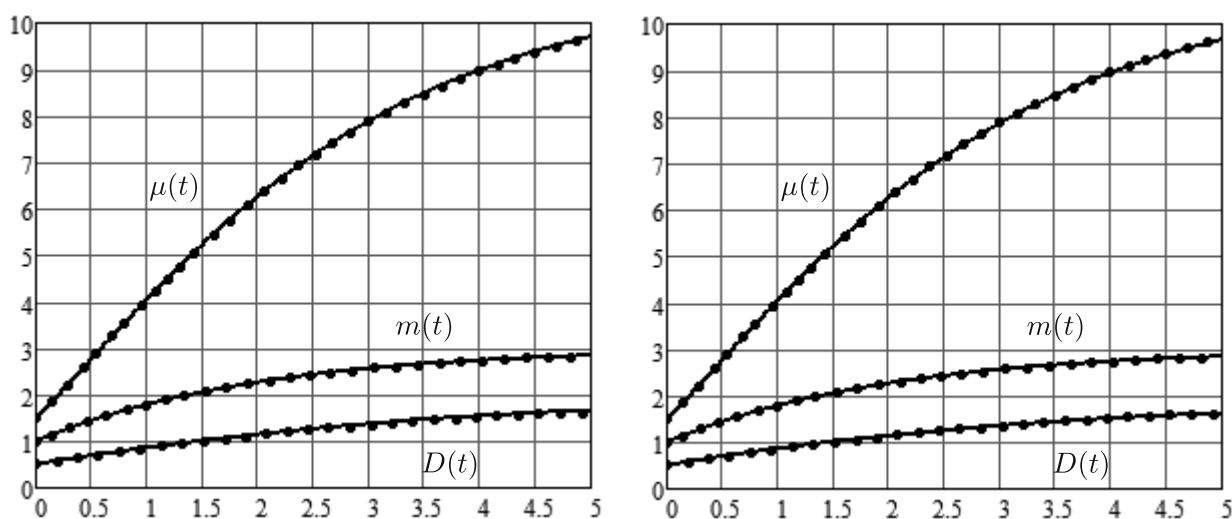


Рис. 2. Оценки математического ожидания $m(t)$, второго начального момента $\mu(t)$ и дисперсии $D(t)$ (слева – метод статистического моделирования, справа – спектральный метод). Точки соответствуют точному решению.

Таблица 1. Погрешность метода статистического моделирования при различных объеме выборки и шаге интегрирования.

N	h	$J_1(m)/J_2(m)$	$J_1(\mu)/J_2(\mu)$	$J_1(D)/J_2(D)$	$t_{сч}, c$
10^4	0.1	0.018819/0.019722	0.412820/0.505480	0.365475/0.516070	0.16
10^6	0.1	0.004732/0.007956	0.407391/0.589708	0.387952/0.552071	15.65
10^4	0.01	0.020910/0.023802	0.152162/0.130896	0.055749/0.039682	1.05
10^6	0.01	0.001968/0.001954	0.040719/0.053666	0.039505/0.049160	103.64

Таблица 2. Погрешность спектрального метода при различных усечениях спектральных характеристик.

L_0	L_1	$J_1(m)/J_2(m)$	$J_1(\mu)/J_2(\mu)$	$J_1(D)/J_2(D)$	$t_{сч}, c$
12	12	0.042893/0.082562	0.952887/1.211549	0.843862/1.138380	1
24	24	0.008058/0.011288	0.090218/0.141757	0.097300/0.123920	3
48	48	0.000851/0.001426	0.013703/0.018030	0.012615/0.016982	270

Далее приведем результаты вычислений (для плотностей вероятности и моментов, погрешности; см. рис. 3 и 4, табл. 3 и 4) при изменении постановки исходной задачи. А именно при задании интенсивности скачков как функции времени: $\lambda(t) = \lambda e^{\gamma t}$ при $\lambda = 3$ и $\gamma = -0.1$. Математическое ожидание и второй начальный момент в случае переменной интенсивности вычисляются следующим образом:

$$m(t) = \left(\langle y_0 \rangle - \frac{\lambda \Delta}{a + \gamma} \right) e^{-at} + \frac{\lambda \Delta}{a + \gamma} e^{\gamma t},$$

$$\mu(t) = (\langle y_0^2 \rangle - A - B - C) e^{(\sigma^2 - 2a)t} + A e^{(\gamma - a)t} + B e^{2\gamma t} + C e^{\gamma t},$$

где

$$A = \frac{2\lambda\Delta}{a - \sigma^2 + \gamma} \left(\langle y_0 \rangle - \frac{\lambda\Delta}{a + \gamma} \right), \quad B = \frac{2\lambda^2\Delta^2}{(2a - \sigma^2 + 2\gamma)(a + \gamma)}, \quad C = \frac{\lambda\Delta^2}{2a - \sigma^2 + \gamma},$$

при $a + \gamma \neq 0$, $a + \gamma \neq \sigma^2$, $2(a + \gamma) \neq \sigma^2$, $2a + \gamma \neq \sigma^2$.

В последнем случае, т.е. при зависимости интенсивности скачков от времени в уравнение обобщенной характеристической функции необходимо внести следующие изменения:

$$L(2, 2) = \lambda \cdot (\Lambda(1, 1) \otimes E(1, 1)), \quad H(2, 2) = \lambda \cdot (\Lambda(1, 1) \otimes H(1, 1)),$$

где $\Lambda(1, 1)$ — спектральная характеристика оператора умножения на показательную функцию $e^{\gamma t}$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$.

Пример 2. Для стационарного решения задачи Коши

$$y(t) = y_0 + \int_0^t g d\tau - \int_0^t \int_0^1 \theta y(\tau) \nu(d\theta \times d\tau), \quad y_0 > 0, \quad (22)$$

где мера ν характеризуется мерой $\Pi(B) = \int_B \kappa(1 - \theta)^{\kappa-1} d\theta$, $\Theta = [0, 1]$, $\kappa > 0$ и $g > 0$ — числовые параметры, можно показать [34], что распределение является гамма-распределением с параметрами g и κ , а плотность распределения имеет вид

$$\varphi(y) = \frac{y^\kappa e^{-y/g}}{g^{\kappa+1} \Gamma(\kappa + 1)}, \quad y > 0, \quad \Gamma(\kappa) — \text{гамма-функция.}$$

Кроме того, заметим, что в этой задаче

$$\pi(\theta) = \kappa(1 - \theta)^{\kappa-1}, \quad \lambda = \Pi([0, 1]) = \int_0^1 \kappa(1 - \theta)^{\kappa-1} d\theta = 1, \quad c(y, \theta) = \theta y.$$

При численном решении (22) параметры принимали следующие значения: $g = 1$, $\kappa = 3$. Численное решение в узле сетки t_{n+1} , $n = 0, 1, \dots, n_T$, определялось по формуле $y_{n+1} = y_{n+1}^-$, если t_{n+1} не является моментом скачка, и $y_{n+1} = y_{n+1}^-(1 - \theta_{n+1})$, если t_{n+1} является моментом скачка, где $y_{n+1}^- = y_n + g(t_{n+1} - t_n)$.

