

Два метода анализа стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами*

Т.А. Аверина, К.А. Рыбаков

УДК 519.676+621.391

Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Два метода анализа стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2008. — Т. 11, № 1. — С. 1–18.

Рассматриваются два метода решения задачи анализа стохастических мультиструктурных систем управления с распределенными переходами между структурами: метод статистического моделирования и спектральный метод. В работе изложены алгоритмы решения задачи анализа. Сравнение и эффективность методов демонстрируются на решении модельных примеров.

Ключевые слова: *стохастические мультиструктурные системы, системы со случайной структурой, задача анализа, обобщенные уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, метод статистического моделирования, спектральный метод.*

Averina T.A., Rybakov K.A. Two methods for analyzing stochastic multi-structural systems with distributed structure changes // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2008. — Vol. 11, № 1. — P. 1–18.

The statistical simulation method and the spectral method for the stochastic multi-structural systems analysis are considered. There are given algorithms for the analysis problem solution. Numerical examples are given to illustrate the efficiency of the proposed methods.

Key words: *stochastic multi-structural systems, switching diffusions, analysis problem, generalized Fokker–Planck–Kolmogorov equations, statistical simulation method, spectral method.*

1. Введение

Современные задачи управления техническими объектами описываются математическими моделями, заданными различными уравнениями на случайных интервалах времени, т. е. используют модели *стохастических мультиструктурных систем*. Стохастические мультиструктурные системы также называют *системами со случайной структурой*. Эти модели позволяют учитывать случайные факторы, различные режимы функционирования, скачкообразные внешние воздействия или возможный отказ элементов.

Примерами систем со случайной структурой могут служить системы управления сближением летательных аппаратов; системы поиска, захвата и сопровождения сигнала в задачах навигации и управления полетом летательных аппаратов; системы комбинированного наведения на цель; а также системы управления с возможными нарушениями и отказами [1, 2].

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов “Ведущие научные школы” НШ-4774.2006.1 и РФФИ (проект №08-01-00344).

Причины, приводящие к изменению структуры системы, могут иметь различный характер, например, выход из строя одной из подсистем; перерывы при поступлении информации в контуре управления; адаптация к условиям внешней среды; скачкообразно изменяющиеся помехи, являющиеся результатом естественных или искусственных внешних воздействий и т. д.

Таким образом, системы со случайной структурой являются математическими моделями мультирежимных стохастических систем автоматического управления, для которых характерно в случайные моменты времени скачкообразное изменение отдельных параметров или структуры, т. е. совокупности функциональных элементов и связей между ними.

Аналитическое решение для таких систем можно найти лишь в исключительных случаях. Поэтому наибольшее распространение получили приближенные методы, которые можно разделить на две группы. К первой группе относятся методы, основанные на непосредственном моделировании системы управления при воздействии случайных возмущений с последующей статистической обработкой результатов. Для второй группы характерен переход от исходной задачи к детерминированной, например, к решению уравнений для плотности вероятности или моментных характеристик процессов, протекающих в системе.

В настоящей работе рассматривается задача анализа стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами и два подхода к ее решению: метод статистического моделирования [3], основанный на моделировании системы управления, и спектральный метод [4], в основе которого лежит переход к детерминированной задаче (к решению обобщенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова) с последующей параметризацией плотности вероятности вектора состояния системы. Оба метода позволяют оценивать любые вероятностные характеристики выходных процессов, в том числе и плотность вероятности.

Применение методов статистического моделирования и спектрального метода при анализе систем с распределенными переходами имеет ряд преимуществ по сравнению с другими приближенными методами [1, 2], например методами функциональной аппроксимации (метод ортогонального разложения, метод полигауссовой аппроксимации), позволяющими перейти от обобщенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова к системе обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности для коэффициентов некоторого функционального ряда, аппроксимирующего плотность вероятности или характеристическую функцию. Другие подходы, а именно методы гауссовой и двухмоментной параметрической аппроксимации, требуют задания структуры априори неизвестной плотности вероятности.

Оба метода с незначительными изменениями могут применяться и в случае неточного восстановления реализаций [1, 4].

Следует отметить, что метод статистического моделирования применим не только для систем с распределенными переходами, но и с сосредоточенными, т. е. в случае, когда переключение между структурами происходит при достижении вектором состояния заданной гиперповерхности в пространстве \mathbb{R}^n [1], а также для систем с разделением времени [5, 6].

В работе [5] было проведено сравнение метода статистического моделирования и метода двухмоментной параметрической аппроксимации плотностей вероятности на решении задач анализа систем с сосредоточенными переходами. Анализ численных расчетов позволил сделать вывод, что при вычислении интегральных характеристик решения (таких, как вероятность захвата, плотность вероятности времени захвата, нормированный поток

поглощения) оба метода дают хорошо совпадающие оценки. А при вычислении плотности вероятности вектора состояния, а также вероятностных моментов лучше использовать метод статистического моделирования.

Спектральный метод является более универсальным по сравнению с другими методами, основанными на ортогональных разложениях, поскольку соотношения для решения задачи анализа представляют собой алгебраические уравнения, инвариантные к выбору базисных систем и их свойствам. Использование различных базисных систем является не только одним из методов контроля правильности и точности расчетов [7], но и позволяет получать решение задачи анализа с различными свойствами, определяемыми свойствами функций, образующих базисные системы.

