

О ПРОГНОЗИРОВАНИИ СОСТОЯНИЙ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПУАССОНОВСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ¹

Аверина Т.А.^{*,**}, Рыбаков К.А.^{***}

**Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,*

***Новосибирский государственный университет,*

Новосибирск, Россия, E-mail: ata@osmf.sccc.ru

****Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),*

Москва, Россия, E-mail: rkoffice@mail.ru

В статье рассматривается новый подход к решению задачи прогнозирования для нелинейных стохастических дифференциальных систем с пуассоновской составляющей в уравнении объекта наблюдения. В основе предлагаемого подхода лежит метод статистических испытаний, а именно моделирование специального случайного процесса с разрывами, обрывами и ветвлениями траекторий. При решении задачи прогнозирования применяются методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

1. Введение

Целью работы является развитие нового подхода к решению задачи прогнозирования в нелинейных стохастических дифференциальных системах с пуассоновской составляющей [1–3] на основе рассмотренных ранее алгоритмов оптимальной нелинейной фильтрации. Аналогичный подход был ранее применен для стохастических дифференциальных систем без пуассоновской составляющей [4].

В [5–7] было предложено решать задачу оптимальной нелинейной фильтрации как задачу анализа вспомогательной стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий. Рассматриваемый подход к решению задачи фильтрации основан на интерпретации одного из слагаемых в уравнении Дункана–Мортенсена–Закаи как функции поглощения и восстановления траекторий случайного процесса. Напомним, что решение этого уравнения – ненормированная плотность вероятности, характеризующая распределение вектора состояния объекта наблюдения при наличии косвенных измерений с начального и до текущего момента времени [1–3, 8, 9]. В работе [10] описан метод решения задачи фильтрации в стохастических дифференциальных системах с пуассоновской составляющей в уравнении объекта наблюдения. В частности было показано, что задача оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа может быть решена как задача анализа вспомогательной стохастической системы, траектории которой могут получать случайные приращения (иметь разрывы), разветвляться и обрываться в случайные моменты времени. Разрывы траекторий обусловлены исходной постановкой задачи и характеризуются заданными параметрами: интенсивностью и распределением величины скачков, а обрывы и ветвления должны моделироваться на основе текущих измерений оцениваемого вектора состояния. Интенсивности обрывов и ветвлений выражаются через функции, задающие модель измерительной системы, и текущие измерения.

Таким образом, на основе метода решения задачи оценивания вектора состояния системы в текущий момент времени по результатам косвенных измерений с учетом случайных возмущений и помех предлагается новый метод решения задачи прогнози-

¹ Работа выполнена при поддержке грантов «Ведущие научные школы» НШ-5111.2014.1 и РФФИ (проекты № 13-08-00323-а и № 14-01-00787).

рования, т.е. задачи оценивания вектора состояния системы в будущий момент времени по результатам косвенных измерений, имеющих к текущему моменту, для нелинейных стохастических дифференциальных систем с пуассоновской составляющей.

Решение задачи анализа вспомогательной стохастической системы с разрывами, обрывами и ветвлениями траекторий можно найти приближенно с помощью статистического моделирования, применяя методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков (разрывы, обрывы и ветвления образуют неоднородные пуассоновские потоки событий с известными интенсивностями). По результатам моделирования траекторий вспомогательной стохастической системы можно оценить апостериорную плотность вероятности при фиксированных измерениях и найти оптимальную оценку вектора состояния объекта наблюдения, используя различные критерии оптимальности оценивания.

Как и в [4], при использовании критерия минимума среднеквадратической ошибки оценка текущего состояния может быть получена в результате усреднения по ансамблю траекторий системы, отличающейся от исходного объекта наблюдения тем, что ее траектории обрываются и разветвляются в случайные моменты времени, распределение которых определяется результатами измерений оцениваемого вектора состояния. Прогноз состояния можно получить, если продолжить моделирование без обрывов и ветвлений траекторий (сохранив моделирование разрывов), используя сформированную к текущему моменту времени выборку состояний вспомогательной стохастической системы и усредняя по полученному в результате ансамблю траекторий.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать модель объекта наблюдения, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей [11]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