Моделирование значений случайной величины с плотностью $3(1 - x)^2$, $x \in [0, 1]$, осуществлялось по формуле $\theta_k = 1 - \sqrt[3]{\alpha_k}$, где α_k — равномерная случайная величина на отрезке $[0, 1]$. На рис. 5 приведена гистограмма численного решения в точке $t = T = 100$ при объеме выборки $N = 10^4$.

Уравнение Колмогорова–Феллера с учетом равенства $\lambda = 1$ записывается в виде

$$\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} = -g \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial y} - \varphi(t, y) + \int_{\mathbb{R}} \psi(t, y | z) \varphi(t, z) dz,$$

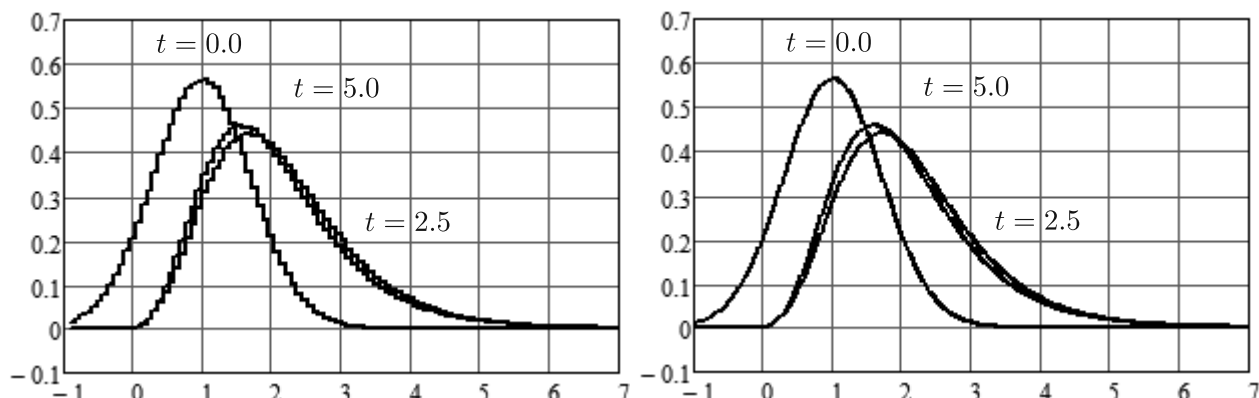


Рис. 3. Гистограмма плотности вероятности (слева) и график приближенного решения уравнения Колмогорова – Феллера (справа) в различные моменты времени.

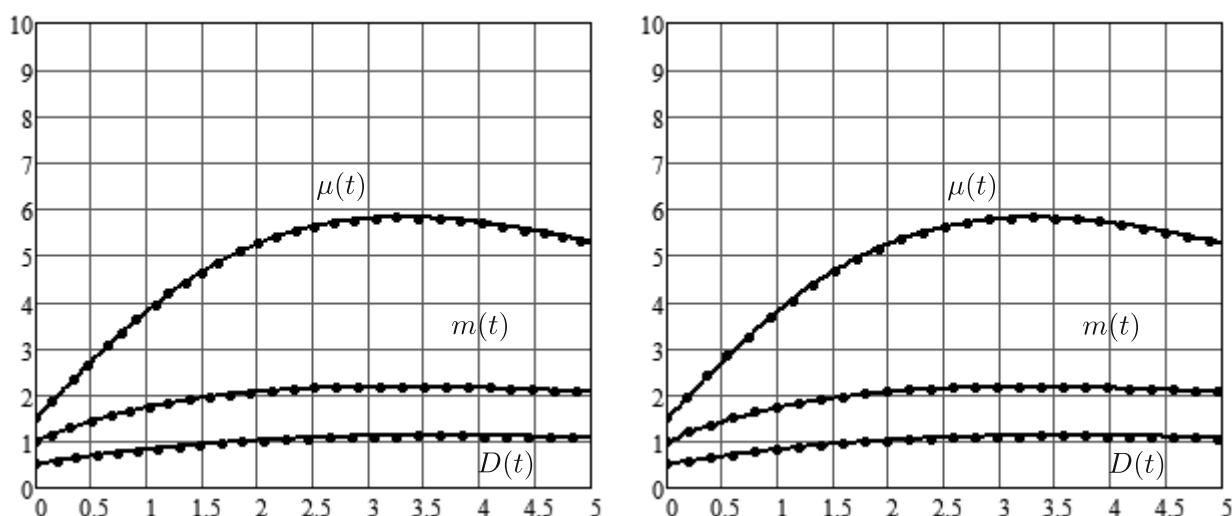


Рис. 4. Оценки математического ожидания $m(t)$, второго начального момента $\mu(t)$ и дисперсии $D(t)$ (слева – метод статистического моделирования, справа – спектральный метод). Точки соответствуют точному решению.

Таблица 3. Погрешность метода статистического моделирования при различных объеме выборки и шаге интегрирования.

N	h	$J_1(m)/J_2(m)$	$J_1(\mu)/J_2(\mu)$	$J_1(D)/J_2(D)$	$t_{сч}, c$
10^4	0.1	0.016084/0.013797	0.343884/0.380714	0.287200/0.385546	0.16
10^6	0.1	0.004944/0.006748	0.218217/0.370741	0.197471/0.343217	16.52
10^4	0.01	0.028534/0.026052	0.142953/0.130209	0.046475/0.043864	1.03
10^6	0.01	0.002182/0.001690	0.031752/0.036940	0.022988/0.034054	109.70

Таблица 4. Погрешность спектрального метода при различных усечениях спектральных характеристик.

L_0	L_1	$J_1(m)/J_2(m)$	$J_1(\mu)/J_2(\mu)$	$J_1(D)/J_2(D)$	$t_{сч}, c$
12	12	0.111634/0.148441	1.039253/1.877866	0.900067/1.359485	1
24	24	0.013271/0.020531	0.100985/0.164824	0.109795/0.130905	3
48	48	0.002251/0.002716	0.016220/0.026567	0.024692/0.036132	270

где плотность вероятности $\psi(t, y | z)$ описывает распределение случайной величины $y(t) = y(t^-)(1 - \theta)$ при условии $y(t^-) = z$, а θ задается плотностью

$$p_\theta(x) = \begin{cases} \kappa(1-x)^{\kappa-1}, & x \in [0, 1), \\ 0, & x \notin [0, 1), \end{cases}$$

т.е.

$$\psi(t, y | z) = \begin{cases} \frac{\kappa}{z} \left(1 + \frac{y-z}{z}\right)^{\kappa-1}, & y \in (0, z], \\ 0, & y \notin (0, z], \end{cases}$$

и

$$\frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} = -g \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial y} - \varphi(t, y) + \int_y^{+\infty} \frac{\kappa}{z} \left(1 + \frac{y-z}{z}\right)^{\kappa-1} \varphi(t, z) dz, \quad (23)$$

или для стационарного случая ($\varphi(t, y) = \varphi(y)$)

$$-g \frac{d\varphi(y)}{dy} - \varphi(y) + \int_y^{+\infty} \frac{\kappa}{z} \left(1 + \frac{y-z}{z}\right)^{\kappa-1} \varphi(z) dz = 0, \quad y > 0. \quad (24)$$