2. Постановка задачи анализа

Рассмотрим процесс $[\mathbf{y}(t), s(t)]^T$, где $s(t)$ — дискретный случайный процесс с конечным множеством состояний $\{1, 2, \dots, S\}$, S — число структур системы, а $\mathbf{y}(t)$ — n -мерный непрерывный случайный процесс, описываемый при условии $s(t) = l$ стохастическим дифференциальным уравнением (СДУ) в форме Стратоновича [1]:

$$d\mathbf{y}(t) = a^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0, \quad (1)$$

или в эквивалентной форме Ито

$$d\mathbf{y}(t) = f^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))dt + \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y}(t))d\mathbf{w}(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (2)$$

Здесь $t \in [t_0, T]$; $\mathbf{w}(t)$ — m -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от \mathbf{y}_0 ; $a^{(l)}(t, \mathbf{y})$, $f^{(l)}(t, \mathbf{y})$: $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — вектор-функции размера n , связанные соотношением [8]

$$f_i^{(l)}(t, \mathbf{y}) = a_i^{(l)}(t, \mathbf{y}) + \frac{1}{2} \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^m \frac{\partial \sigma_{ij_2}^{(l)}(t, \mathbf{y})}{\partial y_{j_1}} \sigma_{j_1 j_2}^{(l)}(t, \mathbf{y}), \quad i = 1, \dots, n,$$

$\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$: $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ — матричная функция размера $n \times m$; l — номер структуры, $l = 1, 2, \dots, S$.

Заметим, что если $\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$ не зависит от \mathbf{y} , то функции $f^{(l)}(t, \mathbf{y})$ и $a^{(l)}(t, \mathbf{y})$ совпадают. В этом случае не будем оговаривать в каком смысле понимается уравнение, описывающее процесс $\mathbf{y}(t)$.

Вероятность перехода дискретного случайного процесса $s(t)$ удовлетворяет условию [1]

$$\begin{aligned} P(s(t + \Delta t) = r \mid s(t) = l, \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}) &= \nu_{lr}(t, \mathbf{y})\Delta t + O(\Delta t), \\ P(s(t + \Delta t) = l \mid s(t) = l, \mathbf{y}(t) = \mathbf{y}) &= 1 - \nu_{ll}(t, \mathbf{y})\Delta t + O(\Delta t), \\ s(t_0) = s_0, \quad l, r = 1, 2, \dots, S, \quad l \neq r, \end{aligned} \quad (3)$$

где функция $\nu_{lr}(t, \mathbf{y})$: $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ называется *интенсивностью* перехода, $\nu_{ll}(t, \mathbf{y}) = \sum_{r=1, r \neq l}^S \nu_{lr}(t, \mathbf{y})$. Данное условие обеспечивает при любом фиксированном $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ отсутствие нескольких переключений процесса $s(t)$ за малый интервал времени Δt . Предполагается, что в моменты переключения траектории процесса $\mathbf{y}(t)$ остаются непрерывными, т. е. рассматривается случай точного восстановления реализаций.

По принятой в [1] терминологии $s(t)$ называется *процессом смены структуры*, процесс $[\mathbf{y}(t), s(t)]^T$ — *процессом со случайной структурой*, а система, описываемая уравнениями (1), (3) (или (2), (3)), называется *стохастической мультиструктурной системой с распределенными переходами между структурами*. Кроме того, при фиксированном $t \in T$ будем называть $\mathbf{y}(t)$ *вектором состояния*, а $[\mathbf{y}(t), s(t)]^T$ — *расширенным вектором состояния*.

Наиболее полной вероятностной характеристикой расширенного вектора состояния является упорядоченная совокупность *ненормированных плотностей распределения* $p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) : [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ вектора состояния, $l = 1, 2, \dots, S$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{l=1}^S \int_{\mathbb{R}^n} p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1, \quad t \in [t_0, T]. \quad (4)$$

Известно [1], что ненормированные плотности распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{*(l)}(t, \mathbf{y})}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} \left[f_i^{(l)}(t, \mathbf{y}) p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \left[g_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{y}) p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \right] - \\ & \nu_{ll}(t, \mathbf{y}) p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) + \sum_{r=1 \neq l}^S \nu_{rl}(t, \mathbf{y}) p^{*(r)}(t, \mathbf{y}), \quad l = 1, 2, \dots, S, \end{aligned} \quad (5)$$

с начальными и краевыми условиями

$$p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \Big|_{t=t_0} = p_0^{*(l)}(\mathbf{y}), \quad p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y}=\pm\infty} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, S,$$

где $g_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{y})$ — элементы матрицы диффузии $g^{(l)}(t, \mathbf{y}) = \sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})[\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})]^T$.

Вероятность того, что в момент времени t система находится в l -й структуре, т. е. $s(t) = l$, задается выражением

$$P^{(l)}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad l = 1, 2, \dots, S, \quad (6)$$

а плотность вероятности $p^{(l)}(t, \mathbf{y})$ вектора состояния при условии $s(t) = l$ связана с $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ следующим соотношением:

$$p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) = P^{(l)}(t) p^{(l)}(t, \mathbf{y}), \quad l = 1, 2, \dots, S. \quad (7)$$

Безусловная плотность вероятности $p(t, \mathbf{y})$ вектора состояния определяется в виде

$$p(t, \mathbf{y}) = \sum_{l=1}^S p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) \quad \text{или} \quad p(t, \mathbf{y}) = \sum_{l=1}^S P^{(l)}(t) p^{(l)}(t, \mathbf{y}). \quad (8)$$

Начальное состояние $[\mathbf{y}_0, s_0]^T$ описывается заданными ненормированными плотностями распределения $p_0^{*(l)}(\mathbf{y})$, $l = 1, 2, \dots, S$.