в котором $X \in R^n$ – вектор состояния, $t \in [t_0, T + \Delta(T)]$ – время; $f(t, x): [t_0, T + \Delta(T)] \times R^n \rightarrow R^n$ – n -мерная вектор-функция, $\sigma(t, x): [t_0, T + \Delta(T)] \times R^n \rightarrow R^{n \times s}$ – матричная функция $n \times s$; $\Delta(t): [t_0, T] \rightarrow [0, +\infty)$ – величина опережения по времени, удовлетворяющая условию $\max_{t \in [t_0, T]} (t + \Delta(t)) = T + \Delta(T)$; $W(t)$ – s -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния X_0 , заданного плотностью вероятности $\varphi_0(x)$; $Q(t)$ – общий пуассоновский процесс, заданный в форме

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k,$$

где $P(t)$ – пуассоновский процесс, Δ_k – независимые случайные векторы из R^n , распределение которых задано плотностью вероятности $\psi(\tau_k, \Delta)$, т.е. вектор состояния X получает случайные приращения в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots \in [t_0, T]$, образующие пуассоновский поток событий:

$$X(\tau_k) = X(\tau_k - 0) + \Delta_k. \quad (2)$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности $\psi(\tau_k, \Delta | x)$, характеризующая распределение Δ_k при условии $X(\tau_k - 0) = x$. В частном случае $\psi(\tau_k, \Delta | x) = \psi(\tau_k, \Delta)$. Наряду с $\psi(\tau_k, \Delta | x)$ введем плотность вероятности $\eta(\tau_k, x | \xi)$, характеризующую распределение $X(\tau_k)$ при условии $X(\tau_k - 0) = \xi$, т.е. $\Delta_k = X(\tau_k) - \xi$.

Пуассоновский поток событий и, следовательно, моменты времени τ_1, τ_2, \dots , а также пуассоновский процесс $P(t)$ определяются интенсивностью $\lambda(t, x)$, т.е. условная вероятность события (2) при $X(t) = x$ на промежутке $[t, t + \Delta t]$ определяется равенством

$$\mathbb{P}(t, t + \Delta t) = \Pr(P(t + \Delta t) - P(t) = 1 | X(t) = x) = \lambda(t, x)\Delta t + o(\Delta t). \quad (3)$$

Пуассоновская составляющая $dQ(t)$ может быть записана в других формах [2, 3, 12, 13]. Варианты определений решения уравнений типа (1) и возможные условия на его коэффициенты, достаточные для существования решения, изложены в [12].

Модель измерительной системы может быть представлена в одной из следующих форм:

$$dY(t) = c(t, X(t))dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \quad (4)$$

или

$$Z(t) = c(t, X(t)) + \zeta(t)N(t), \quad (5)$$

где $Y, Z \in R^m$ – векторы измерений; $c(t, x): T \times R^n \rightarrow R^m$ – m -мерная вектор-функция, $\zeta(t): T \rightarrow R^{m \times d}$ – матричная функция $m \times d$; $V(t)$ – d -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $W(t)$ и от начального состояния X_0 , $N(t)$ – d -мерный стандартный гауссовский белый шум, не зависящий от X_0 .

Задача прогнозирования состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t + \Delta(t))$ по результатам измерений $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$.

Следуя [4], будем исходить из несмещенности оценки и минимума среднеквадратического отклонения. Тогда

$$\hat{X}(t + \Delta(t)) = \mathbb{M}[X(t + \Delta(t)) | Y_0^t] = \int_{R^n} xp(t + \Delta(t), x | Y_0^t)dx,$$

где \mathbb{M} – знак математического ожидания, $p(t + \Delta(t), x | Y_0^t)$ – апостериорная плотность вероятности прогноза вектора состояния X .

Можно рассматривать, например, следующие варианты задачи прогнозирования: прогнозирование с фиксированным упреждением, т.е. $\Delta(t) = \Delta = \text{const}$, и прогнозирование в фиксированный момент времени $T' > T$, т.е. $\Delta(t) = T' - t$.

Отметим, кроме того, что задачу прогнозирования можно сформулировать и в терминах измерений $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$, в данном случае это не имеет принципиального значения, однако далее при записи необходимых соотношений для решения задачи прогнозирования будут использоваться как измерения $Y(t)$, так и $Z(t)$.