Запишем спектральный аналог уравнения (23) — уравнение обобщенной характеристической функции:

$$(P(2, 2) - A(2, 2) + L(2, 2) - H(2, 2)) \cdot \Phi(2, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(1, 0),$$

где

$$\begin{aligned} A(2, 2) &= -g \cdot \mathcal{P}_1(2, 2) & (F(2, 2) &= g \cdot E(2, 2)), \\ L(2, 2) &= E(2, 2), & H(2, 2) &= E(1, 1) \otimes H(1, 1). \end{aligned}$$

Здесь $H(1, 1)$ — спектральная характеристика линейного оператора, для которого справедливо представление

$$\mathcal{H}\varphi(y) = \int_y^{+\infty} \frac{\kappa}{z} \left(1 + \frac{y-z}{z}\right)^{\kappa-1} \varphi(z) dz,$$

а $\Phi_0(1, 0)$ — спектральная характеристика плотности вероятности начального состояния y_0 . Они определяются относительно базисной системы $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2([0, +\infty))$, система функций $\{e(i_0, i_1, t, y)\}_{i_0, i_1=0}^{\infty}$ — базис пространства $L_2([0, +\infty) \times [0, +\infty))$. Остальные обозначения такие же, как и в примере 1.

Спектральный аналог уравнения (24) более простой:

$$-g \cdot \mathcal{P}(1, 1) \cdot \Phi(1, 0) - \Phi(1, 0) + H(1, 1) \cdot \Phi(1, 0) = \mathcal{O}(1, 0),$$

или

$$(-g \cdot \mathcal{P}(1, 1) - E(1, 1) + H(1, 1)) \cdot \Phi(1, 0) = \mathcal{O}(1, 0). \quad (25)$$

Здесь $\mathcal{O}(1, 0)$ — нулевая матрица-столбец, $\Phi(1, 0)$ — спектральная характеристика стационарной плотности вероятности состояния y , определенная относительно базисной системы $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$, т.е.

$$\varphi(y) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \varphi_{i_1} \cdot p(i_1, y), \quad y > 0,$$

где φ_{i_1} — элементы спектральной характеристики $\Phi(1, 0)$.

Нетрудно видеть, что уравнение (24) имеет бесконечное множество решений, поскольку если решением является некоторая функция $\varphi(y)$, то и функция $C\varphi(y)$, $C \in \mathbb{R}$, также будет обращать это уравнение в тождество. Аналогичная ситуация справедлива и для уравнения (25), поэтому для его решения требуется использовать дополнительное условие — спектральный аналог соотношения

$$\int_0^{+\infty} \varphi(y) dy = 1.$$

С учетом свойств спектральных характеристик линейных функционалов [19, 23] имеем

$$J(0, 1) \cdot \Phi(1, 0) = 1, \quad (26)$$

где $J(0, 1)$ — спектральная характеристика линейного функционала \mathcal{J} , ставящего в соответствие функции $\varphi(y)$ интеграл от этой функции по множеству $[0, +\infty)$ (в предположении, что базисные системы для вычисления $J(0, 1)$ и $\Phi(1, 0)$ одинаковы). Спектральная характеристика $J(0, 1)$ равна транспонированной спектральной характеристике функции $h(y) \equiv 1$.

От решения уравнения (25) целесообразно перейти к задаче условной оптимизации:

$$\begin{cases} \|(-g \cdot \mathcal{P}(1, 1) - E(1, 1) + H(1, 1)) \cdot \Phi(1, 0)\| \rightarrow \min_{\Phi(1, 0)}, \\ J(0, 1) \cdot \Phi(1, 0) = 1, \end{cases}$$

или безусловной оптимизации:

$$\|(-g \cdot \mathcal{P}(1, 1) - E(1, 1) + H(1, 1)) \cdot \Phi(1, 0)\| + \gamma(J(0, 1) \cdot \Phi(1, 0) - 1)^2 \rightarrow \min_{\Phi(1, 0)},$$

где $\|\cdot\|$ — норма в пространстве матриц-столбцов [19], $\gamma > 0$ — весовой коэффициент, $\gamma(J(0, 1) \cdot \Phi(1, 0) - 1)^2$ — штраф за невыполнение ограничения (26).

При решении спектральным методом в качестве базисной системы $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$ были выбраны функции Лагерра [24], порядки усечения $L_1 = 8$, $L_1 = 12$ и $L_1 = 16$. Решалась задача безусловной оптимизации методом конфигураций при $\gamma = 1$ (параметры метода конфигураций по обозначениям [18]: ускоряющий множитель — $\lambda = 1.5$, коэффициенты уменьшения и увеличения шага — $\alpha = 1.3$ и $\beta = 1.1$), параметр остановки — $\varepsilon = 10^{-11}$. Для $L_1 = 8$ было сделано 1070 итераций, для $L_1 = 12$ — 1124 итераций, а для $L_1 = 16$ — 2979 итераций (начальное приближение — нулевое). Результаты вычислений приведены на рис. 5, результаты для $L_1 = 16$ на графике совпали с точным решением.

Далее в табл. 5 и 6 приведены погрешности с использованием двух оценок для сравнения аналитического решения $\varphi_T(y)$ и соответствующего приближенного решения $\varphi_n(y)$:

$$J_1 = \max_{0 \leq y \leq 10} |\varphi_T(y) - \varphi_n(y)| \quad \text{и} \quad J_2 = \left\{ \int_0^{10} |\varphi_T(y) - \varphi_n(y)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Эти значения даны через дробь, указано время счета $t_{\text{сч}}$. Для численного решения, приведенного на рис. 5 ($t = T = 100$, $N = 10^4$, шаг интегрирования $h = 0.1$), погрешность составила 0.007713/0.007181.

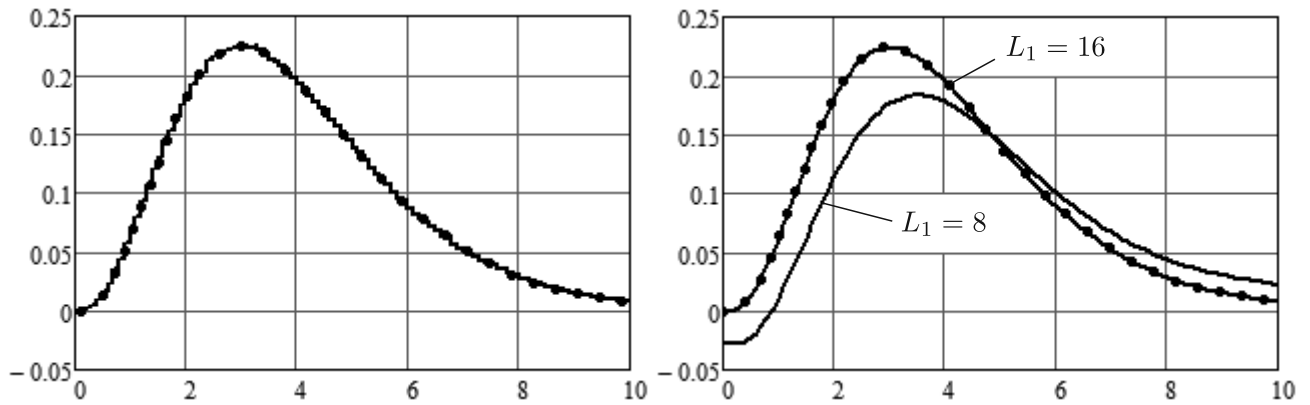


Рис. 5. Гистограмма плотности вероятности при $t = 100$ (слева) и приближенные решения стационарного уравнения Колмогорова – Феллера (справа). График стационарной плотности вероятности показан точками.

