УДК 519.676 + 621.391

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ АНСАМБЛЕМ ТРАЕКТОРИЙ ПРИ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ И СЛУЧАЙНОМ ИЗМЕНЕНИИ СТРУКТУРЫ[1]

Т.А. Аверина
Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН
Россия, 630090, Новосибирск, просп. Акад. Лаврентьева, 6
Новосибирский государственный университет
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
E-mail: ata@osmf.sscc.ru

К.А. Рыбаков
Московский авиационный институт (государственный технический университет)
Россия, 125993, Москва, Волоколамское ш., 4
E-mail: rkoffice@mail.ru

Ключевые слова: импульсные воздействия, метод максимального сечения, метод Монте-Карло, метод статистического моделирования, система со случайной структурой, система управления ансамблем траекторий, спектральный метод.

Рассматривается задача анализа нелинейных систем управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры системы и скачков (случайных импульсных воздействий). Предлагается два метода ее решения: метод статистического моделирования и спектральный метод.

METHODS AND ALGORITHMS OF ANALYSIS OF SYSTEMS OF CONTROL OF A PATH ENSEMBLE UNDER PULSE ACTIONS AND RANDOM STRUCTURE VARYING[2]

T.A. Averina
Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences
Russia, 630090, Novosibirsk, Akad. Lavretieva prospect, 6

[1]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 09-01-00798, 11-01-00282).

[2]The paper has been partially supported by the Russian Foundation for Basic Researches (projects 09-01-00798, 11-01-00282).

Novosibirsk State University
Russia, 630090, Novosibirsk, Pirogova street, 2
E-mail: ata@osmf.sscc.ru

K.A. Rybakov
Moscow Aviation Institute (*State technical university*)
Russia, 125993, Moscow, Volokolamskoye highway, 4
E-mail: rkoffice@mail.ru

Key words: pulse action, maximal section method, Monte Carlo method, statistical modeling method, random structure system, system of control of path ensemble, spectral method.

A problem of analysis of nonlinear systems of control of a path ensemble is considered, under accounting random varying system structure and shocks (random pulse actions). Two methods to solve it are proposed: the statistical modeling method and the spectral method.

1. Введение

В настоящей работе рассматривается задача анализа многомерных нелинейных систем управления ансамблем траекторий [1, 2] при импульсных воздействиях и случайном изменении структуры. Для решения этой задачи применяются два подхода: метод статистического моделирования [3, 4] и спектральный метод [5, 6]. Оба метода позволяют оценивать любые вероятностные характеристики выходных процессов, в том числе и плотность вероятности. Аналогичные подходы были использованы авторами при анализе стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами без учета импульсных воздействий [7, 8].

Рассматриваемая математическая модель позволяет описывать сложные системы управления, имеющие неопределенность в задании начальных данных, различные режимы функционирования, и подверженные импульсным воздействиям.

2. Постановка задачи анализа нелинейных систем управления ансамблем траекторий

Пусть $[y(t), s(t)]^{\mathrm{T}}$ – смешанный процесс, где $s(t)$ – дискретный случайный процесс с конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, S\}$, S – заданное число структур системы, а $y(t)$ – n-мерный процесс, описываемый при условии $s(t) = l$ обыкновенным дифференциальным уравнением (ОДУ)

$$\frac{dy(t)}{dt} = f^{(l)}\big(t, y(t)\big), \quad y(t_0) = y_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

где $t \in [t_0, T]$; $f^{(l)}(t, y)\colon [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – вектор-функция размера n; l – номер структуры системы ($l = 1, 2, \ldots, S$); множество Ω ограничено, оно характеризует неопределенность задания начальных данных [2].

