ПРАКТИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ С ПУАССОНОВСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ[1]

Аверина Т.А.[*,], Рыбаков К.А.[***]**

[*] *Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,*
[**] *Новосибирский государственный университет,*
Новосибирск, Россия, E-mail: ata@osmf.sscc.ru
[***] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),*
Москва, Россия, E-mail: rkoffice@mail.ru

На основе предложенного ранее подхода к решению задачи прогнозирования для нелинейных стохастических дифференциальных систем с пуассоновской составляющей в уравнении объекта наблюдения разработан статистический алгоритм и соответствующее программное обеспечение. Алгоритм базируется на методах численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методах моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

1. Введение

В работе [1] рассмотрена задача прогнозирования в нелинейных стохастических дифференциальных системах наблюдения, состоящих из объекта наблюдения и измерительной системы. Возмущения, действующие на объект наблюдения, описываются винеровским и пуассоновским случайными процессами, помехи при измерениях описываются только винеровским случайным процессом. Предложен новый метод решения этой задачи на основе статистического анализа результатов моделирования траекторий объекта наблюдения с дополнительными условиями обрывов и ветвлений.

В настоящей работе этот метод конкретизируется в виде статистического алгоритма, апробация которого проведена на модельном примере. Аналогичные алгоритмы были ранее предложены для стохастических дифференциальных систем без учета пуассоновских возмущений [2].

2. Постановка задачи

Рассматривается система наблюдения, задаваемая стохастическими дифференциальными уравнениями в смысле Ито [3, 4]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0; \tag{1}$$

$$dY(t) = c(t, X(t))dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0. \tag{2}$$

Первое из них – это уравнение объекта наблюдения, $X \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния объекта наблюдения, а второе – уравнение измерительной системы, $Y \in \mathbb{R}^m$ – вектор измерений. Векторные функции $f(t,x)$, $c(t,x)$ и матричные функции $\sigma(t,x)$, $\zeta(t)$ соответствующих размерностей заданы, они определяют структуру системы наблюдения; $W(t)$ и $V(t)$ – s-мерный и d-мерный стандартные винеровские процессы, не зависящие от начального вектора состояния X_0 с заданным распределением; $Q(t)$ – общий пуассоновский процесс, который характеризует разрывы траекторий случайного процесса $X(t)$. Случайный процесс $Q(t)$ определяется интенсивностью $\lambda(t) = \lambda(t, X(t))$ и условной плотностью вероятности $\psi(t, \delta \,|\, \xi)$, описывающей распределение прираще-

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 14-01-00787).

ния δ вектора состояния в момент разрыва t при условии $X(t-0)=\xi$: $X(t)=X(t-0)+\delta$.

Отрезок времени функционирования системы наблюдения задан: $[t_0,T]$; прогноз строится на дополнительном промежутке $(t,t+\Delta(t)]$, который для каждого текущего момента времени t определяется значением $\Delta(t)$ с учетом условия

$$\max_{t\in[t_0,T]}(t+\Delta(t))=T+\Delta(T).$$

Уравнение, описывающее измерительную систему, для дальнейшего удобства представим в следующем виде [5]:

$$Z(t)=c(t,X(t))+\zeta(t)N(t), \tag{3}$$

где $N(t)$ – d-мерный стандартный гауссовский белый шум, не зависящий от X_0.

Задача прогнозирования состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t+\Delta(t))$ по результатам всех имеющихся к текущему моменту времени измерений $Y_0^t=\{Y(\tau),\tau\in[t_0,t)\}$ или $Z_0^t=\{Z(\tau),\tau\in[t_0,t)\}$.

Можно рассматривать различные варианты задачи прогнозирования:

а) прогнозирование с фиксированным упреждением, т.е. $\Delta(t)=\Delta=\text{const}$;

б) прогнозирование в фиксированный момент времени $T'\geq T$, т.е. $\Delta(t)=T'-t$.

Если накладывать условие минимальности среднеквадратического отклонения ошибки оценивания, то решение этой задачи хорошо известно [4]:

$$\hat{X}(t+\Delta(t))=\mathbb{M}\left[X(t+\Delta(t))\,|\,Y_0^t\right]=\int_{R^n}xp(t+\Delta(t),x\,|\,Y_0^t)dx,$$

где $p(t+\Delta(t),x\,|\,Y_0^t)$ – апостериорная плотность вероятности прогноза вектора состояния X, т.е. оптимальная оценка представляет собой апостериорное математическое ожидание вектора состояния объекта наблюдения. Однако практическая реализация нахождения этой оценки в нелинейном случае затруднительна. Исходя из этого, актуальность разработки новых эффективных алгоритмов прогнозирования не вызывает сомнений.