Таблица 5. Погрешность метода статистического моделирования при различных объеме выборки N и шаге интегрирования h в момент времени $t = 1$.

N	h	h_g	J_1/J_2	$t_{сч}, c$
10^4	0.1	0.10	0.032340/0.022865	0.01
10^6	0.1	0.10	0.008423/0.007631	1.07
10^6	0.1	0.05	0.007253/0.005716	1.49

Исследование воздействия импульсов на электрические цепи

Рассмотрим задачу определения вероятностных характеристик напряжения на конденсаторе в RC -цепи (интегрирующей цепи, см. рис. 6). Уравнение, описывающее изменение напряжения на конденсаторе, задается в виде [33]

$$du(t) = -\frac{1}{RC}u(t)dt + \Sigma dw(t) + dQ(t), \quad u(0) = u_0, \quad Q(t) = \sum_{k=1}^{p(t)} \Delta_k,$$

где R — сопротивление, C — емкость конденсатора, Σ — параметр, характеризующий интенсивность помехи, u_0 — начальное напряжение, Δ_k — амплитуды скачков напряжения (интенсивность импульсов — λ); $t \in [0, T]$, $T = RC$ — время окончания процесса.

Для дальнейших расчетов положим $R = 8 \cdot 10^3$ Ом (8 кОм), $C = 2.5 \cdot 10^{-4}$ ф (250 мкф), $\Sigma = 0.14$, $\lambda = 0.1$, начальное напряжение u_0 имеет нормальное распределение с параметрами $m_{u_0} = 1.5$ В, $\sigma_{u_0} = 0.2$ В (дисперсия $D_{u_0} = 0.04$), случайные величины Δ_k имеют логарифмически нормальное распределение с параметрами $m_{\Delta} = 0.2$ и $\sigma_{\Delta} = 0.15$ — математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением для $\ln \Delta_k$.

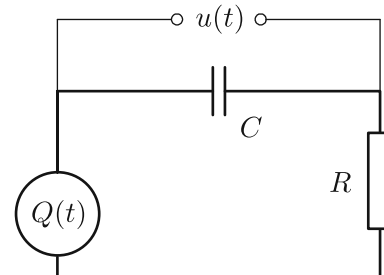


Рис. 6. RC -цепь с генератором импульсов.

Таблица 6. Погрешность спектрального метода при различном усечении спектральных характеристик L_1 , M — число итераций метода конфигураций.

L_1	M	J_1/J_2	$t_{сч}$, с
8	1070	0.067834/0.105628	1
12	1124	0.004580/0.007177	2
16	2979	0.000390/0.000590	8

Выполним для удобства линейную замену переменных: $y = 5u$. Тогда

$$dy(t) = -\frac{1}{RC}y(t)dt + \sigma dw(t) + dq(t), \quad y(0) = y_0, \quad q(t) = \sum_{k=1}^{p(t)} \delta_k,$$

где $\sigma = 0.7$. Случайная величина $y_0 = 5u_0$ имеет нормальное распределение с параметрами $m_{y_0} = 7.5$, $D_{y_0} = \sigma_{y_0} = 1$, а δ_k — логарифмически нормальное распределение с параметрами $m_\delta = 0.2 + \ln 5$ и $\sigma_\delta = 0.15$.

Запишем уравнение Колмогорова – Феллера:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, y)}{\partial t} &= \frac{1}{RC} \frac{\partial}{\partial y} [y\varphi(t, y)] + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi(t, y)}{\partial y^2} - \lambda \varphi(t, y) + \\ &+ \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}\sigma_\delta} \int_{-\infty}^y \frac{1}{y-z} e^{-\frac{(\ln(y-z)-m_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}} \varphi(t, z) dz, \quad \varphi(0, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_0}} e^{-\frac{(y-m_{y_0})^2}{2\sigma_{y_0}^2}}, \end{aligned}$$

и соответствующее ему уравнение обобщенной характеристической функции:

$$(P(2, 2) - A(2, 2) + L(2, 2) - H(2, 2)) \cdot \Phi(2, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(1, 0),$$

где

$$\begin{aligned} A(2, 2) &= \frac{1}{RC} \cdot \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot Y(2, 2) + \frac{\sigma^2}{2} \cdot \mathcal{P}_{11}(2, 2) \\ &\left(F(2, 2) = -\frac{1}{RC} \cdot Y(2, 2), \quad G(2, 2) = \sigma^2 \cdot E(2, 2) \right), \\ L(2, 2) &= \lambda \cdot E(2, 2), \quad H(2, 2) = \lambda \cdot (E(1, 1) \otimes H(1, 1)). \end{aligned}$$

В последнем равенстве $H(1, 1)$ — спектральная характеристика линейного оператора, определяемого формулой

$$\mathcal{H}\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\delta} \int_{-\infty}^y \frac{1}{y-z} e^{-\frac{(\ln(y-z)-m_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}} \varphi(z) dz,$$

а $\Phi_0(1, 0)$ — спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(0, y)$ начального состояния y_0 . Другие обозначения совпадают с приведенными в примере 1.

Решение уравнения обобщенной характеристической функции:

$$\Phi(2, 0) = (P(2, 2) - A(2, 2) + L(2, 2) - H(2, 2))^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)),$$

а плотность вероятности $\varphi(t, y)$ представляется в виде такого же функционального ряда, как и в примере 1. Аналогично примеру 1 вычисляются математическое ожидание и второй начальный момент.

При решении задачи методом статистических испытаний нормальная случайная величина u_0 моделировалась по формуле $X_0 = \sigma_{u_0}\xi + m_{u_0}$, где ξ — стандартная нормальная случайная величина с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией; моделирование времени между скачками осуществлялось по формуле $\tau_k = -\ln \alpha_k/\lambda$, где α_k — независимые равномерные случайные величины на $(0, 1)$; моделирование величин скачков осуществлялось по формуле $\Delta_k = e^{\sigma_{\Delta}\alpha + m_{\Delta}}$, где α — стандартная нормальная случайная величина; на интервалах между скачками решение моделировалось по методу (11). Моделировалось $N = 10^6$ траекторий. Сетка по времени — суперпозиция равномерной сетки с шагом $h = 0.1$ и моментов скачков. Для оценивания плотности вероятности строилась гистограмма.

При решении спектральным методом в качестве базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ были выбраны полиномы Лежандра [18, 19], а в качестве базисной системы $\{p(i_1, y)\}_{i_1=0}^{\infty}$ — функции Эрмита [22] с параметрами $m = 7$ и $D = 1$, порядки усечения $L_0 = 16$ и $L_1 = 16$ соответственно. Результаты вычислений приведены на рис. 7.