Таким образом, *задача анализа систем, описываемых уравнениями (1), (3) (или (2), (3))*, состоит в нахождении ненормированных плотностей распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ вектора состояния по заданным функциям $a^{(l)}(t, \mathbf{y})$ (или $f^{(l)}(t, \mathbf{y})$), $\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$, интенсивностям $\nu_{rl}(t, \mathbf{y})$ и ненормированным плотностям распределения $p_0^{*(l)}(\mathbf{y})$, $l, r = 1, 2, \dots, S$.

Наряду с нахождением функций $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ можно рассматривать задачу нахождения маргинальных плотностей вероятности и моментных характеристик вектора состояния (в том числе взвешенных и условных), а также задачу определения вероятностных характеристик времени перехода из одной структуры в другую [1, 4, 5].

3. Анализ систем с распределенными переходами методом статистического моделирования

Опишем статистический алгоритм решения задачи анализа систем с распределенными переходами, построенный в работе [3].

Статистический алгоритм должен в себя включать: численное решение СДУ (1) или (2), а также моделирование моментов смены структуры и номера новой структуры. В рассматриваемом случае распределение моментов смены структуры определяется интенсивностями переходов (3). Так как интенсивности переходов зависят от вектора состояния, то моделирование моментов смены структуры будет осуществляться по “методу максимального сечения” [9]. Применение этого метода требует выполнения следующих условий:

$$\nu_{li}(t, \mathbf{y}) \leq \bar{\nu}_{li} = \text{const}, \quad i = 1, \dots, S, \quad i \neq l,$$

на всем интервале интегрирования $[t_0, T]$.

Алгоритм моделирования траекторий процесса $[\mathbf{y}(t), s(t)]^T$:

- 0) $k := 0$; моделируем $[\mathbf{y}_k, s_k]^T$ в момент t_k согласно заданному $[\mathbf{y}_0, s_0]^T$;
- 1) $l := s_k$; моделируем возможный момент выхода из l -й структуры $t_{k+1} = t_k + \tau$, где τ — случайная величина с плотностью $p(x) = \bar{\nu}_l \exp(-\bar{\nu}_l x)$, $\bar{\nu}_l = \sum_{i=1, i \neq l}^S \bar{\nu}_{li}$ (по формуле $\tau = -\frac{\ln \alpha}{\bar{\nu}_l}$, α — равномерно распределенная случайная величина на $(0, 1)$); если $t_{k+1} > T$, то $t_{k+1} := T$;
- 2) моделируем номер r (возможный номер новой структуры) с вероятностью $p_r = \bar{\nu}_{lr} / \bar{\nu}_l$, $r \neq l$, $r = 1, \dots, S$;
- 3) решаем уравнение (1) или (2) для l -й структуры на интервале $[t_k, t_{k+1}]$ численным методом для СДУ с шагом $h > 0$ и находим \mathbf{y}_{k+1} — вектор состояния системы в момент t_{k+1} (шаг должен быть согласован с интенсивностью перехода, например $h \leq 0.1 / \bar{\nu}_l$);
- 4) $k := k + 1$;
- 5) проверяем условие смены структуры: если $\alpha_1 \leq \nu_{lr}(t_k, \mathbf{y}_k) / \bar{\nu}_{lr}$ (α_1 — равномерно распределенная случайная величина на $(0, 1)$), то переходим на 6); иначе переходим на 7);
- 6) меняем номер структуры на r -й: $s_k := r$;
- 7) если $t_k < T$, то переходим на 1), иначе процесс моделирования завершается.

Замечание. Пункт 5) в алгоритме будет отсутствовать, если интенсивности переходов постоянны, так как проверяемое условие будет всегда истинно.

Выбор численного метода решения конкретной системы СДУ и шага интегрирования h определяются видом этой системы и требуемой точностью вычисления вероятностных характеристик выходных процессов. Для различных структур могут использоваться разные численные методы с различными шагами интегрирования.

Если требуется оценить траекторию процесса $\mathbf{y}(t)$, то необходимо уравнение (1) или (2) решать численным методом, сходящимся в среднеквадратическом смысле.

Определение 1. Численный метод *сходится* на решении задачи Коши для (1) или (2) с порядком p в среднеквадратическом смысле, если

$$\max_{1 \leq k \leq K} \mathbb{E}(|\mathbf{y}(t_k) - \mathbf{y}_k|^2 | \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0) = O(h^p), \quad h \rightarrow 0,$$

где \mathbf{y}_k — численное решение в момент времени t_k , $t_k = t_0 + kh$, h — постоянный шаг интегрирования, $t_K = T$, \mathbb{E} — операция вычисления математического ожидания.

Если требуется оценить некоторый функционал от решения, то достаточно (1) или (2) решать слабо сходящимся численным методом.

Определение 2. Численный метод *слабо сходится* на решении задачи Коши для (1) или (2) с порядком p , если для любой достаточно гладкой функции $f(\mathbf{y})$

$$\max_{1 \leq k \leq K} |\mathbb{E}(f(\mathbf{y}(t_k)) | \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0) - \mathbb{E}(f(\mathbf{y}_k) | \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0)| = O(h^p), \quad h \rightarrow 0.$$

Существует много численных методов решения задачи Коши для СДУ. Мы приведем те из них, которые будут использованы ниже при численных расчетах.