3. Статистический алгоритм решения задачи прогнозирования

Как упоминалось во введении, в работе [1] описан метод решения сформулированной выше задачи прогнозирования с помощью моделирования траекторий вспомогательного случайного процесса. Траектории этого случайного процесса могут иметь разрывы (согласно исходной постановке задачи), а также обрывы и ветвления.

Напомним [1], что решение задачи прогнозирования состоит из двух этапов: фильтрации (от начального и до текущего момента времени) и собственно прогнозирования (от текущего до некоторого будущего момента времени). С течением времени прогноз необходимо обновлять.

На каждом из этапов необходимо моделировать траектории случайного процесса согласно уравнению объекта наблюдения (1), используя какой-либо подходящий метод приближенного решения стохастических дифференциальных уравнений с пуассоновской составляющей. Такие методы рассмотрены, например, в работах [6–8]. Измерения Y_0^t или Z_0^t, однозначно связанные между собой, дополнительно учитываются только на этапе фильтрации, от этих измерений зависит распределение моментов времени обрывов и ветвлений траекторий. Распределение моментов времени разрывов траекторий полностью определяется интенсивностью $\lambda(t,x)$, а распределение моментов времени обрывов и ветвлений задается функцией $\mu(t,x,z)$ [2, 9, 10]:

$$\mu(t,x,z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}c_k(t,x)q_{kr}(t)\left(z_r-\frac{c_r(t,x)}{2}\right),\quad q(t)=\left(\zeta(t)\zeta^{\mathrm{T}}(t)\right)^{-1}.$$

Если значение этой функции отрицательно, то интенсивность обрывов равна $\mu^-(t)=-\mu(t,X(t),Z(t))$, а если ее значение положительно, то интенсивность ветвлений равна $\mu^+(t)=\mu(t,X(t),Z(t))$. Формально интенсивности обрывов и ветвлений можно ввести следующим образом:

$$\mu^-(t,x,z)=\begin{cases}-\mu(t,x,z), & \mu(t,x,z)<0,\\ 0, & \mu(t,x,z)\ge 0,\end{cases}\qquad \mu^+(t,x,z)=\begin{cases}\mu(t,x,z), & \mu(t,x,z)>0,\\ 0, & \mu(t,x,z)\le 0.\end{cases}$$

Вспомогательный случайный процесс $X(t)$ характеризуется:

а) коэффициентами сноса $f(t,x)$ и диффузии $\sigma(t,x)$;

б) интенсивностью $\lambda(t,x)$ появления разрывов и законом распределения приращения вектора состояния при разрыве, задаваемом условной плотностью вероятности $\psi(t,\delta\,|\,\xi)$;

в) интенсивностями появления обрывов $\mu^-(t,x,z)$ и ветвлений $\mu^+(t,x,z)$ (только на этапе фильтрации).

Дополнительно определим интенсивность композиции двух пуассоновских потоков: потока разрывов траекторий, а также потока обрывов и ветвлений траекторий. Его интенсивность задается формулой

$$\Lambda(t,x,z)=\lambda(t,x)+|\,\mu(t,x,z)\,|. \qquad (4)$$

По этим данным можно моделировать траектории вспомогательного случайного процесса $X(t)$ (все ветви для удобства рассматриваются как отдельные траектории), а по ним, в свою очередь, можно оценить среднее значение, т.е. искомую оценку вектора состояния, ковариационную матрицу ошибки оценивания, моментные характеристики более высокого порядка. По ним можно также оценить апостериорные плотность вероятности и функцию распределения, что важно для нелинейных моделей стохастических систем наблюдения, для которых оценка вектора состояния по критерию минимума среднеквадратического отклонения может оказаться неудачной.

Без учета обрывов и ветвлений траекторий такой метод не будет отличаться от решения задачи анализа стохастической системы с пуассоновской составляющей [6–8], задаваемой уравнением (1). При статистической обработке результатов моделирования можно получать априорные оценки плотности вероятности, функции распределения и моментных характеристик. Учет обрывов и ветвлений обеспечивает получение апостериорных оценок плотности вероятности и функции распределения, условных моментных характеристик при наличии измерений Y_0^t или Z_0^t.