Результаты вычислений для плотности вероятности и первых двух моментов напряжения двумя методами приведены на рис. 8–10. Пунктиром изображены соответствующие характеристики без учета скачков напряжения ($\lambda = 0$) для сравнения. Рисунки слева соответствуют результатам, которые получены методом статистических испытаний, а справа — спектральным методом.

Далее рассмотрим задачу определения вероятностных характеристик силы тока в RCL -цепи (колебательном контуре, см. рис. 11). Следуя [33], будем использовать математическую модель

$$LC \frac{d^2 i(\theta)}{d\theta^2} + RC \frac{di(\theta)}{d\theta} + i(\theta) = \frac{dq(\theta)}{d\theta}, \quad i(0) = i_0, \quad \frac{di(0)}{d\theta} = i'_0, \quad q(\theta) = \sum_{k=1}^{p(\theta)} \Delta_k,$$

где R — сопротивление, C — емкость конденсатора, L — индуктивность, i_0 и i'_0 — начальные данные, δ_k — амплитуды скачков (интенсивность импульсов — λ); $\theta \in [0, T]$, $T = 0.0001$ с — время окончания процесса.

Зададим числовые значения для параметров контура, начальных данных и параметров источника импульсов: $R = 80$ Ом, $C = 1.2 \cdot 10^{-6}$ ф (1.2 мкф), $L = 1.5 \cdot 10^{-2}$ Гн (15 мГн), $\lambda = 15000$. Начальная сила тока i_0 случайна и имеет нормальное распределение с параметрами $m_{i_0} = 0$ А и $\sigma_{i_0} = 0.1$ А; i'_0 имеет нормальное распределение с параметрами $m_{i'_0} = 2.5 \cdot 10^3$ А/с, $\sigma_{i'_0} = 10^3$ А/с. Случайные величины Δ_k имеют нормальное распределение с параметрами $m_{\Delta} = 9 \cdot 10^{-6}$ А·с, $\sigma_{\Delta} = 1.8 \cdot 10^{-6}$ А·с (дисперсия $D_{\Delta} = 3.24 \cdot 10^{-12}$).

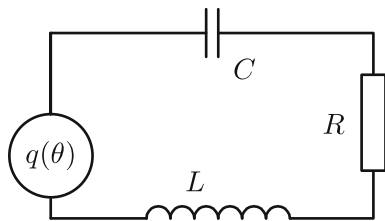


Рис. 11. RCL -цепь с генератором импульсов.

Для того чтобы коэффициенты в уравнении, описывающем изменение силы тока, были одного порядка, изменим масштаб времени: $t = \gamma\theta$, $\gamma = 10^4$. Кроме того, введем новые обозначения [33]:

$$a = \frac{R}{2\gamma L} = \frac{4}{15}, \quad \omega_0^2 = \frac{1}{\gamma^2 LC} = \frac{5}{9}.$$

Тогда

$$\frac{d^2 j(t)}{dt^2} + 2a \frac{dj(t)}{dt} + \omega_0^2 j(t) = \frac{d\tilde{q}(t)}{dt}, \quad j(0) = i_0, \quad \frac{dj(0)}{dt} = i'_0, \quad \tilde{q}(t) = \sum_{k=1}^{\tilde{p}(t)} \delta_k,$$

где $j(t) = i(\gamma^{-1}t)$; случайные величины δ_k имеют нормальное распределение с параметрами

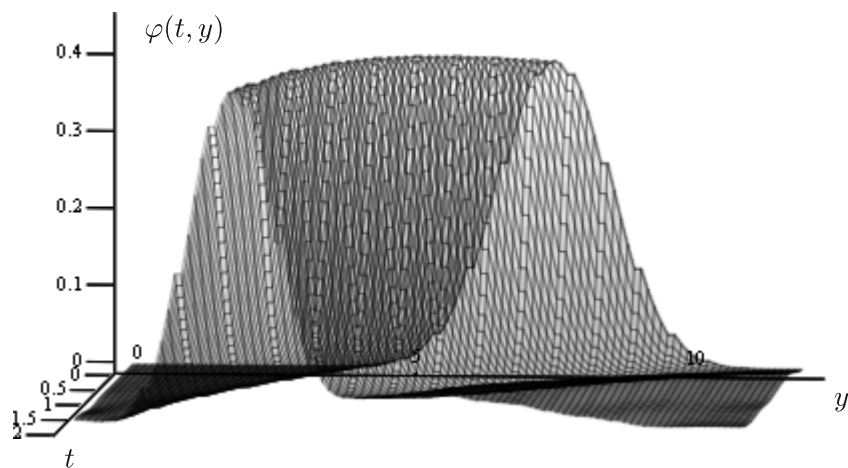


Рис. 7. График приближенного решения уравнения Колмогорова – Феллера.

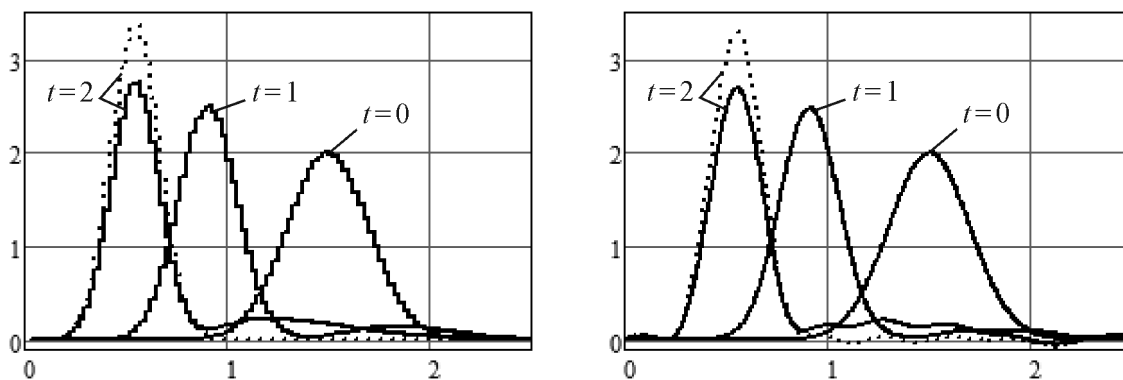


Рис. 8. Оценка плотности вероятности напряжения для RC -цепи.

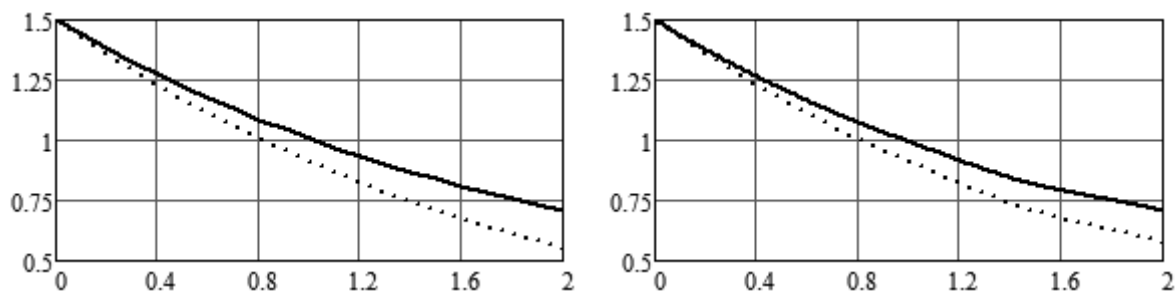


Рис. 9. Оценка математического ожидания напряжения для RC -цепи.