Вероятность перехода дискретного случайного процесса $s(t)$ удовлетворяет следующему условию [7]:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}\bigl\{s(t+\Delta t)=r \mid s(t)=l,\ y(t)=y\bigr\}=\nu_{lr}(t,y)\,\Delta t+o(\Delta t),\\
&\mathrm{P}\bigl\{s(t+\Delta t)=l \mid s(t)=l,\ y(t)=y\bigr\}=1-\nu_{ll}(t,y)\,\Delta t+o(\Delta t),\\
&\qquad\qquad\qquad s(t_0)=s_0,\quad l,r=1,2,\ldots,S,\quad l\neq r,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где функция $\nu_{lr}(t,y)\colon [t_0,T]\times\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ называется интенсивностью перехода,

$$
\nu_{ll}(t,y)=\sum_{r=1\neq l}^{S}\nu_{lr}(t,y).
$$

Это условие обеспечивает при любом фиксированном $y\in\mathbb{R}^n$ отсутствие нескольких переключений процесса $s(t)$ за малый интервал времени Δt. Предполагается, что в моменты переключения траектории процесса $y(t)$ могут быть как непрерывными (случай точного восстановления реализаций), так и иметь разрывы [7]. В последнем случае дополнительно задаются законы, определяющие величину скачка в момент смены структуры. Например, в качестве такой характеристики удобно взять условную плотность вероятности $\psi_{lr}(t,y\mid\tilde y)$ или плотность вероятности $\psi_{lr}(t,\theta)$ величины скачка $\theta=y-\tilde y$ (при точном восстановлении реализаций $\psi_{lr}(t,y\mid\tilde y)=\psi_{lr}(t,y-\tilde y)=\delta(y-\tilde y)$).

Систему, описываемую соотношениями (1) и (2), можно рассматривать как стохастическую мультиструктурную систему с распределенными переходами (при отсутствии случайных возмущений, действующих на объект управления).

Следуя [2, 7], процесс $s(t)$ будем называть *процессом смены структуры*, $[y(t),s(t)]^{\mathrm{T}}$ – *процессом со случайной структурой*, а систему, описываемую уравнениями (1) и (2), – *системой управления ансамблем траекторий с учетом случайного изменения структуры*. Кроме того, при фиксированном $t\in T$ будем называть $y(t)$ *вектором состояния*, а $[y(t),s(t)]^{\mathrm{T}}$ – *расширенным вектором состояния*.

Наиболее полной вероятностной характеристикой расширенного вектора состояния является упорядоченная совокупность ненормированных плотностей распределения $p^{*(l)}(t,y)\colon [t_0,T]\times\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ вектора состояния ($l=1,2,\ldots,S$), удовлетворяющих условию нормировки

$$
\sum_{l=1}^{S}\int_{\mathbb{R}^n}p^{*(l)}(t,y)\,dy=1,\quad t\in[t_0,T].
$$

Начальное состояние $[y_0,s_0]^{\mathrm{T}}$ описывается заданными ненормированными плотностями распределения $p_0^{*(l)}(y)$ или нормированной начальной плотностью $p_0(y)$ и вероятностями $\mathrm{P}_0^{(l)}=\mathrm{P}\{s(t_0)=l\}$ того, что структура системы имеет номер l в момент времени t_0, при этом $p_0^{*(l)}(y)=\mathrm{P}_0^{(l)}\,p_0(y)$; $l=1,2,\ldots,S$. Функции $p_0^{*(l)}(y)$ и $p_0(y)$ характеризуют распределение начального состояния y_0:

$$
\sum_{l=1}^{S}\int_{\Omega}p_0^{*(l)}(y)\,dy=\sum_{l=1}^{S}\mathrm{P}_0^{(l)}=1,\quad \int_{\Omega}p_0(y)\,dy=1;
$$

$$
p_0^{*(l)}(y)=0\quad\text{и}\quad p_0(y)=0\quad\text{при}\quad y\notin\Omega.
$$

Известно [7], что ненормированные плотности распределения $p^{*(l)}(t,y)$ удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова. При нулевой матрице диффузии они имеют вид

$$\frac{\partial p^{*(l)}(t,y)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i}\left[f_i^{(l)}(t,y)\,p^{*(l)}(t,y)\right] - \\ - \nu_{ll}(t,y)\,p^{*(l)}(t,y) + \sum_{r=1\neq l}^{S} u_{rl}(t,y), \\ p^{*(l)}(t_0,y) = p_0^{*(l)}(y), \quad l = 1,2,\dots,S, \tag{3}$$