Если каждая структура системы управления задана уравнением (1) (в форме Стратоновича), то для его численного решения можно использовать *обобщенный одностадийный метод типа Розенброка* [10]:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \left[E - \frac{h}{2} \frac{\partial a^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k)}{\partial \mathbf{y}} \right]^{-1} \left[a^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k)h + \sum_{j=1}^m \sigma_{\cdot j}^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k) \sqrt{h} \zeta_{jk} + \frac{h}{2} \sum_{i, j_1, j_2=1}^m \frac{\partial \sigma_{\cdot j_2}^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k)}{\partial y_i} \sigma_{i j_1}^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k) \zeta_{j_1 k} \zeta_{j_2 k} \right]. \quad (9)$$

Если используется форма Ито (2), то для численного решения можно использовать *обобщенный одностадийный метод типа Розенброка* [10]:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + \left[E - \frac{h}{2} \frac{\partial f^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k)}{\partial \mathbf{y}} \right]^{-1} \left[f^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k)h + \sum_{j=1}^m \sigma_{\cdot j}^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k) \sqrt{h} \zeta_{jk} \right] \quad (10)$$

или *метод Эйлера*:

$$\mathbf{y}_{k+1} = \mathbf{y}_k + f^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k)h + \sum_{j=1}^m \sigma_{\cdot j}^{(l)}(t_k, \mathbf{y}_k) \sqrt{h} \zeta_{jk}. \quad (11)$$

В приведенных выражениях через E обозначена единичная матрица размера $n \times n$, $\partial a^{(l)}(t, \mathbf{y})/\partial \mathbf{y}$ и $\partial f^{(l)}(t, \mathbf{y})/\partial \mathbf{y}$ — матрицы Якоби; $\sigma_{\cdot j}^{(l)}(t, \mathbf{y})$ обозначает j -й столбец матрицы $\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$; ζ_k — m -мерный вектор независимых между собой нормальных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Эти методы имеют первый порядок среднеквадратической и слабой сходимости для произвольных систем СДУ. Методы (9), (10) для линейных систем с аддитивным шумом являются *асимптотически несмещенными с любым шагом h* , а в случае, когда $m = 1$ или матрица $\sigma^{(l)}(t, \mathbf{y})$ не зависит от \mathbf{y} , имеют второй порядок среднеквадратической сходимости [10].

При численной реализации методов нормально распределенную случайную величину ζ с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией можно моделировать по формуле $\zeta = \sqrt{-2 \ln \alpha_1} \cos 2\pi\alpha_2$, где α_1 и α_2 — независимые равномерно распределенные случайные величины на интервале $(0, 1)$ [9].

При решении задач анализа систем со случайной структурой возникает потребность в вычислении вероятностных характеристик выходных процессов. Некоторые из них и их статистические оценки мы приведем ниже [1, 11]. При этом будем использовать следующие обозначения: N — общее число моделируемых траекторий (объем выборки); $N_k^{(l)}$ — число траекторий, находящихся в l -й структуре в момент времени t_k (т.е. $s_k = l$ и $\sum_{l=1}^S N_k^{(l)} = N$ для всех t_k); $y_{irk}^{(l)}$ обозначает i -ю координату вектора состояния \mathbf{y}_k в момент времени t_k на r -й траектории при $s_k = l$.

1. *Безусловные моментные характеристики:* вектор математического ожидания $m(t)$, $m_i(t) = \mathbb{E}(y_i(t))$; матрица вторых моментов $\Phi(t)$, $\Phi_{ij}(t) = \mathbb{E}(y_i(t)y_j(t))$; матрица центральных вторых моментов $\Theta(t)$, $\Theta_{ij}(t) = \mathbb{E}((y_i(t) - m_i(t))(y_j(t) - m_j(t)))$. Статистические оценки для них в момент времени t_k определяются следующим образом:

$$\bar{m}_{ik} = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^N y_{irk}, \quad \bar{\Phi}_{ijk} = \frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^N y_{irk}y_{jrk}, \quad \bar{\Theta}_{ijk} = \frac{1}{N-1} \sum_{r=1}^N (y_{irk} - \bar{m}_{ik})(y_{jrk} - \bar{m}_{jk}).$$

Статистические оценки для взвешенных и условных моментных характеристик приведены в [6].

2. *Вероятности нахождения системы* в l -й структуре в момент времени t_k оцениваются по формуле $\bar{P}_k^{(l)} = N_k^{(l)}/N$.
3. *Гистограммы маргинальных ненормированной плотности распределения и условной плотности вероятности i -й координаты вектора состояния в k -й момент времени* $p_i^{*(l)}(t_k, y_i)$ и $p_i^{(l)}(t_k, y_i)$ строятся следующим образом:
 - а) область $[a_i^{(l)}, b_i^{(l)}]$ изменения $y_i^{(l)}(t_k)$ равномерно разбивается на q частей δ_j с шагом $\hat{h} = (b_i^{(l)} - a_i^{(l)})/q$; $j = 1, \dots, q$;
 - б) для момента t_k на каждой траектории для i -й координаты вектора состояния при $s_k = l$ считаем, сколько $y_{irk}^{(l)}$ принадлежит множеству δ_j ; полученное значение обозначаем $N_{jk}^{(l)}$ ($\sum_{j=1}^q N_{jk}^{(l)} = N_k^{(l)}$);
 - в) в качестве приближенных значений для $p_i^{*(l)}(t_k, y_i)$ и $p_i^{(l)}(t_k, y_i)$ на множестве δ_j берутся соответственно величины

$$\bar{p}_{jk}^{*(l)} = \frac{N_{jk}^{(l)}}{N \hat{P}_k^{(l)}} \quad \text{и} \quad \bar{p}_{jk}^{(l)} = \frac{N_{jk}^{(l)}}{N \hat{h}}.$$