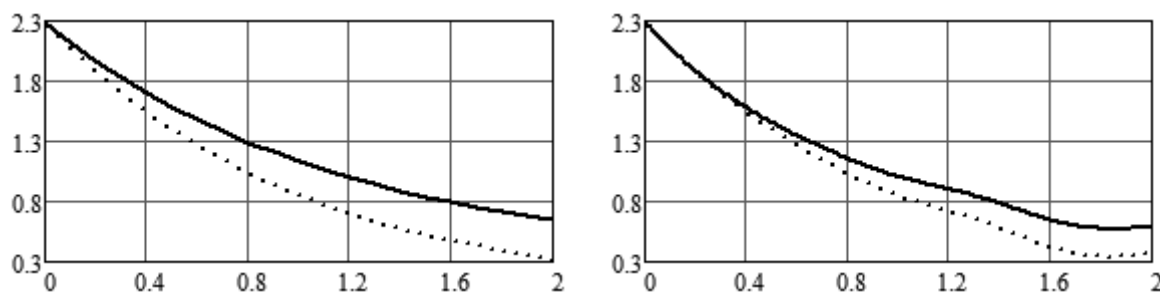


Рис. 10. Оценка второго начального момента напряжения для RC -цепи.

ми $m_\delta = 0.05$, $\sigma_\delta = 0.01$, интенсивность импульсов, определяющая простой пуассоновский процесс $\tilde{p}(t)$, $-\tilde{\lambda} = 1.5$; $t \in [0, 1]$. Запишем уравнение второго порядка в виде системы двух уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} dy_1(t) = y_2(t)dt, & y_1(0) = y_{10}, \\ dy_2(t) = (-\omega_0^2 y_1(t) - 2ay_2(t))dt + d\tilde{q}(t), & y_2(0) = y_{20}. \end{cases}$$

Уравнение Колмогорова – Феллера, описывающее эволюцию плотности вероятности $\varphi(t, y_1, y_2)$, записывается в форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, y_1, y_2)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial y_1} [y_2 \varphi(t, y_1, y_2)] + \frac{\partial}{\partial y_2} [(\omega_0^2 y_1 + 2ay_2) \varphi(t, y_1, y_2)] - \\ &- \tilde{\lambda} \varphi(t, y_1, y_2) + \frac{\tilde{\lambda}}{\sqrt{2\pi\sigma_\delta}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y_2 - z_2 - m_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}} \varphi(t, y_1, z_2) dz_2, \\ \varphi(0, y_1, y_2) &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\left(\frac{(y_1 - m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(y_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2}\right)}, \end{aligned}$$

а параметры распределения начального состояния такие: $m_1 = 0$, $\sigma_1 = 0.1$; $m_2 = 0.25$, $\sigma_2 = 0.1$.

Выберем в качестве базисной системы $\{e(i_0, i_1, i_2, t, y_1, y_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^\infty$ пространства $L_2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ систему функций $\{q(i_0, t)p_1(i_1, y_1)p_2(i_2, y_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^\infty$, где $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ — базис пространства $L_2([0, T])$, а $\{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty$ и $\{p_2(i_2, y_2)\}_{i_2=0}^\infty$ — базисы $L_2(\mathbb{R})$ (в общем случае различные). Далее приведем уравнение обобщенной характеристической функции:

$$(P(3, 3) - A(3, 3) + L(3, 3) - H(3, 3)) \cdot \Phi(3, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(2, 0),$$

в котором спектральная характеристика $A(3, 3)$ представляется следующим образом:

$$A(3, 3) = -\mathcal{P}_1(3, 3) \cdot F_1(3, 3) - \mathcal{P}_2(3, 3) \cdot F_2(3, 3).$$

Соотношения для вычисления спектральной характеристики $P(3, 3)$ оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент и спектральных характеристик $\mathcal{P}_1(3, 3)$ и $\mathcal{P}_{11}(3, 3)$ операторов дифференцирования первого порядка по переменным y_1 и y_2 соответственно:

$$P(3, 3) = (\mathcal{P}_t(1, 1) + q(1, 0; 0) \cdot q^T(1, 0; 0)) \otimes E(1, 1) \otimes E(1, 1),$$

$$\mathcal{P}_1(3, 3) = E(1, 1) \otimes \mathcal{P}_1(1, 1) \otimes E(1, 1), \quad \mathcal{P}_2(3, 3) = E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes \mathcal{P}_2(1, 1).$$

Здесь, как и в примере 1, $\mathcal{P}_t(1, 1)$ — спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$; $q(1, 0; 0)$ — матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ при $t = 0$. Через $\mathcal{P}_1(1, 1)$ и $\mathcal{P}_2(1, 1)$ обозначены спектральные характеристики оператора дифференцирования, определенные относительно базисных систем $\{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty$ и $\{p_2(i_2, y_2)\}_{i_2=0}^\infty$ соответственно.

Спектральные характеристики $F_1(3, 3)$ и $F_2(3, 3)$ операторов умножения на функции $f_1(t, y_1, y_2) = y_2$ и $f_2(t, y_1, y_2) = -\omega_0^2 y_1 - 2ay_2$ можно представить в виде

$$F_1(3, 3) = E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes Y_2(1, 1),$$

$$F_2(3, 3) = -\omega_0^2 \cdot (E(1, 1) \otimes Y_1(1, 1) \otimes E(1, 1)) - 2a \cdot (E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes Y_2(1, 1)),$$

где $Y_1(1, 1)$ и $Y_2(1, 1)$ — спектральные характеристики операторов умножения на величины y_1 и y_2 , определенные относительно базисных систем $\{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty$ и $\{p_2(i_2, y_2)\}_{i_2=0}^\infty$ соответственно. Заметим, что если эти базисные системы совпадают, то $\mathcal{P}_1(1, 1) = \mathcal{P}_2(1, 1)$ и $Y_1(1, 1) = Y_2(1, 1)$.

Спектральная характеристика $L(3, 3)$ согласно свойствам оператора умножения на константу представляется следующим образом:

$$L(3, 3) = \tilde{\lambda} \cdot E(3, 3) = \tilde{\lambda} \cdot (E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes E(1, 1)),$$

где $E(3, 3)$ — шестимерная единичная матрица, а для спектральной характеристики $H(3, 3)$ справедливо соотношение

$$H(3, 3) = \tilde{\lambda} \cdot (E(1, 1) \otimes E(1, 1) \otimes H(1, 1)),$$

в котором $H(1, 1)$ — спектральная характеристика линейного оператора, рассматриваемого на множестве функций одной переменной y_2 и задаваемого формулой

$$\mathcal{H}\varphi(y_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_\delta}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y_2-z-m_\delta)^2}{2\sigma_\delta^2}} \varphi(z) dz.$$

Очевидно, что спектральная характеристика $H(1, 1)$ определяется относительно системы функций $\{p_2(i_2, y_2)\}_{i_2=0}^\infty$.

Спектральная характеристика $\Phi_0(2, 0)$ плотности вероятности $\varphi(0, y_1, y_2)$ начального состояния вычисляется по определению относительно базисной системы $\{p_1(i_1, y_1)p_2(i_2, y_2)\}_{i_1, i_2=0}^\infty$ пространства $L_2(\mathbb{R}^2)$.