3. Уравнения для апостериорной плотности вероятности

Задачу прогнозирования будем решать в два этапа. На первом этапе будем определять апостериорную плотность вероятности $p(t, x | Y_0^t)$, используя уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи [1, 3], записанное при фиксированных измерениях Y_0^t или Z_0^t следующим образом [10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = & \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t) + \int_{R^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)\varphi(t, \xi | Y_0^t)d\xi - \\ & - \mu^-(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t) + \mu^+(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t)];$$

$$\mu^-(t, x, z) = \begin{cases} -\mu(t, x, z), & \mu(t, x, z) < 0, \\ 0, & \mu(t, x, z) \geq 0, \end{cases} \quad \mu^+(t, x, z) = \begin{cases} \mu(t, x, z), & \mu(t, x, z) > 0, \\ 0, & \mu(t, x, z) \leq 0; \end{cases}$$

$$\mu(t, x, z) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m c_k(t, x) q_{kr}(t) \left(z_r - \frac{c_r(t, x)}{2} \right); \quad g(t, x) = \sigma(t, x) \sigma^T(t, x), \quad q(t) = (\zeta(t) \zeta^T(t))^{-1}.$$

Уравнение (6) решается на промежутке $[t_0, \theta]$, где $\theta \in [t_0, T]$ – некоторое текущее время. Затем его решение нормируется, результатом будет апостериорная плотность вероятности $p(t, x | Y_0^t)$ вектора состояния X :

$$p(t, x | Y_0^t) = \frac{\varphi(t, x | Y_0^t)}{\int_{R^n} \varphi(t, x | Y_0^t) dx}, \quad t \in [t_0, \theta]. \quad (7)$$

На втором этапе определяется апостериорная плотность вероятности $p(t, x | Y_0^\theta)$ как решение уравнения Колмогорова–Феллера

$$\frac{\partial \varphi(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{A} \varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x) \varphi(t, x | Y_0^t) + \int_{R^n} \lambda(t, \xi) \eta(t, x | \xi) \varphi(t, \xi | Y_0^t) d\xi \quad (8)$$

на промежутке $[\theta, \theta + \Delta(\theta)]$ с начальным условием $p(\theta, x | Y_0^\theta)$.

Оба этапа можно объединить в один, а именно решать уравнение (6) на промежутке $[t_0, \theta + \Delta(\theta)]$ при дополнительном условии $\mu(t, x, z) = 0$, если $t > \theta$. В результате получим ненормированную апостериорную плотность вероятности $\varphi(t, x | Y_0^\theta)$ как функцию текущего времени $\theta \in [t_0, T]$ и будущего момента времени $\theta \leq t \leq \theta + \Delta(\theta)$, для которого оценивается вектор состояния. При переходе к апостериорной плотности вероятности $p(t, x | Y_0^\theta)$ нужна нормировка, аналогичная (7):

$$p(t, x | Y_0^\theta) = \frac{\varphi(t, x | Y_0^\theta)}{\int_{R^n} \varphi(t, x | Y_0^\theta) dx}, \quad t \in [\theta, \theta + \Delta(\theta)], \quad \theta \in [t_0, T].$$

Уравнения вида (6) и (8) называют обобщенными уравнениями Фоккера–Планка–Колмогорова [14]. Для уравнения (6) слагаемое $\mu^-(t, x, Z(t)) \varphi(t, x | Y_0^t)$ – это функция поглощения, а $\mu^+(t, x, Z(t)) \varphi(t, x | Y_0^t)$ – функция восстановления. Это означает, что можно рассматривать специальный случайный процесс $X(t)$, который характеризуется коэффициентами сноса $f(t, x)$ и диффузии $g(t, x)$, интенсивностью разрыва траекторий $\lambda(t, x)$ и распределением величины приращения вектора состояния при разрыве, определяемой плотностями вероятности $\psi(\tau_k, \Delta | x)$ или $\eta(\tau_k, x | \xi)$, с дополнительными условиями: траектории $X(t)$ могут обрываться и обрывы образуют пуассоновский поток событий с интенсивностью $\mu^-(t) = \mu^-(t, X(t), Z(t))$, а могут появляться новые ветви и ветвления также образуют пуассоновский поток событий, но с другой интенсивностью $\mu^+(t) = \mu^+(t, X(t), Z(t))$.

К этому можно добавить, что вероятность $\mathbb{P}^-(t, \Delta t)$ обрыва траектории и вероятность $\mathbb{P}^+(t, \Delta t)$ ветвления траектории на промежутке времени $[t, t + \Delta t]$ при $X(t) = x$ и $Z(t) = z$ удовлетворяют условию, аналогичному (3):

$$\mathbb{P}^-(t, \Delta t) = \mu^-(t, x, z) \Delta t + o(\Delta t), \quad \mathbb{P}^+(t, \Delta t) = \mu^+(t, x, z) \Delta t + o(\Delta t).$$