Далее приведем вариант алгоритма решения задачи прогнозирования и результаты его апробации для модельного примера. Алгоритм построен на основе:

а) стохастического метода Эйлера [5] для приближенного решения стохастических дифференциальных уравнений;

б) метода «максимального сечения» для моделирования пуассоновских потоков [11, 12] в предположении, что между узлами сетки может быть не более одной точки пуассоновского потока интенсивности (4).

Алгоритм решения задачи прогнозирования

Шаг 1. Задать M – начальное число моделируемых траекторий вспомогательного случайного процесса; h – шаг численного интегрирования; величину Λ^* – мажоранту для интенсивности $\Lambda(t,x,z)$, которую можно оценить, например, по результатам пробного моделирования траекторий системы наблюдения, заданной уравнениями (1) и (3):

$$\Lambda^*=\max_{t_k\in[t_0,T],\,i=1,2,\dots,M}\Lambda(t_k,X_k^i,Z_k^i),$$

где максимум берется по всем значениям вектора состояния X_k^i и соответствующего ему вектора измерений Z_k^i в узлах сетки $\{t_k = t_0 + kh\}$ по M смоделированным траекториям.

Получить реализации начальных векторов состояний X_0 и X_0^i с учетом заданного распределения (X_0 – начальный вектор состояния для оцениваемой траектории, X_0^i – для вспомогательных траекторий, по которым приближенно вычисляется оптимальная оценка) и моменты времени ξ^i, через которые могут произойти разрывы, обрывы или ветвления траекторий: $\xi^i = -\ln\beta / \Lambda^*$, $i = 1, 2, \ldots, M$. В последнем соотношении β – различные реализации случайной величины, равномерно распределенной на интервале $(0,1)$.

Положить $Y_0 = 0$, $k = 0$, $t_*^i = t_0$, $F_0^i = 1$ (индикатор, показывающий при $F_k^i = 1$, что траектория с номером i не оборвалась к моменту времени t_k), $i = 1, 2, \ldots, M$.

Шаг 2. Положить $\kappa = k$, $\tau_*^i = t_*^i$, $\xi_*^i = \xi^i$ (запомнить параметры и текущее время), $i = 1, 2, \ldots, M$. Далее положить $i = 1$, $j = 0$ (j содержит число новых ветвей на шаге k), $\Xi = 1$ (этап прогнозирования).

Шаг 3. Проверить условие $t_\kappa + \Delta(t_\kappa) - t_k > 0$. При выполнении этого условия перейти к шагу 4. Иначе положить

$$M_\kappa = \sum_{i=1}^{M} F_\kappa^i \quad (M_0 = M)$$

и найти прогноз $\hat{X}_k$ как выборочное среднее реализаций $\mathbb{X}_k = \{X_k^i\}_{i=1,2,\ldots,M;\, F_\kappa^i = 1}$:

$$\hat{X}_\kappa = \frac{1}{M_\kappa} \sum_{i=1,2,\ldots,M;\, F_\kappa^i = 1} X_k^i.$$

Проверить условие $T - t_\kappa = 0$. При выполнении этого условия завершить процесс, иначе положить $k = \kappa$, $t_*^i = \tau_*^i$, $\xi^i = \xi_*^i$ (восстановить параметры и текущее время), $i = 1, 2, \ldots, M$, затем положить $i = 1$, $\Xi = 0$ (этап фильтрации).

Получить реализацию вектора состояния, для которого проводится оценивание, в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1} = X_k + h\, f(t_k, X_k) + \sqrt{h}\,\sigma(t_k, X_k)\Delta W,$$

и векторы измерений:

$$Z_k = c(t_k, X_k) + \frac{\zeta(t_k)}{\sqrt{h}}\Delta V, \quad Y_{k+1} = Y_k + hZ_k.$$

В этих формулах и далее ΔW и ΔV – реализации s-мерного и d-мерного случайных векторов соответственно. Их координаты независимы и имеют нормальное распределение со стандартными параметрами.