Выразим спектральную характеристику $\Phi(3, 0)$:

$$\Phi(3, 0) = (P(3, 3) - A(3, 3) + \Lambda(3, 3) - H(3, 3))^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(2, 0)),$$

и запишем соотношение для искомой плотности вероятности $\varphi(t, y_1, y_2)$:

$$\varphi(t, y_1, y_2) = \mathbb{S}^{-1}[\Phi(3, 0)] = \sum_{i_0, i_1, i_2=0}^\infty \varphi_{i_0 i_1 i_2} \cdot e(i_0, i_1, i_2, t, y_1, y_2), \quad (t, y_1, y_2) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2,$$

где $\varphi_{i_0 i_1 i_2}$ — элементы обобщенной характеристической функции $\Phi(3, 0)$.

В примере 1 приведены соотношения для расчета математического ожидания и второго начального момента с применением спектральной формы математического описания, в этой задаче моментные характеристики вычислялись аналогично.

При решении задачи методом статистических испытаний были использованы те же правила для моделирования случайных величин, что и в предыдущем примере. Моделировалось $N = 10^6$ траекторий. Сетка по времени — суперпозиция равномерной сетки с шагом $h = 0.1$ и моментов скачков. Для оценивания плотности вероятности строилась гистограмма.

При решении спектральным методом в качестве базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ были выбраны полиномы Лежандра [18, 19], а в качестве базисных систем $\{p_1(i_1, y_1)\}_{i_1=0}^\infty$ и $\{p_2(i_2, y_2)\}_{i_2=0}^\infty$ — функции Эрмита [22] с параметрами $m = 0$ и $D = 0.01$, порядки усечения $L_0 = 8$ и $L_1 = L_2 = 20$ соответственно. Графики приближенного решения уравнения Колмогорова–Феллера при различных значениях переменной t изображены на рис. 12.

Результаты вычислений для плотности вероятности и первых двух моментов силы тока двумя методами приведены на рис. 13–15. Пунктиром изображены соответствующие характеристики без учета скачков напряжения ($\lambda = 0$) для сравнения. Рисунки слева соответствуют результатам, которые получены методом статистических испытаний, а справа — спектральным методом.

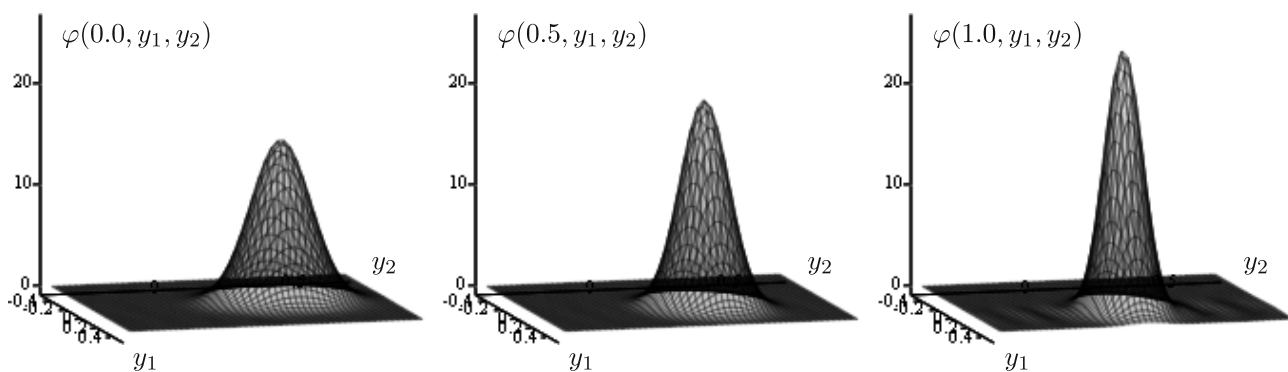


Рис. 12. Графики приближенного решения уравнения Колмогорова – Феллера при $t = 0.0$, $t = 0.5$ и $t = 1.0$.

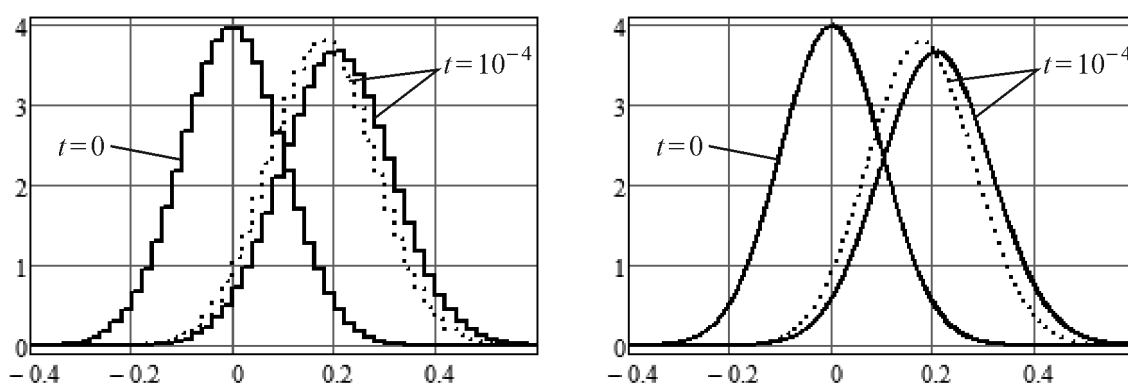


Рис. 13. Оценка плотности вероятности силы тока для RCL -цепи.

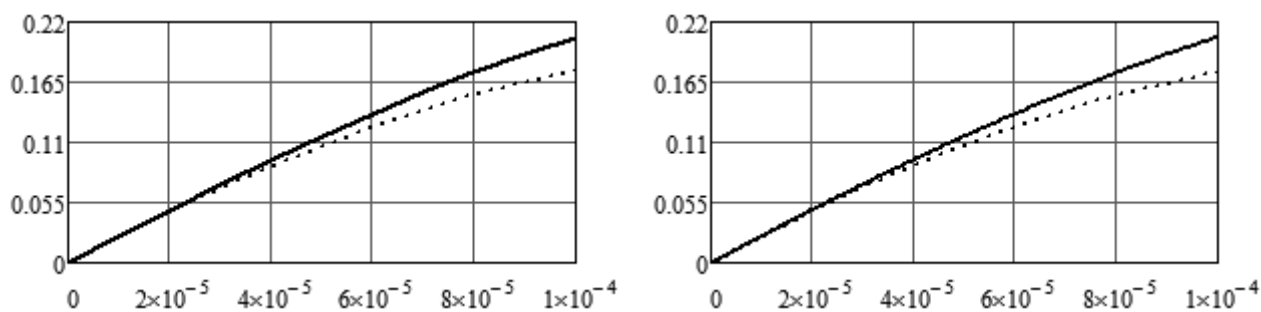


Рис. 14. Оценка математического ожидания силы тока для RCL -цепи.