4. *Гистограмма маргинальной плотности вероятности i -й координаты вектора состояния в k -й момент времени* $p_i(t_k, y_i)$ строится следующим образом:
 - а) область $[a_i, b_i]$ изменения $y_i(t_k)$ равномерно разбивается на q частей δ_j с шагом $\hat{h} = (b_i - a_i)/q$; $j = 1, \dots, q$;
 - б) для момента t_k на каждой траектории для i -й координаты вектора состояния считаем, сколько y_{irk} принадлежит множеству δ_j ; полученное значение обозначаем N_{jk} ($\sum_{j=1}^q N_{jk} = N$);

в) в качестве приближенного значения для $p_i(t_k, y_i)$ на множестве δ_j берется величина $\bar{p}_{jk} = N_{jk}/(N\hat{h})$.

Приведенные в шагах 3 и 4 алгоритмы естественным образом модифицируются для получения оценок ненормированной плотности распределения, условной и безусловной плотностей вероятности вектора состояния (строится разбиение области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ изменения $\mathbf{y}(t_k)$). Аналогичная ситуация справедлива и для маргинальных плотностей нескольких координат вектора состояния.

4. Условная оптимизация статистического алгоритма

Важной является проблема оптимального (согласованного) выбора параметров статистического алгоритма при вычислении математического ожидания некоторого функционала от решения: шага численного метода h и размера выборки N . Ставится следующая задача условной оптимизации [12]: найти минимум трудоемкости $\min_{h,N} S(h, N)$ при $T^{(B)}(h, N) = \gamma$, где γ — фиксированное положительное число, а $T^{(B)}$ — верхняя граница погрешности в норме функционального пространства B . Общая схема решения этой задачи такова: из соотношения для $T^{(B)}(h, N)$ один из параметров (например N) выражается через другой h и соответствующее выражение подставляется в выражение для S , при этом получается функция одного переменного h , которая исследуется на минимум.

Полагаем, что трудоемкость имеет вид произведения $S(h, N) = Cn_h N$ (здесь $n_h = (T - t_0)/h$ — число шагов по времени).

Обозначим $\hat{\mathbf{y}}_t$ — кусочно-линейный процесс, полученный по значениям \mathbf{y}_k , а также введем обозначения для функционалов от решения:

$$f(h) := f(\hat{\mathbf{y}}_t), \quad J(h) := \mathbb{E}f(h), \quad J := \mathbb{E}f(\mathbf{y}_t).$$

Для оценки некоторого функционала от решения СДУ (1) численным методом моделируется N траекторий процесса и величина $J(h)$ оценивается средним арифметическим полученных выборочных значений $f(h)$:

$$J_N(h) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f^{(i)}(h), \quad \mathbb{E}J_N(h) = J(h).$$

Погрешность оценки $J_N(h)$ определяется величиной

$$|\mathbb{E}(J - J_N(h))| \leq |J - J(h)| + \mathbb{E}|J(h) - J_N(h)| \leq C_1 h^p + \frac{\sqrt{\mathbf{D}f(h)}}{\sqrt{N}}, \quad (12)$$

где \mathbf{D} — дисперсия.

Нас будет интересовать только порядок по γ оптимальных параметров h_{opt} и N_{opt} . Так как трудоемкость S пропорциональна произведению $n_h N$ (где n_h — число шагов по времени), то достаточно приравнять погрешность численного метода $C_1 h^p$ и статистическую погрешность C_2/\sqrt{N} и получить требуемый порядок из соотношения

$$C_1 h^p + \frac{C_2}{\sqrt{N}} = \gamma.$$

Для уравнивания численной и статистической погрешностей получаем, что условно оптимальным является число испытаний

$$N = O(h^{-2p}). \quad (13)$$

Тогда для требуемой погрешности γ имеет место соотношение вида

$$N_{\text{opt}} \asymp \gamma^{-2}, \quad h_{\text{opt}} \asymp \gamma^{1/p},$$

а соответствующая трудоемкость имеет порядок $S \asymp \gamma^{-2-1/p}$.

Теперь рассмотрим проблему оптимального (согласованного) выбора параметров статистического алгоритма при вычислении гистограммы решения: шага численного метода h , размера выборки N и шага гистограммы h_g .

Вычислим функциональную оценку погрешности уклонения гистограммы $\pi^*(x)$ одномерной случайной величины $\hat{\xi} = y_k$, $a \leq y_k \leq b$ (с плотностью $\hat{p}(x)$), от графика плотности $p(x)$ случайной величины $y(t_k)$ в норме пространства $L_2([a, b])$:

$$\begin{aligned} B^2(p, \pi^*) &= \left(\mathbb{E} \|p(x) - \pi^*(x)\|_{L_2([a, b])} \right)^2 \leq \left(\mathbb{E} \left\{ \int_a^b [p(x) - \pi^*(x)]^2 dx \right\}^{1/2} \right)^2 \\ &\leq \int_a^b \mathbb{E} [p(x) - \pi^*(x)]^2 dx = \int_a^b \mathbf{D}\pi^*(x) dx + \int_a^b [p(x) - \mathbb{E}\pi^*(x)]^2 dx. \end{aligned} \quad (14)$$