где

$$u_{rl}(t,y) = \begin{cases} \nu_{rl}(t,y)\,p^{*(r)}(t,y), & \text{если при переходе из } r\text{-й структуры в } l\text{-ю траектории остаются непрерывными;} \\ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \nu_{rl}(t,\tilde{y})\,p^{*(r)}(t,\tilde{y})\,\psi_{rl}(t,y \mid \tilde{y})\,d\tilde{y}, & \text{если при переходе из } r\text{-й структуры в } l\text{-ю траектории разрывны.} \end{cases}$$

Вероятность того, что в момент времени t структура системы имеет номер l, т.е. $s(t) = l$, задается выражением

$$\mathrm{P}^{(l)}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} p^{*(l)}(t,y)\,dy, \quad l = 1,2,\dots,S,$$

а плотность вероятности $p^{(l)}(t,y)$ вектора состояния при условии $s(t) = l$ связана с $p^{*(l)}(t,y)$ следующим соотношением:

$$p^{*(l)}(t,y) = \mathrm{P}^{(l)}(t)\,p^{(l)}(t,y), \quad l = 1,2,\dots,S.$$

Безусловная плотность вероятности $p(t,y)$ вектора состояния определяется в виде

$$p(t,y) = \sum_{l=1}^{S} p^{*(l)}(t,y)$$

или

$$p(t,y) = \sum_{l=1}^{S} \mathrm{P}^{(l)}(t)\,p^{(l)}(t,y).$$

Таким образом, *задача анализа систем управления ансамблем траекторий* (1), (2) состоит в нахождении ненормированных плотностей распределения $p^{*(l)}(t,y)$ вектора состояния по заданным функциям $f^{(l)}(t,y)$, интенсивностям $\nu_{lr}(t,y)$, законам поведения траекторий в моменты смены структуры (плотностям $\psi_{lr}(t,y \mid \tilde{y})$) и ненормированным плотностям распределения $p_0^{*(l)}(y)$; $l,r = 1,2,\dots,S$.

Наряду с нахождением функций $p^{*(l)}(t,y)$ можно рассматривать задачу нахождения маргинальных плотностей вероятности и моментных характеристик вектора состояния, а также задачу определения вероятностных характеристик времени перехода из одной структуры в другую [4, 5, 7].

3. Анализ систем управления ансамблем траекторий методом статистического моделирования

Опишем статистический алгоритм [3, 9, 10] решения задачи анализа систем управления ансамблем траекторий.

Статистический алгоритм должен в себя включать: численное решение ОДУ (1), а также моделирование моментов смены структуры, номера новой структуры и величины скачка (при разрыве траекторий). В рассматриваемом случае распределение моментов смены структуры определяется интенсивностями переходов (2). Так как интенсивности переходов зависят от вектора состояния, то моделирование моментов смены структуры будет осуществляться по *методу «максимального сечения»* [11, 12, 13]. Применение этого метода требует выполнения условий $\nu_{li}(t, y) \leq \bar{\nu}_{li} = \mathrm{const}$, $i = 1, 2, \ldots, S$, $i \neq l$, на всем интервале интегрирования $[t_0, T]$.

Алгоритм моделирования траекторий процесса $[y(t), s(t)]^{\mathrm{T}}$:

0) $k := 0$; моделируем $[y_0, s_0]^{\mathrm{T}}$ согласно заданным ненормированным плотностям распределения $p_0^{*(l)}(y)$, $l = 1, 2, \ldots, S$;
1) $l := s_k$; моделируем возможный момент выхода из l-й структуры $t_{k+1} = t_k + \tau$, где τ – случайная величина с плотностью $p(x) = \bar{\nu}_l \exp(-\bar{\nu}_l\, x)$, $\bar{\nu}_l = \sum\limits_{i=1\neq l}^{S} \bar{\nu}_{li}$ (по формуле $\tau = -\frac{\ln\alpha}{\bar{\nu}_l}$, α – равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ случайная величина); если $t_{k+1} > T$, то $t_{k+1} := T$;
2) моделируем номер r (возможный номер новой структуры) с вероятностью $p_r = \frac{\bar{\nu}_{lr}}{\bar{\nu}_l}$, $r \neq l$, $r = 1, 2, \ldots, S$;
3) решаем уравнение (1) для l-й структуры на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ численным методом с шагом h и находим y_{k+1} – вектор состояния системы в момент t_{k+1}, при этом шаг должен быть согласован с интенсивностью перехода, например, $h \leq \frac{0.1}{\bar{\nu}_l}$;
4) $k := k + 1$;
5) проверяем условие смены структуры: если $\alpha_1 \leq \frac{\nu_{lr}(t_k, y_k)}{\bar{\nu}_{lr}}$ (α_1 – равномерно распределенная на интервале $(0, 1)$ случайная величина), то переходим к п. 6; иначе переходим к п. 7;
6) меняем номер структуры на r-й: $s_k := r$; если задано условие разрыва траектории при переходе из l-й структуры в r-ю, то моделируется новая случайная величина y_k согласно плотности $\psi_{lr}(t, y \mid y_k)$ или величина скачка θ согласно плотности $\psi_{lr}(t, \theta)$, тогда $y_k := y_k + \theta$;
7) если $t_k < T$, то переходим к п. 1, иначе процесс моделирования завершается.

Замечания.

1. Пункт 5 в алгоритме будет отсутствовать, если интенсивности переходов постоянны, так как проверяемое условие будет всегда истинно.
2. Выбор численного метода решения конкретной системы ОДУ и шага интегрирования h определяются видом этой системы и требуемой точностью вычисления вероятностных характеристик выходных процессов. Для различных структур

могут использоваться разные численные методы с различными шагами интегрирования.

Сетка по времени является суперпозицией равномерной сетки с шагом h и моментов смены структуры $\{t_k\}$.

3. Метод «максимального сечения» предполагает моделирование времени $\bar{\tau}$, через которое произойдет смена структуры, по следующему правилу:

$$\bar{\tau} = \zeta_N, \quad N = \min\left\{n\colon \alpha_n \le \frac{\nu_{lr}(\tilde{t}+\zeta_n)}{\bar{\nu}_{lr}}\right\}, \quad \zeta_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k,$$

где ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_n, $\ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с плотность $p(x)$ (см. пункт 1 алгоритма); α_1, α_2, $\ldots$, α_n, $\ldots$ – последовательность независимых равномерно распределенных на интервале $(0,1)$ случайных величин; $\nu_{lr}(t)$ – значение интенсивности на траектории, т.е. $\nu_{lr}(t) = \nu_{lr}(t, y(t))$; $\tilde{t}$ – начальный момент времени или момент предыдущей смены структуры.

Вместо описанного подхода можно использовать более экономичный *модифицированный метод «максимального сечения»*, согласно которому

$$N = \min\left\{n\colon 1-\alpha > \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{\nu_{lr}(\tilde{t}+\zeta_i)}{\bar{\nu}_{lr}}\right)\right\},$$

где α – равномерно распределенная на интервале $(0,1)$ случайная величина [14].

Использование модифицированного метода «максимального сечения» сокращает время моделирования неоднородного пуассоновского процесса (последовательности моментов времени смены структуры) и снижает конструктивную размерность алгоритма, связанную с многомерной равномерностью используемых псевдослучайных чисел [12, 15].

Существует много численных методов решения задачи Коши для систем ОДУ. Например, можно использовать *обобщенный одностадийный метод типа Розенброка* [16]:

$$y_{k+1} = y_k + \left[E - \frac{h}{2}\,\frac{\partial f^{(l)}(t_k, y_k)}{\partial y}\right]^{-1} f^{(l)}(t_k, y_k)\, h, \tag{4}$$

где через E обозначена единичная матрица размеров $n \times n$, $\frac{\partial f^{(l)}(t,y)}{\partial y}$ – матрица Якоби, или *метод Эйлера*:

$$y_{k+1} = y_k + f^{(l)}(t_k, y_k)\, h. \tag{5}$$

Метод (4) является A-устойчивым и имеет второй порядок сходимости для автономных систем ОДУ [16]. Метод Эйлера (5) имеет первый порядок сходимости для произвольных систем ОДУ.