Обрывы и ветвления траекторий случайного процесса $X(t)$ могут быть только на промежутке $[t_0, \theta]$, а на промежутке $(\theta, \theta + \Delta(\theta)]$ поведение траекторий определяется заданными коэффициентами сноса и диффузии, а также параметрами разрыва траекторий. Таким образом, функция $\varphi(t, x | Y_0^\theta)$ характеризует распределение вектора X – состояния объекта наблюдения, описываемого уравнением (1), – с учетом того, что траек-

тории случайного процесса $X(t)$ могут иметь разрывы, обрываться и разветвляться в случайные моменты времени. Распределением моментов времени появления обрывов и ветвлений управляет процесс $Z(t)$. При $t = \theta$ функция $\varphi(t, x | Y_0^0)$ определяет распределение вектора состояния X с учетом всех имеющихся к текущему моменту времени косвенных измерений Y_0^0 , по этой функции можно найти оптимальную оценку текущего вектора состояния объекта наблюдения, т.е. решить задачу фильтрации [10]. При $t > \theta$ функция $\varphi(t, x | Y_0^0)$ задает распределение прогноза вектора состояния X с учетом имеющихся измерений к моменту времени θ , т.е. с опережением по времени на $(t - \theta)$, по этой функции можно найти прогноз для вектора состояния объекта наблюдения, т.е. решить задачу прогнозирования. Структурная схема системы наблюдения, оценивания текущего состояния и прогнозирования изображена на рис. 1.

4. Приближенный метод прогнозирования

Как и в [4], для приближенного определения прогноза вектора состояния $\hat{X}(t + \Delta(t))$ можно модифицировать алгоритмы, предложенные в [5, 6] для решения задачи оптимальной фильтрации с помощью метода статистических испытаний (метода Монте-Карло). Алгоритмы прогнозирования основаны на моделировании траекторий специального случайного процесса $X(t)$ с учетом разрывов, обрывов и ветвлений при фиксированных измерениях Y_0^i или Z_0^i . При этом можно применять известные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

Например, можно использовать простой в реализации метод численного решения стохастических дифференциальных уравнений – стохастический метод Эйлера [8]:

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k,$$

$$Y_{k+1} = Y_k + hc(t_k, X_k) + \sqrt{h}\zeta(t_k)\Delta V_k, \quad Z_k = \frac{Y_{k+1} - Y_k}{h}, \quad t_k = t_0 + hk, \quad k = 0, 1, \dots,$$

где ΔW_k и ΔV_k – s -мерный и d -мерный случайные векторы соответственно, их координаты независимы и имеют стандартное нормальное распределение, h – шаг численного интегрирования. Приведенные формулы используются для моделирования «фрагментов» траекторий на промежутках времени между двумя последовательными событиями типа разрыва, обрыва или ветвления траектории.

Для численного решения в случае жестких задач рекомендуется использовать асимптотически несмещенный метод, построенный в работе [15]. Этот метод не требует мелкого шага численного интегрирования и, кроме того, на системах с постоянным шумом имеет более высокий порядок сходимости в среднеквадратическом, чем стохастический метод Эйлера.

Возможно применение и других методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений [16–18].

При моделировании моментов времени разрывов, обрывов и ветвлений траекторий используется метод «максимального сечения» [19–22]. Так, моделирование времени τ , через которое произойдет разрыв траектории, осуществляется по правилу

$$\tau = \theta_{N_1}, \quad N_1 = \min \left\{ \vartheta : \alpha_\vartheta \leq \frac{\lambda(t_* + \theta_\vartheta)}{\lambda^*} \right\}, \quad \theta_\vartheta = \sum_{i=1}^{\vartheta} \xi^i, \quad \lambda^* : \lambda(t) \leq \lambda^* = \text{const}, \quad (9)$$

где $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^{\vartheta}, \dots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих показательное распределение с параметром λ^* : $\xi^i = -\ln \beta_i / \lambda^*$; $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\vartheta, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\vartheta, \dots$ – последовательности независимых

случайных величин, имеющих равномерное распределение на интервале $(0,1)$; $\lambda(t)$ – значение функции $\lambda(t, x)$ на вспомогательных траекториях процесса $X(t)$, т.е. $\lambda(t) = \lambda(t, X(t))$; t_* – начальный момент времени t_0 или момент времени последнего разрыва траектории. В момент разрыва траектории новое значение вектора состояния моделируется согласно плотности $\eta(t_* + \tau, x | X_{k+1})$ или моделируется величина скачка Δ_{k+1} согласно плотности $\psi(t_* + \tau, \Delta | X_{k+1})$.