Шаг 4. Проверить условие $F_\kappa^i = 0$ (траектория с номером i оборвана). При выполнении этого условия перейти к шагу 9, иначе: при $t_*^i + \xi^i \ge t_k + h$ перейти к шагу 5, а при $t_*^i + \xi^i < t_k + h$ – к шагу 6.

Шаг 5. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1}^i = X_k^i + h\, f(t_k, X_k^i) + \sqrt{h}\,\sigma(t_k, X_k^i)\Delta W.$$

Положить $F_{k+1}^i = 1$ (если $\Xi = 0$) и перейти к шагу 9.

Шаг 6. Получить реализацию вектора состояния в дополнительном узле сетки:

$$\tilde{X} = X_k^i + h_\triangleleft f(t_k, X_k^i) + \sqrt{h_\triangleleft}\,\sigma(t_k, X_k^i)\Delta W, \quad h_\triangleleft = t_*^i + \xi^i - t_k.$$

Получить реализацию α случайной величины, равномерно распределенной на интервале $(0,1)$. Проверить условие $\alpha \le |\Lambda(t_*^i + \xi^i)| / \Lambda^*$, где $\Lambda(t_*^i + \xi^i) = \Lambda(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, Z_k)$, и при выполнении этого условия перейти к шагу 7, иначе – к шагу 8.

Шаг 7. Получить реализацию γ случайной величины, равномерно распределенной на интервале $(0,1)$, и проверить условия:

а) если $\lambda(t_*^i + \xi^i) / \Lambda(t_*^i + \xi^i) \le \gamma$ (разрыв траектории), то получить приращение вектора состояния δ, распределенное согласно заданной плотности вероятности $\psi(t_*^i + \xi^i, \delta \mid \tilde{X})$, положить $\tilde{X} = \tilde{X} + \delta$;

б) если $\Xi = 0$, $\lambda(t_*^i + \xi^i) / \Lambda(t_*^i + \xi^i) > \gamma$ и $\mu^-(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, Z_k) > 0$ (обрыв траектории), то положить $F_{k+1}^i = 0$ ($F_r^i = 0$, $r > k$) и перейти к шагу 9;

в) если $\Xi = 0$, $\lambda(t_*^i + \xi^i) / \Lambda(t_*^i + \xi^i) > \gamma$ и $\mu^+(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, Z_k) > 0$ (ветвление траектории), то положить $j = j + 1$ и получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$ для новой траектории:

$$X_{k+1}^{M+j} = \tilde{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) + \sqrt{h_{\triangleright}}\,\sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) \Delta W, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft} = t_k + h - t_*^i - \xi^i.$$

Положить $F_{k+1}^{M+j} = 1$ ($F_r^{M+j} = 0$, $r \le k$), $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$ и получить реализацию длины промежутка времени, через который может произойти разрыв, обрыв или ветвление новой траектории с номером $M + j$: $\xi^{M+j} = -\ln \beta / \Lambda^*$. Моделирование величины ξ^{M+j} проводится до тех пор, пока $t_*^{M+j} + \xi^{M+j}$ не окажется больше или равно t_{k+1}.

Шаг 8. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$X_{k+1}^i = \tilde{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) + \sqrt{h_{\triangleright}}\,\sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) \Delta W, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft}.$$

Положить $F_{k+1}^i = 1$, $t_*^i = t_*^i + \xi^i$ и получить новую реализацию для длины промежутка времени, через который может произойти разрыв, обрыв или ветвление траектории с номером i: $\xi^i = -\ln \beta / \Lambda^*$. Моделирование величины ξ^i проводится до тех пор, пока $t_*^i + \xi^i$ не окажется больше или равно t_{k+1}.

Шаг 9. Проверить условия:

а) если $i = M$, то положить $M = M + j$, $t_{k+1} = t_k + h$, $k = k + 1$ и перейти к шагу 3 при $\Xi = 1$ или к шагу 2 при $\Xi = 0$;

б) если $i < M$, то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 4.

В приведенном алгоритме предполагается, что на промежутке времени, определяемом шагом численного интегрирования h, может произойти только один разрыв, обрыв или ветвление для каждой траектории (чтобы это выполнялось, рекомендуется выбирать шаг из условия $h < 0.1 / \Lambda^*$). Если это не так, то пуассоновский поток моделируется неточно. Можно предложить точный алгоритм моделирования, как это сделано для стохастических дифференциальных систем без учета пуассоновских возмущений [2]. Тем не менее, для многих задач такой упрощенный подход к моделированию пуассоновского потока оказывается приемлемым по точности, что ниже демонстрируется на модельном примере.