Условная оптимизация статистического алгоритма, проводится аналогично случаю, рассмотренному в [8]. В частности, если численный метод решения имеет p-й порядок сходимости, то при вычислении функционалов от решения условно оптимальным является число испытаний, вычисленное по формуле $N = O(h^{-2p})$, и погрешность вычисления функционалов имеет порядок $O(N^{-1/2})$, где N – объем выборки, h – шаг интегрирования. А при вычислении гистограммы условно оптимальным является число испытаний, вычисленное по формуле $N = O(h^{-3p})$ при $n_g = O(N^{1/3})$, где n_g – число шагов при построении гистограммы. Погрешность вычисления гистограммы в норме пространства $L_2(\mathbb{R})$ имеет порядок $O(N^{-1/3})$. Также в [8] приведены соотношения для вычисления вероятностных характеристик выходных процессов (моментов первого и второго порядков, гистограммы маргинальных плотностей вероятности).

4. Спектральный метод анализа систем управления ансамблем траекторий

Искомые ненормированные плотности распределения $p^{*(l)}(t,y)$ вектора состояния системы (1), (2) удовлетворяют системе уравнений (3). Опишем спектральный метод [5, 6] решения этих уравнений.

Пусть $\{e_{i_0 i_1\ldots i_n}(t,y)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ – ортонормированный базис пространства $L_2([t_0,T]\times\mathbb{R}^n)$, причем функции $e_{i_0 i_1\ldots i_n}(t,y)$ порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{\chi_{i_1\ldots i_n}(y)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространств $L_2([t_0,T])$ и $L_2(\mathbb{R}^n)$ соответственно, т.е.

$$e_{i_0 i_1\ldots i_n}(t,y) = q_{i_0}(t)\,\chi_{i_1\ldots i_n}(y), \quad i_0,i_1,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots$$

Спектральной характеристикой функции $z(t,y)$ называется $(n+1)$-мерная бесконечная матрица $Z(n+1,0)$ (см. [5, 6, 17, 18]), элементы которой представляют собой коэффициенты разложения этой функции в ряд по функциям базисной системы $\{e_{i_0 i_1\ldots i_n}(t,y)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, т.е.

$$Z(n+1,0) = (z_{i_0 i_1\ldots i_n}), \quad z_{i_0 i_1\ldots i_n} = \int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e_{i_0 i_1\ldots i_n}(t,y)\,z(t,y)\,dy\,dt, \qquad i_0,i_1,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots \tag{6}$$

Аналогично, *спектральной характеристикой функции* $z(y)$ называется n-мерная бесконечная матрица $Z(n,0)$ с элементами

$$Z(n,0) = (z_{i_1\ldots i_n}), \quad z_{i_1\ldots i_n} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{i_1\ldots i_n}(y)\,z(y)\,dy, \qquad i_1,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots \tag{7}$$

Спектральной характеристикой линейного оператора $\mathcal{A}$, определенного на пространстве функций аргументов t и y, называется $2(n+1)$-мерная бесконечная матрица

$A(n+1,n+1)$, элементы которой задаются соотношением

$$
\begin{gathered}
A(n+1,n+1)=(a_{i_0i_1\ldots i_nj_0j_1\ldots j_n}),\\
a_{i_0i_1\ldots i_nj_0j_1\ldots j_n}=\int\limits_{t_0}^{T}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e_{i_0i_1\ldots i_n}(t,y)\,\mathcal{A}e_{j_0j_1\ldots j_n}(t,y)\,dy\,dt,\\
i_0,i_1,\ldots,i_n,j_0,j_1,\ldots,j_n=0,1,2,\ldots
\end{gathered}
\tag{8}
$$