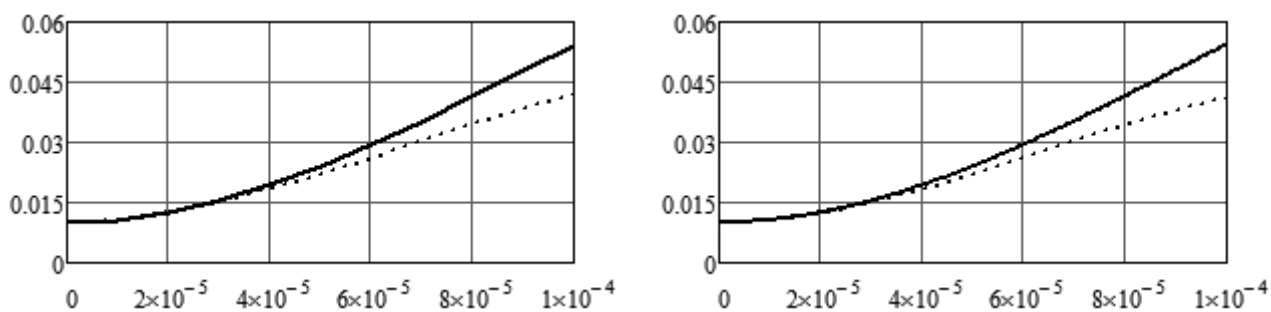


Рис. 15. Оценка второго начального момента силы тока для RCL -цепи.

Заключение

Проведенные численные расчеты подтверждают теоретические результаты. Метод статистического моделирования позволяет оценивать погрешность численного решения и контролировать оценки спектрального метода.

Как видно из приведенных в примерах таблиц метод статистического моделирования рекомендуется использовать для получения оценок с абсолютной точностью до третьего значащего знака после запятой. Для увеличения точности требуется более мелкий шаг интегрирования и большее число моделируемых траекторий, что сильно увеличивает время счета. Для получения оценок с большей точностью возможно применение спектрального метода, он удобен для приближенного нахождения плотности вероятности вектора состояния стохастической системы. Метод статистического моделирования предпочтительнее, если требуется оценить только моментные характеристики вектора состояния.

Список литературы

- [1] *Аверина Т.А.* Методы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2009. Т. 12. № 4. — С. 361–374.
- [2] *Аверина Т.А.* Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. Т. 50. № 1. — С. 16–23.
- [3] *Аверина Т.А.* Модифицированный алгоритм статистического моделирования систем со случайным периодом квантования // Вестник СГТУ. — 2011. № 4 (62). Вып. 4. — С. 212–218.
- [4] *Аверина Т.А., Артемьев С.С.* Новое семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. — 1986. Т. 288. № 4. — С. 777–780.
- [5] *Аверина Т.А., Михайлов Г.А.* Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. Т. 50. № 6. — С. 1005–1016.
- [6] *Аверина Т.А., Рыбаков К.А.* Два метода анализа стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2008. Т. 11. № 1. — С. 1–18.
- [7] *Артемьев В.М., Ивановский А.В.* Дискретные системы управления со случайным периодом квантования. — М.: Энергоатомиздат, 1986.
- [8] *Веретенников А.Ю.* О сильных решениях стохастических уравнений Ито со скачками // Теория вероятностей и ее применения. — 1987. Т. 32. Вып. 1. — С. 159–163.
- [9] *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов. — М.: Наука, 1977.
- [10] *Ермаков С.М., Михайлов Г.А.* Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982.
- [11] *Кожеевников А.С.* Программное обеспечение для статистического моделирования и анализа случайных процессов со скачками, описывающих динамику цен акций предприятий авиационной отрасли // Труды МАИ. — 2012. № 59. — <http://www.mai.ru/science/trudy>.
- [12] *Кожеевников А.С., Рыбаков К.А.* О применении спектрального метода анализа систем со случайным периодом квантования в модели Мертона // Модернизация и инновации в авиации и космонавтике: Сб. науч. тр. — М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. — С. 299–305.

- [13] *Кожеевников А.С., Рыбаков К.А.* Об оценке стоимости финансовых инструментов в модели Бейтса // Проблемы авиастроения, космонавтики и ракетостроения: Сб. науч. тр. — М.: Изд-во Ваш полиграфический партнер, 2012. — С. 353–361.
- [14] *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. — М.: Наука, 1985.
- [15] *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.
- [16] *Михайлов Г.А., Аверина Т.А.* Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. — 2009. Т. 428. № 2. — С. 163–165.
- [17] *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций // Автоматика и телемеханика. — 2011. № 2. — С. 183–194.
- [18] *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.* Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. — М.: Изд-во МАИ, 2012.
- [19] *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2006. (Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2013. № 1. — <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>)
- [20] *Параев Ю.И.* Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. — М.: Советское радио, 1976.
- [21] *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. — М.: Наука, 1990.
- [22] *Романов В.А., Рыбаков К.А.* Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Труды МАИ. — 2010. № 39. — <http://www.mai.ru/science/trudy>.
- [23] *Рыбаков К.А.* Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Труды МАИ. — 2005. № 18. — <http://www.mai.ru/science/trudy>.
- [24] *Рыбаков К.А.* Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Лагерра // Дифференциальные уравнения и процессы управления. — 2012. № 1. — С. 114–141. — <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
- [25] *Рыбаков К.А.* Многопараметрические ортонормированные системы функций для решения задач в спектральной форме математического описания // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Межд. конф., Воронеж, 26–28 ноября 2012 г.: Сб. тр. конф. Ч. 1. — Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ, 2012. — С. 327–331.
- [26] *Рыбин В.В.* Разработка пакета расширения MLSY_SM CRM Mathcad в проекционно-сеточных финитных базисах // Труды МАИ. — 2010. № 41. — <http://www.mai.ru/science/trudy>.
- [27] *Рыбин В.В.* Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. — М.: Изд-во МАИ, 2011.
- [28] *Соболев С.Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
- [29] *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. — М.: Наука, 1973.
- [30] *Солодовников В.В., Семенов В.В.* Спектральная теория нестационарных систем управления. — М.: Наука, 1974.

- [31] Таблицы и математическое обеспечение спектрального метода теории автоматического управления / Под ред. В.В. Семенова. — М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1973.
- [32] *Тихонов В.И.* Статистическая радиотехника. — М.: Радио и связь, 1982.
- [33] *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. — М.: Советское радио, 1977.
- [34] *Artemiev S.S., Averina T.A.* Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — VSP, 1997.
- [35] *Averina T.A.* Numerical Solution to SDEs Systems with a Poisson Component // Proceedings of the 5th St. Petersburg Workshop on Simulations. St. Petersburg, NII Chemsitry, June 26 – July 2, 2005. — St. Petersburg University Publishers, 2005. — P. 172–177.
- [36] *Cont R., Tankov P.* Financial Modeling with Jump Processes. — Chapman & Hall, 2004.
- [37] *Hanson F.B.* Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions. — SIAM, 2007.
- [38] *Øksendal B., Sulem A.* Applied Stochastic Control of Jump Diffusions. — Springer, 2005.
- [39] *Platen E., Bruti-Liberati N.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. — Springer, 2010.
- [40] *Protter P., Talay D.* The Euler Scheme for Lévy Driven Stochastic Differential Equations // Annals of Probability. — 1997. Vol. 25. No. 1. — P. 393–423.