4. Численные расчеты

Пусть линейная система наблюдения описывается уравнениями

$$dX(t) = -\sin 5t\, X(t)dt + dW(t) + dQ(t), \quad X(0) = X_0;$$

$$dY(t) = 0.2\, X(t)dt + dV(t), \quad Y(0) = 0,$$

где $t \in [0,1]$, $X, Y \in \mathbb{R}$; $W(t)$ и $V(t)$ – одномерные стандартные винеровские процессы, не зависящие от случайной величины X_0, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием 1 и дисперсией 0.01.

Величина приращения δ при разрыве траектории имеет нормальное распределение. Ее математическое ожидание равно –1, а дисперсия составляет 0.01. Интенсивность разрывов $\lambda = 1$. Прогнозирование осуществляется для фиксированного момента времени $T = 1$, т.е. $\Delta(t) = 1 - t$.

На рис. 1 приведены результаты моделирования линейной системы наблюдения и прогнозирования с применением стохастического метода Эйлера с шагом интегрирования $h = 0.001$ и начальным числом траекторий вспомогательного случайного процесса $M = 10000$. Используются следующие обозначения: толстой линией показана оцениваемая траектория $X(t)$, пунктиром показаны измерения $Y(t)$, тонкая линия используется для прогноза, полученного с помощью моделирования траекторий вспомогательного случайного процесса с разрывами, обрывами и ветвлениями, а точками показан прогноз, полученный с помощью предиктора Калмана–Бьюси. Приведенные графики демонстрируют, каким образом уточняется прогноз в фиксированный момент времени $T = 1$ в зависимости от текущего времени t (уточнение прогноза в динамике). Рис. 2 содержит те же графики, но в другом масштабе для большей наглядности результатов моделирования.