Обозначим через $\Phi^{*(l)}(n+1,0)$ и $\Phi_0^{*(l)}(n,0)$ спектральные характеристики функций $p^{*(l)}(t,y)$ и $p_0^{*(l)}(y)$ соответственно (спектральные характеристики $\Phi^{*(l)}(n+1,0)$ также называются *обобщенными характеристическими функциями* [5, 17]), $l=1,2,\ldots,S$. Кроме того, пусть $\mathcal{P}(n+1,n+1)$ и $\mathcal{P}_i(n+1,n+1)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial y_i}$, а $F_i^{(l)}(n+1,n+1)$ и $V_{lr}(n+1,n+1)$ – спектральные характеристики операторов умножения на функции $f_i^{(l)}(t,y)$ и $\nu_{lr}(t,y)$ соответственно; $i,j=1,2,\ldots,n$; $l,r=1,2,\ldots,S$; $l\neq r$; $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t=t_0$.

В предположении существования обобщенного решения системы уравнений (3) спектральные характеристики $\Phi^{*(l)}(n+1,0)$ удовлетворяют системе *уравнений обобщенных характеристических функций*:

$$
\begin{aligned}
&P(n+1,n+1)\cdot\Phi^{*(l)}(n+1,0)-q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0^{*(l)}(n,0)=\\
&=-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot F_i^{(l)}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{*(l)}(n+1,0)-\\
&\quad-V_{ll}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{*(l)}(n+1,0)+\\
&\qquad+\sum_{r=1\neq l}^{S}F_{rl}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{*(r)}(n+1,0),\qquad l=1,2,\ldots,S,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где

$$P(n+1,n+1)=\mathcal{P}(n+1,n+1)+\big(q(1,0;t_0)\cdot q^{\mathrm{T}}(1,0;t_0)\big)\otimes E(n,n),$$

$E(n,n)$ – $2n$-мерная единичная матрица, $\otimes$ – знак тензорного умножения многомерных матриц;

$$V_{ll}(n+1,n+1)=\sum_{r=1\neq l}^{S}V_{lr}(n+1,n+1);$$

матрица $F_{rl}(n+1,n+1)$ совпадает с $V_{rl}(n+1,n+1)$, если при переходе из r-й структуры в l-ю траектории остаются непрерывными, иначе $F_{rl}(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика интегрального оператора Фредгольма $\mathcal{F}_{rl}$, определяемого соотношением

$$\mathcal{F}_{rl}z(t,y)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\nu_{rl}(t,\tilde{y})\,z(t,\tilde{y})\,\psi_{rl}(t,y\mid\tilde{y})\,d\tilde{y}.$$

Уравнения (9) образуют систему линейных неоднородных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются элементы $\phi_{i_0i_1\ldots i_n}^{*(l)}$ спектральных характеристик $\Phi^{*(l)}(n+1,0)$, т.е. коэффициенты разложения искомых ненормированных плотностей распределения $p^{*(l)}(t,y)$ в ряды по функциям базисной системы $\{e_{i_0i_1\ldots i_n}(t,y)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Таким образом, после решения (9) ненормированные плотности распределения вектора состояния могут быть представлены в виде

$$p^{*(l)}(t,y) = \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty} \phi^{*(l)}_{i_0 i_1\ldots i_n}\, e_{i_0 i_1\ldots i_n}(t,y),$$

$$(t,y) \in [t_0,T]\times\mathbb{R}^n, \quad l=1,2,\ldots,S.$$

По найденным спектральным характеристикам $\Phi^{*(l)}(n+1,0)$ могут быть определены вероятности $\mathrm{P}^{(l)}(t)$, маргинальные плотности вероятности и моментные характеристики вектора состояния с использованием свойств спектральных характеристик линейных функционалов [5], при этом для определения маргинальных плотностей вероятности спектральным методом требуется, чтобы функции базисной системы $\{\chi_{i_1\ldots i_n}(y)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ порождались всевозможными произведениями функций базисных систем

$$\{\chi^1_{i_1}(y_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \quad \ldots, \quad \{\chi^n_{i_n}(y_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$$