Моделирование времени τ , через которое произойдет обрыв или ветвление траектории, осуществляется аналогично, при этом

$$\tau = \theta_{N_2}, \quad N_2 = \min \left\{ \vartheta : \alpha_{\vartheta} \leq \frac{|\mu(t_* + \theta_{\vartheta})|}{\mu^*} \right\}, \quad \theta_{\vartheta} = \sum_{i=1}^{\vartheta} \xi^i, \quad \mu^* : |\mu(t)| \leq \mu^* = \text{const}, \quad (10)$$

где в дополнение к уже введенным обозначениям $\mu(t)$ – значение функции $\mu(t, x, z)$ на вспомогательных траекториях процесса $X(t)$ и траектории $Z(t)$, полученной в результате измерений на оцениваемой траектории, т.е. $\mu(t) = \mu(t, X(t), Z(t))$; t_* – начальный момент времени t_0 или момент времени последнего ветвления траектории. При условии $\mu(t_* + \tau) < 0$ происходит обрыв (моделирование такой траектории прекращается), а при $\mu(t_* + \tau) > 0$ – ветвление (далее моделируются две траектории, имеющие как минимум одну общую точку – точку ветвления).

Применяя более экономичный модифицированный метод «максимального сечения» [19–22], в соотношениях (9) и (10) можно положить

$$N_1 = \min \left\{ \vartheta : 1 - \alpha > \prod_{i=1}^{\vartheta} \left(1 - \frac{\lambda(t_* + \xi_i)}{\lambda^*} \right) \right\}, \quad N_2 = \min \left\{ \vartheta : 1 - \alpha > \prod_{i=1}^{\vartheta} \left(1 - \frac{|\mu(t_* + \xi_i)|}{\mu^*} \right) \right\},$$

где α – равномерно распределенная на интервале $(0,1)$ случайная величина.

Отметим, что сетка по времени $\{t_k\}$ должна быть суперпозицией равномерной сетки с шагом h , а также моментов разрывов, обрывов или ветвлений траекторий $X(t)$.

На основе результатов моделирования траекторий специального случайного процесса $X(t)$ с разрывами, обрывами и ветвлениями в каждый момент времени можно оценить функцию распределения и плотность вероятности, а также найти оценку вектора состояния как для текущего времени (фильтрация), так и для будущего (прогнозирование), например, усредняя по ансамблю траекторий с учетом того, что на этапе прогнозирования обрывы и ветвления не происходят.

Литература

1. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. – М.: Советское радио, 1976.
2. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Теория стохастических систем. – М.: Логос, 2004.
3. Сеницын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. – М.: Логос, 2007.
4. Рыбаков К.А. Алгоритмы прогнозирования состояний в стохастических дифференциальных системах на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2015. № 1. – С. 25–38. – <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
5. Рыбаков К.А. Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2012. № 3. – С. 91–110. – <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.