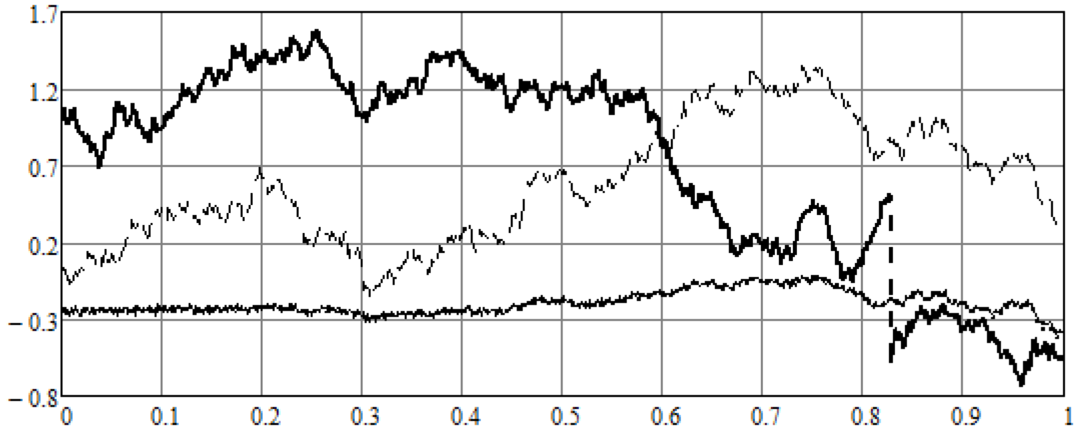

Рис. 1. Пример моделирования системы наблюдения и результаты прогнозирования

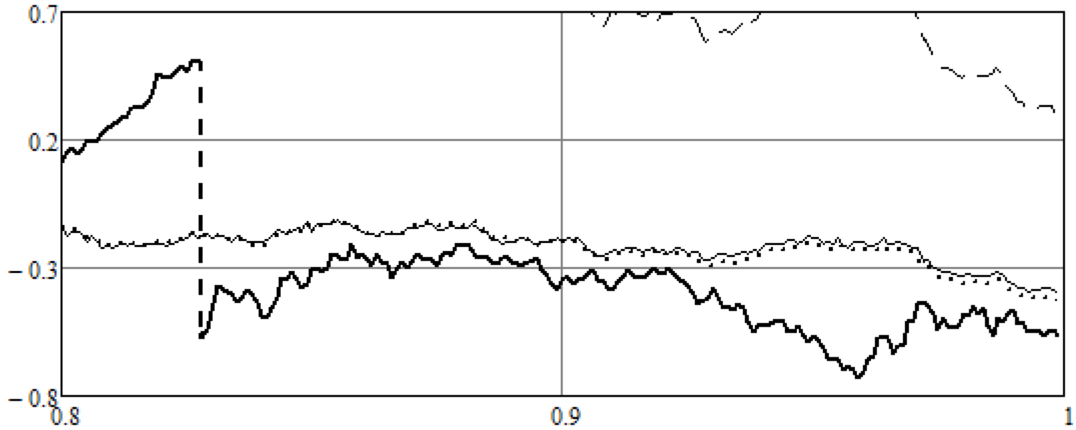

Рис. 2. Пример моделирования системы наблюдения и результаты прогнозирования (фрагмент)

На рис. 3 график зависимости числа траекторий вспомогательного случайного процесса с разрывами, обрывами и ветвлениями от времени показан с помощью толстой линии, точками показано число обрывов, а тонкой линией – число ветвлений.

Объем выборки $\mathbb{X}_k$ менялся в пределах от 9352 до 10372 при моделировании траекторий.

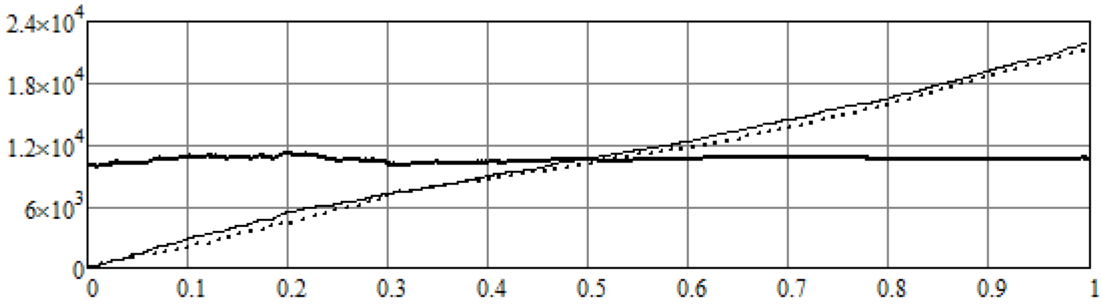

Рис. 3. Число траекторий вспомогательного случайного процесса, обрывов и ветвлений

Далее изменим коэффициенты сноса в уравнениях объекта наблюдения и измерительной системы и рассмотрим нелинейную систему наблюдения:

$$dX(t) = -\sin 5t \cos^2 3X(t)dt + dW(t) + dQ(t),$$

$$dY(t) = 0.2\cos X(t)dt + dV(t),$$

оставив остальные условия без изменений.

На рис. 4 приведены результаты моделирования нелинейной системы наблюдения и прогнозирования с применением стохастического метода Эйлера с шагом интегрирования $h = 0.001$ и начальным числом траекторий вспомогательного случайного процесса $M = 10000$. Предиктор Калмана–Бьюси применялся для соответствующих линеаризованных уравнений. Рис. 5 содержит графики зависимости числа траекторий вспомогательного случайного процесса с разрывами, обрывами и ветвлениями от времени, число обрывов и ветвлений. Обозначения такие же, как и ранее. Объем выборки $\mathbb{X}_k$ менялся в пределах от 9299 до 10653 при моделировании траекторий.