пространства $L_2(\mathbb{R})$, т.е.

$$\chi_{i_1\ldots i_n}(y) = \chi^1_{i_1}(y_1)\cdots\chi^n_{i_n}(y_n), \quad i_1,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots$$

Алгоритмы нахождения вероятностей $\mathrm{P}^{(l)}(t)$, маргинальных плотностей вероятности и моментных характеристик вектора состояния спектральным методом по известным спектральным характеристикам $\Phi^{*(l)}(n+1,0)$ ненормированных плотностей распределения вектора состояния, а также алгоритмы вычисления спектральных характеристик операторов дифференцирования и умножения относительно различных базисных систем приведены в [5].

Замечания.

1. Как правило, при расчетах для нахождения приближенного решения задачи анализа все спектральные характеристики усекаются, тогда функции $p^{*(l)}(t,y)$ представляются следующим образом:

$$p^{*(l)}(t,y) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{L_n-1} \phi^{*(l)}_{i_0 i_1\ldots i_n}\, e_{i_0 i_1\ldots i_n}(t,y),$$

   при этом в выражениях (6)–(8) достаточно положить $i_0 = 0,1,\ldots,L_0-1$; $i_1 = 0,1,\ldots,L_1-1$; $\ldots$; $i_n = 0,1,\ldots,L_n-1$ (величины L_0, L_1, $\ldots$, L_n называются *порядками усечения спектральных характеристик*), т.е. (9) будет представлять собой систему $L\cdot S$ линейных алгебраических уравнений с $L\cdot S$ неизвестными, где $L = L_0\cdots L_n$, решение которой может быть получено известными методами.
2. В качестве базисной системы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать, например, полиномы Лежандра, косинусоиды, функции Уолша и Хаара, а в качестве базисных систем $\{\chi^1_{i_1}(y_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $\ldots$, $\{\chi^n_{i_n}(y_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ – функции Эрмита [5, 6, 19, 20, 21].

Решение системы (9) и, следовательно, задачи анализа можно получить в явном виде, для этого перепишем эту систему в виде матричного уравнения

$$A(n+2,n+2)\cdot\Phi(n+2,0) = B(n+2,0),$$

в котором многомерные матрицы $A(n+2,n+2)$, $\Phi(n+2,0)$ и $B(n+2,0)$ образованы с помощью операции агрегатирования:

$$A(n+2,n+2) = \begin{bmatrix} A_{11}(n+1,n+1) & \dots & A_{1S}(n+1,n+1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{S1}(n+1,n+1) & \dots & A_{SS}(n+1,n+1) \end{bmatrix},$$

$$\Phi(n+2,0) = \begin{bmatrix} \Phi^{*(1)}(n+1,0) \\ \vdots \\ \Phi^{*(S)}(n+1,0) \end{bmatrix},$$

$$B(n+2,0) = \begin{bmatrix} q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{*(1)}(n,0) \\ \vdots \\ q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{*(S)}(n,0) \end{bmatrix},$$

где

$$A_{lr}(n+1,n+1) = \begin{cases} P(n+1,n+1) + \\ \qquad + \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i(n+1,n+1) \cdot F_i^{(l)}(n+1,n+1) + \\ \qquad\quad + V_{ll}(n+1,n+1), \quad l=r, \\ -F_{rl}(n+1,n+1), \quad l \neq r. \end{cases}$$

Тогда

$$\Phi(n+2,0) = A^{-1}(n+2,n+2) \cdot B(n+2,0). \tag{10}$$

На заключительном этапе спектральные характеристики $\Phi^{*(l)}(n+1,0)$, $l=1,2,\dots,S$, можно получить как результат декомпозиции матрицы $\Phi(n+2,0)$ (как результат выделения подблоков).

Кроме того, заметим, что при использовании блочно-иерархической формы представления многомерных матриц все алгебраические операции, включая и обращение, сводятся к операциям с обычными матрицами (при использовании усечения спектральных характеристик это квадратные матрицы и матрицы-столбцы) [5].