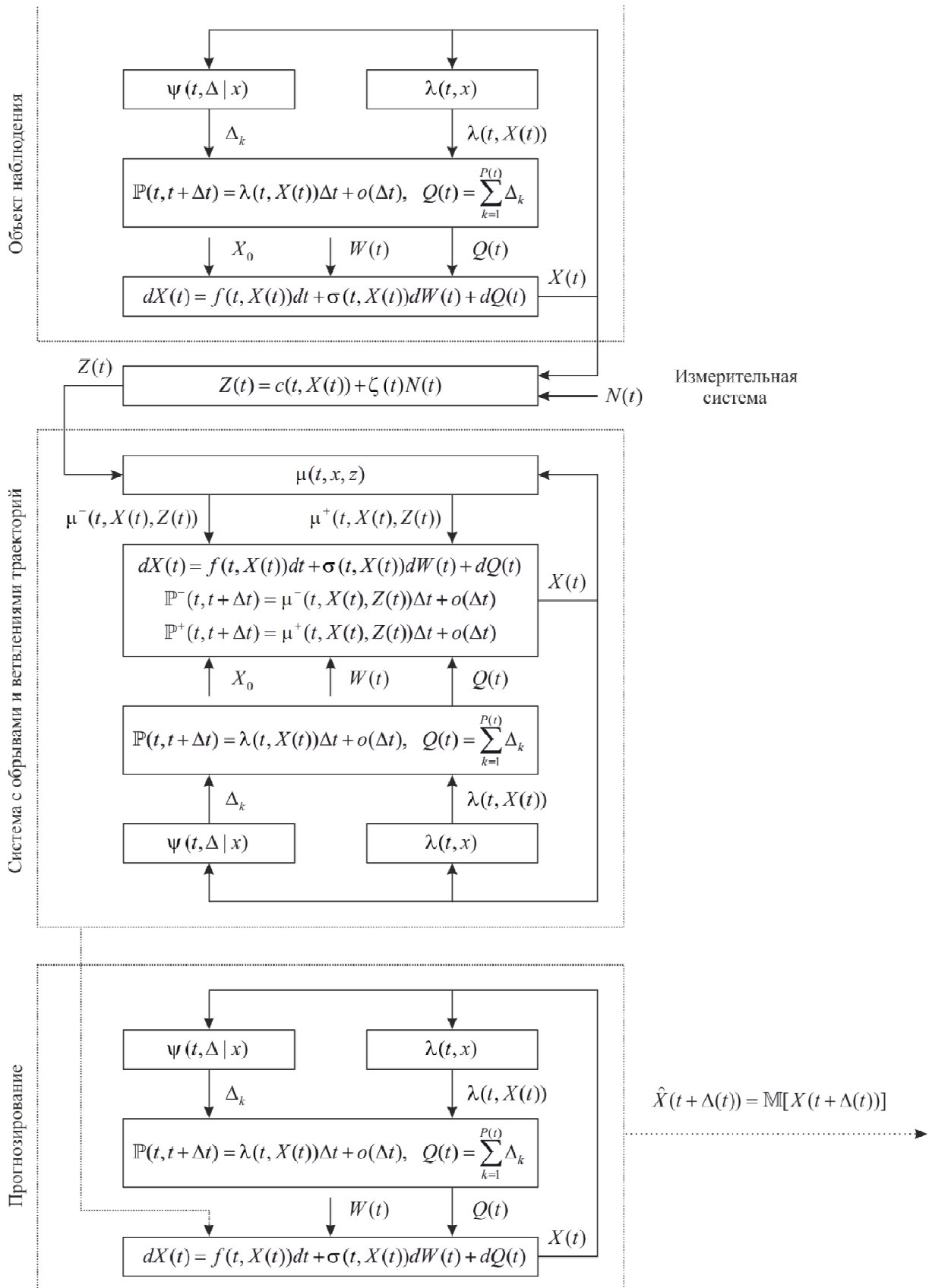


Рис. 1. Структурная схема системы наблюдения, оценивания текущего состояния и прогнозирования.

6. Рыбаков К.А. Модифицированный алгоритм оптимальной фильтрации сигналов на основе моделирования специального ветвящегося процесса // *Авиакосмическое приборостроение*. – 2013. № 3. – С. 15–20.
7. Рыбаков К.А. Приближенное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации для стохастических дифференциальных систем методом статистических испытаний // *Сибирский журнал вычислительной математики*. – 2013. Т. 16. № 4. – С. 377–391.
8. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. *Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез*. – М.: Вузовская книга, 2008.
9. Тихонов В.И., Кульман Н.К. *Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов*. – М.: Советское радио, 1975.
10. Рыбаков К.А. Приближенный метод фильтрации сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // *Научный вестник МГТУ ГА*. – 2014. № 207. – С. 54–60.
11. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*. – 2013. № 3. – С. 85–116. – <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
12. Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. *Справочник по теории вероятностей и математической статистике*. – М.: Наука, 1985.
13. Situ R. *Theory of Stochastic Differential Equations with Jumps and Applications*. – Springer, 2005.
14. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. *Анализ систем случайной структуры*. – М.: Физматлит, 1993.
15. Аверина Т.А. Устойчивые численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений в смысле Стратоновича // *Вестник Бурятского государственного университета*. – 2012. № 9. – С. 91–94.
16. Artemiev S.S., Averina T.A. *Numerical Analysis of Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations*. – VSP, 1997.
17. Кузнецов Д.Ф. *Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения*. – СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.
18. Kloeden P.E., Platen E. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. – Springer, 1995.
19. Аверина Т.А. Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2010. Т. 50. № 1. – С. 16–23.
20. Аверина Т.А., Михайлов Г.А. Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. – 2010. Т. 50. № 6. – С. 1005–1016.
21. Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // *Доклады АН*. – 2009. Т. 428. № 2. – С. 163–165.
22. Михайлов Г.А., Рогазинский С.В. Модифицированный метод «мажорантной частоты» для численного моделирования обобщенного экспоненциального распределения // *Доклады АН*. – 2012. Т. 444. № 1. – С. 28–30.