Будем считать шаг гистограммы постоянным, т. е. $h_g = (b-a)/n_g$. Тогда гистограмма $\pi^*(x)$ определяется

$$\pi^*(x) = \frac{m_k}{Nh_g}, \quad x \in I_k = [a + (k-1)h_g, a + kh_g],$$

где m_k — число наблюдений случайной величины $\hat{\xi} = y_k$, попавших в отрезок I_k . Заметим, что m_k является случайной величиной с биномиальным распределением и означает число успехов в N независимых испытаниях Бернулли с вероятностью успеха $\hat{p}_k = \int_{I_k} \hat{p}(x) dx$. Поэтому $\mathbf{D}m_k = N\hat{p}_k(1 - \hat{p}_k)$ и первое слагаемое в (14) имеет вид

$$\int_a^b \mathbf{D}\pi^*(x) dx = \sum_{k=1}^{n_g} \int_{I_k} \mathbf{D} \frac{m_k}{Nh_g} dx = \sum_{k=1}^{n_g} \int_{I_k} \frac{\hat{p}_k(1 - \hat{p}_k)}{Nh_g^2} dx = \frac{C_1}{Nh_g} = \frac{C_1 n_g}{N}.$$

Если $\frac{d^2 \hat{p}}{dx^2}$ ограничена, то для второго слагаемого в (14) имеем

$$\|p(x) - \mathbb{E}\pi^*(x)\| \leq \|p(x) - \hat{p}(x)\| + \|\hat{p}(x) - \mathbb{E}\pi^*(x)\| \leq c_2 h^p + \frac{c_3}{n_g},$$

где учтено, что численный метод решения СДУ слабо сходится с порядком p .

Таким образом,

$$B^2(p, \pi^*) \leq C_1 n_g / N + C_2 h^{2p} + C_3 n_g^{-2}. \quad (15)$$

Для получения оптимальных параметров $n_{g, \text{opt}}$, N_{opt} и h_{opt} достаточно приравнять получившиеся погрешности и получить требуемый порядок из соотношения

$$C_1 n_g / N + C_2 h^{2p} + C_3 n_g^{-2} = \gamma^2.$$

Получаем, что условно оптимальными являются следующие соотношения:

$$n_g = O(N^{1/3}), \quad N = O(h^{-3p}). \quad (16)$$

Оптимальный порядок величин h , n_g , N таков:

$$n_{g, \text{opt}} \asymp \gamma^{-1}, \quad N_{\text{opt}} \asymp \gamma^{-3}, \quad h_{\text{opt}} \asymp \gamma^{1/p}.$$

Выбирая параметры таким образом, получаем $B(p, \pi^*) \leq CN^{-1/3}$.

Следовательно, мы получили, что если численный метод решения СДУ имеет p -й порядок слабой сходимости, то при вычислении функционалов от решения условно оптимальным является число испытаний, вычисленное по формуле (14), а при вычислении гистограммы — по формуле (16).

В пункте численных экспериментов при решении методом статистического моделирования оценки функционалов от решения и гистограммы вычислялись одновременно. Оптимальными параметрами для получения наилучшей оценки гистограммы при объеме выборки $N = 10^6$ являются $h = 10^{-2}$, $n_g = 10^2$. Полученные графики приведены на рисунках. Дальнейшее уменьшение шага гистограммы или шага численного метода точность вычисления гистограммы не увеличивает. Дополнительные расчеты проводились при $h = 10^{-2}$ и $n_g = 500$, а также при $h = 10^{-3}$ и $n_g = 500$. Погрешность гистограммы не уменьшается, хотя время вычислений увеличилось (при $h = 10^{-3}$ в 10 раз), что подтверждает полученные результаты.

При $h = 10^{-3}$ для вычисления функционалов от решения условно оптимальным является $N = 10^6$. Погрешности вычисления математических ожиданий функционалов от решения, согласно (12), равны $\gamma = O(10^{-3})$. Приводимые в таблицах результаты численных экспериментов подтверждают полученные результаты и даже демонстрируют более высокую точность вычисления известных вероятностных характеристик решения тестовых примеров.

5. Спектральный метод анализа систем с распределенными переходами

Ненормированные плотности распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ вектора состояния системы с распределенными переходами (1), (3) (или (2), (3)) удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова (5). Опишем спектральный метод решения этих уравнений, построенный в работе [4].

Пусть $\{e_{i_0 \dots i_n}(t, \mathbf{y})\}_{i_0, \dots, i_n=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис пространства $L_2([t_0, T] \times \mathbb{R}^n)$, причем функции $e_{i_0 \dots i_n}(t, \mathbf{y})$ порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y})\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ пространств $L_2([t_0, T])$ и $L_2(\mathbb{R}^n)$ соответственно, т. е.

$$e_{i_0 \dots i_n}(t, \mathbf{y}) = q_{i_0}(t)\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y}), \quad i_0, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots$$

Спектральной характеристикой функции $z(t, \mathbf{y})$ будем называть $(n+1)$ -мерную бесконечную матрицу $Z(n+1, 0)$ (см. [4]), элементы которой представляют собой коэффициенты разложения этой функции в ряд по функциям базисной системы $\{e_{i_0 \dots i_n}(t, \mathbf{y})\}_{i_0, \dots, i_n=0}^{\infty}$, т. е.