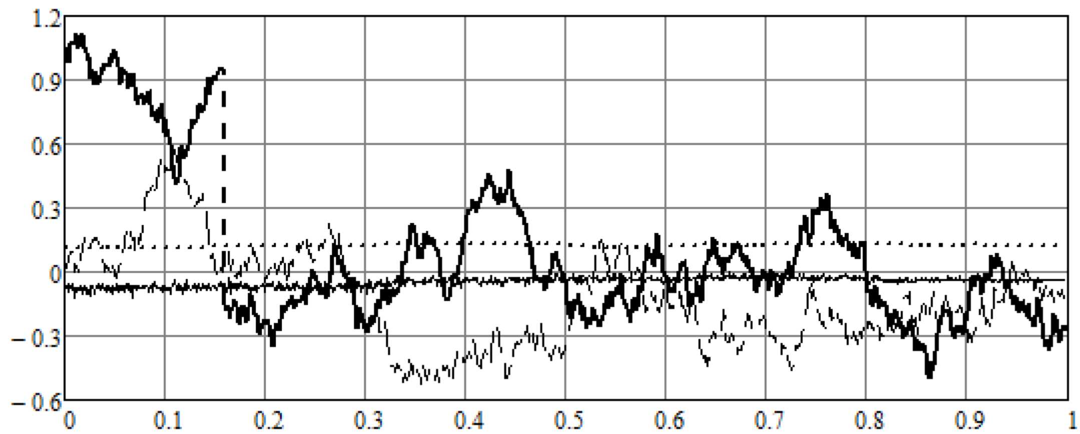

Рис. 4. Пример моделирования системы наблюдения и результаты прогнозирования

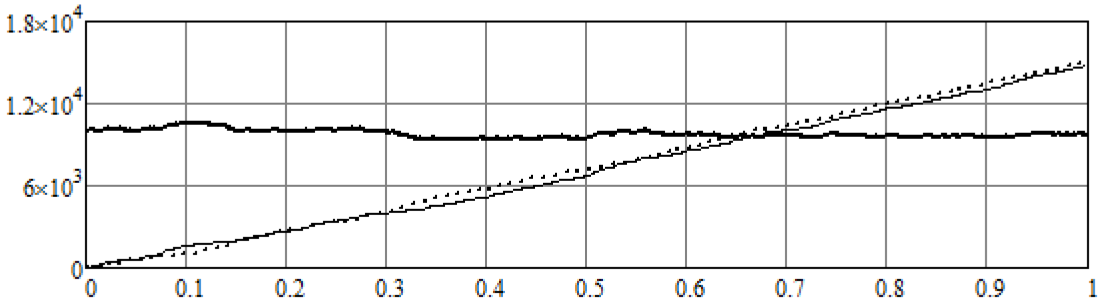

Рис. 5. Число траекторий вспомогательного случайного процесса, обрывов и ветвлений

Разработанный статистический алгоритм рекомендуется для решения задачи прогнозирования в нелинейных стохастических дифференциальных системах с пуассоновской составляющей. Использование метода «максимального сечения» для моделирования пуассоновских потоков в предположении, что между узлами сетки может быть не более одной точки пуассоновского потока интенсивности (4), сделало алгоритм более простым, позволило уменьшить вычислительные затраты и повысить эффективность алгоритма. Такое предположение не является ограничительным, если шаг сетки согласован с интенсивностью пуассоновских потоков. Проведенные численные расчеты демонстрируют высокую точность прогноза вектора состояния и преимущества данного метода на нелинейных системах.

Литература

1. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. О прогнозировании состояний стохастических дифференциальных систем с пуассоновской составляющей // Проблемы оптимизации сложных систем. XI Международная Азиатская школа-семинар, Чолпон-Ата, 27 июля – 7 августа 2015 г.: Тр. конф. Ч. 1. – 2015. – С. 16–24.
2. Рыбаков К.А. Алгоритмы прогнозирования состояний в стохастических дифференциальных системах на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2015. № 1. – С. 25–38.
3. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990.
4. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. – М.: Логос, 2007.
5. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Методы описания, анализа и синтеза нелинейных систем управления. – М.: Изд-во МАИ, 1993.
6. Аверина Т.А. Методы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2009. Т. 12. № 4. – С. 361–374.
7. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2013. № 3. – С. 85–116.
8. Platen E., Bruti-Liberati N. Numerical Solution of Stochastic Differential Equations with Jumps in Finance. – Springer, 2010.
9. Рыбаков К.А. Модифицированный алгоритм оптимальной фильтрации сигналов на основе моделирования специального ветвящегося процесса // Авиакосмическое приборостроение. – 2013. № 3. – С. 15–20.
10. Рыбаков К.А. Приближенный метод фильтрации сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. – 2014. № 207. – С. 54–60.
11. Михайлов Г.А. Метод моделирования длины свободного пробега частиц // Атомная энергия. – 1970. Т. 28. № 2. – С. 175.
12. Аверина Т.А. Использование модификаций метода максимального сечения для моделирования систем со случайной структурой с распределенными переходами // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2016. Т. 19. № 3. – С. 235–247.