Явный вид решения можно получить и не прибегая к агрегатированию и декомпозиции многомерных матриц, но это целесообразно для случаев $S=2$, $S=3$ или для систем с однонаправленными переходами между структурами, т.е. номер структуры может только возрастать или только убывать, и систем, переходы в которых возможны только между соседними структурами. В других ситуациях лучше использовать (10).

5. Заключение

Проведенные численные эксперименты свидетельствуют о том, что при сопоставимом времени счета оба метода обеспечивают достаточную для приложений точность анализа систем управления ансамблем траекторий при импульсных воздействиях и случайном изменении структуры. Точность оценок, полученных методом статистического моделирования, зависит от шага интегрирования h, числа моделируемых траекторий N и используемого генератора псевдослучайных чисел. Точность оценок, полученных спектральным методом, зависит от выбора базисных систем и порядков усечения L_0, L_1, $\ldots$, L_n.

Основные преимущества предлагаемых подходов состоят в следующем:

1) универсальность, обусловленная возможностью применения методов при линейных, нелинейных и существенно нелинейных характеристиках системы управления, различных законах распределения начального состояния и величины скачков;
2) получение в результате решения задачи анализа наиболее полной вероятностной характеристики, описывающей изменение вектора состояния системы;
3) простота реализации алгоритмов анализа вне зависимости от размерности вектора состояния;
4) развитое алгоритмическое обеспечение метода статистического моделирования (алгоритмы численного решения дифференциальных уравнений, алгоритмы моделирования случайных величин) и спектрального метода (алгоритмы расчета спектральных характеристик функций и линейных операторов относительно различных базисных систем).

Список литературы

1. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками. Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. 228 с.
2. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. М.: Вузовская книга, 2008. 312 с.
3. Аверина Т.А. Статистический алгоритм моделирования динамических систем с переменной структурой // Сиб. журн. вычисл. матем. 2002. Т. 5, № 1. С. 1-10.
4. Averina T.A. Algorithm for statistical simulation of two types of random-structure systems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2001. Vol. 16, No. 6. P. 467-482.
5. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. М.: Вузовская книга, 2006. 392 с.
6. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 160 с.
7. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993. 272 с.
8. Averina T.A., Rybakov K.A. Comparison of a statistical simulation method and a spectral method for analysis of stochastic multistructure systems with distributed transitions // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. 2007. Vol. 22, No. 5. P. 431-448.
9. Averina T.A. Algorithm of statistical simulation of dynamic systems with distributed change of structure // Monte Carlo Methods and Appl. 2004. Vol. 10, No. 3-4. P. 221-226.
10. Аверина Т.А. Статистическое моделирование динамических систем с разделением времени с автономным управлением // Вестник НГУ. Серия Матем., механика, информ. 2004. Т. 4, № 2. С. 3-23.
11. Ермаков С.М., Михайлов Г.А. Статистическое моделирование. М.: Наука, 1982. 296 с.
12. Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Докл. АН. 2009. Т. 428, № 2. С. 163-165.
13. Аверина Т.А. Методы статистического моделирования неоднородного пуассоновского ансамбля // Сиб. журн. вычисл. матем. 2009. Т. 12, № 4. С. 361-374.
14. Аверина Т.А., Михайлов Г.А. Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // ЖВМИМФ. 2010. Т. 50, № 6. С. 1005-1016.
15. Соболь И.М. Численные методы Монте-Карло. М.: Наука, 1973. 312 с.
16. Artemiev S.S., Averina T.A. Numerical analysis systems of ordinary and stochastic differential equations. Utrecht: VSP, 1997. 176 p.

17. Rybakov K.A., Sotskova I.L. Spectral method for analysis of switching diffusions // IEEE Trans. on Automat. Control. 2007. Vol. AC-52, No. 7. P. 1320-1325.
18. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций // АиТ. 2011. № 2. С. 183-194.
19. Романов В.А., Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Электронный журнал «Труды МАИ». 2010. № 39. http://www.mai.ru/science/trudy/.
20. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974. 336 с.
21. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. М.: Изд-во МАИ, 2011. 220 с.