$$\begin{aligned} z_{i_0 \dots i_n} &= (e_{i_0 \dots i_n}(t, \mathbf{y}), z(t, \mathbf{y}))_{L_2([t_0, T] \times \mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} e_{i_0 \dots i_n}(t, \mathbf{y}) z(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} dt, \quad i_0, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Аналогично, *спектральной характеристикой функции $z(\mathbf{y})$* называется n -мерная бесконечная матрица $Z(n, 0)$ с элементами

$$z_{i_1 \dots i_n} = (\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y}), z(\mathbf{y}))_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y}) z(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots \quad (18)$$

Спектральной характеристикой линейного оператора \mathcal{A} , определенного на пространстве функций аргументов t и \mathbf{y} , называется $2(n+1)$ -мерная бесконечная матрица $A(n+1, n+1)$, элементы которой определяются соотношением

$$\begin{aligned} a_{i_0 \dots i_n j_0 \dots j_n} &= (e_{i_0 \dots i_n}(t, \mathbf{y}), \mathcal{A}e_{j_0 \dots j_n}(t, \mathbf{y}))_{L_2([t_0, T] \times \mathbb{R}^n)} \\ &= \int_{t_0}^T \int_{\mathbb{R}^n} e_{i_0 \dots i_n}(t, \mathbf{y}) \mathcal{A}e_{j_0 \dots j_n}(t, \mathbf{y}) d\mathbf{y} dt, \quad i_0, \dots, i_n, \quad j_0, \dots, j_n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (19)$$

Обозначим через $\Phi^{*(l)}(n+1, 0)$ и $\Phi_0^{*(l)}(n, 0)$ спектральные характеристики функций $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ и $p_0^{*(l)}(\mathbf{y})$ соответственно, $l = 1, 2, \dots, S$. Кроме того, пусть $\mathcal{P}(n+1, n+1)$, $\mathcal{P}_i(n+1, n+1)$ и $\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1)$ — спектральные характеристики операторов дифференцирования $\partial/\partial t$, $\partial/\partial y_i$ и $\partial^2/\partial y_i \partial y_j$, а $F_i^{(l)}(n+1, n+1)$, $G_{ij}^{(l)}(n+1, n+1)$ и $V_{lr}(n+1, n+1)$ — спектральные характеристики операторов умножения на функции $f_i^{(l)}(t, \mathbf{y})$, $g_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{y})$ и $\nu_{lr}(t, \mathbf{y})$ соответственно; $i, j = 1, 2, \dots, n$; $l, r = 1, 2, \dots, S$; $l \neq r$; $q(1, 0; t_0)$ — матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^\infty$ при $t = t_0$.

Как показано в [4], в предположении существования обобщенного решения системы уравнений (5) спектральные характеристики $\Phi^{*(l)}(n+1, 0)$ удовлетворяют системе уравнений *обобщенных характеристических функций*:

$$\begin{aligned} &P(n+1, n+1) \cdot \Phi^{*(l)}(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0^{*(l)}(n, 0) \\ &= - \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i(n+1, n+1) \cdot F_i^{(l)}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{*(l)}(n+1, 0) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1) \cdot G_{ij}^{(l)}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{*(l)}(n+1, 0) - \\ &\quad V_{ll}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{*(l)}(n+1, 0) + \sum_{r=1 \neq l}^S V_{rl}(n+1, n+1) \cdot \Phi^{*(r)}(n+1, 0), \end{aligned} \quad (20)$$

где $P(n+1, n+1) = \mathcal{P}(n+1, n+1) + (q(1, 0; t_0) \cdot [q(1, 0; t_0)]^T) \otimes E(n, n)$, $E(n, n)$ — $2n$ -мерная единичная матрица, \otimes — знак тензорного умножения многомерных матриц, $V_{ll}(n+1, n+1) = \sum_{r=1 \neq l}^S V_{lr}(n+1, n+1)$; $l = 1, 2, \dots, S$.

Уравнения вида (20) образуют систему линейных неоднородных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются элементы $\phi_{i_0 \dots i_n}^{*(l)}$ матриц $\Phi^{*(l)}(n+1, 0)$, т. е. коэффициенты разложения искомым ненормированных плотностей распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ в ряд по функциям базисной системы $\{e_{i_0 \dots i_n}(t, \mathbf{y})\}_{i_0, \dots, i_n=0}^\infty$. Таким образом, после решения (20) ненормированные плотности распределения вектора состояния могут быть представлены в виде

$$p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) = \sum_{i_0, \dots, i_n=0}^\infty \phi_{i_0 \dots i_n}^{*(l)} e_{i_0 \dots i_n}(t, \mathbf{y}), \quad (t, \mathbf{y}) \in [t_0, T] \times \mathbb{R}^n, \quad l = 1, 2, \dots, S.$$

Решение уравнений (20) может быть получено в явном виде как для общего случая с использованием операций агрегатирования и декомпозиции многомерных матриц, так и для ряда частных случаев: систем с двумя структурами, систем с однонаправленными переходами между структурами и систем, переходы в которых возможны только между соседними структурами [4].

При практических расчетах для нахождения приближенного решения задачи анализа все спектральные характеристики усекаются, тогда функции $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ представляются следующим образом:

$$p^{*(l)}(t, \mathbf{y}) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \dots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \phi_{i_0 \dots i_n}^{*(l)} e_{i_0 \dots i_n}(t, \mathbf{y}), \quad (21)$$

при этом в выражениях (17)–(19) достаточно положить $i_0 = 0, 1, \dots, L_0 - 1, \dots, i_n = 0, 1, \dots, L_n - 1$ (величины L_0, \dots, L_n называются *порядками усечения спектральных характеристик*), т. е. (20) будет представлять собой систему LS линейных алгебраических уравнений с LS неизвестными, где $L = L_0 \dots L_n$, решение которой может быть получено известными методами.

По найденным спектральным характеристикам $\Phi^{*(l)}(n+1, 0)$ могут быть определены вероятности $P^{(l)}(t)$, маргинальные плотности вероятности и моментные характеристики вектора состояния с использованием свойств *спектральных характеристик линейных функционалов* [4], при этом для определения маргинальных плотностей вероятности спектральным методом требуется, чтобы функции базисной системы $\{\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y})\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ порождались всевозможными произведениями функций базисных систем $\{\chi_{i_1}^1(y_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \dots, \{\chi_{i_n}^n(y_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{R})$, т. е.

$$\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y}) = \chi_{i_1}^1(y_1) \dots \chi_{i_n}^n(y_n), \quad i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots$$

Алгоритм приближенного решения задачи анализа систем с распределенными переходами спектральным методом:

- 1) выбрать базисные системы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{\chi_{i_1 \dots i_n}(\mathbf{y})\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ (или $\{\chi_{i_1}^1(y_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \dots, \{\chi_{i_n}^n(y_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$), сформировать базисную систему $\{e_{i_0 \dots i_n}(t, \mathbf{y})\}_{i_0, \dots, i_n=0}^{\infty}$. Выбрать порядки усечения спектральных характеристик L_0, \dots, L_n ;
- 2) вычислить спектральные характеристики $\mathcal{P}(n+1, n+1)$, $\mathcal{P}_i(n+1, n+1)$, $\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1)$, $F_i^{(l)}(n+1, n+1)$, $G_{ij}^{(l)}(n+1, n+1)$, $V_{lr}(n+1, n+1)$, $\Phi_0^{*(l)}(n, 0)$; сформировать матрицу-столбец $q(1, 0; t_0)$;
- 3) найти решение уравнений обобщенных характеристических функций (20);
- 4) представить ненормированные плотности распределения $p^{*(l)}(t, \mathbf{y})$ в виде (21).

В качестве базисной системы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать, например, полиномы Лежандра, косинусоиды, функции Уолша и Хаара, а в качестве базисных систем $\{\chi_{i_1}^1(y_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \dots, \{\chi_{i_n}^n(y_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$ — функции Эрмита.

Алгоритмы нахождения вероятностей $P^{(l)}(t)$, маргинальных плотностей вероятности и моментных характеристик вектора состояния спектральным методом, а также алгоритмы вычисления спектральных характеристик операторов дифференцирования и умножения относительно различных базисных систем приведены в [4].

6. Примеры анализа систем с распределенными переходами

Воспользуемся приведенными выше алгоритмами приближенного решения задачи анализа систем с распределенными переходами.

Получить аналитическое решение задачи анализа в рассматриваемых ниже модельных примерах затруднительно. Однако для вероятностей $P^{(l)}(t)$, а в линейном случае и для моментов вектора состояния, можно найти аналитическое выражение. Поэтому сравнение методов будет проводиться по точности оценки этих вероятностных характеристик.

Будем использовать два критерия для сравнения аналитического решения $\mu_T(t)$ и соответствующего приближенного решения $\mu_{\Pi}(t)$:

$$J_1(\mu) = \max_{t_0 \leq t \leq T} |\mu_T(t) - \mu_{\Pi}(t)| \quad \text{и} \quad J_2(\mu) = \left\{ \int_{t_0}^T |\mu_T(t) - \mu_{\Pi}(t)|^2 dt \right\}^{1/2},$$

где в качестве функции $\mu(t)$ могут выступать вероятности $P^{(l)}(t)$ или моментные характеристики координат вектора состояния (заметим, что для метода статистического моделирования функция $\mu_{\Pi}(t)$ определена только в узлах сетки).

Наряду с оценкой точности нахождения вероятностных характеристик будем приводить время, затрачиваемое на решение задачи (для расчетов использовался ПК с процессором Intel Celeron® 2 ГГц и 256 Мбайт оперативной памяти).

Пример 1. Задача анализа релейной следящей системы управления [13], описываемой уравнением

$$dy(t) = -k \operatorname{sign} y(t) dt + dw(t), \quad y(0) = y_0,$$

где $t \in [0, 2]$; $y(t)$ характеризует точность системы; y_0 — случайная величина, имеющая гауссовское распределение с параметрами $m_0 = 0.5$ и $D_0 = 0.5$; $w(t)$ — одномерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от y_0 ($n = m = 1$).

Система может работать в двух режимах: при $k = 1$ имеем нормальный режим, при $k = -1$ — срыв слежения. В начальный момент времени система находится в режиме срыва слежения. Процесс перехода в нормальный режим работы и в режим срыва слежения определяется интенсивностями $\nu_{21}(t, y) = 0.6 \exp(-2t)$ и $\nu_{12}(t, y) = 1 - \exp(-t)$ соответственно. Следовательно, рассматриваемая система относится к классу систем с распределенными переходами, при этом

$$dy(t) = (2l - 3) \operatorname{sign} y(t) dt + dw(t), \quad y(0) = y_0,$$

где $l = 1$ и $l = 2$ соответствуют режимам нормального функционирования и срыва слежения, т. е. $s(t)$ является дискретным марковским процессом с двумя состояниями ($S = 2$), а ненормированные плотности распределения начального состояния y_0 имеют вид

$$p_0^{*(1)}(y) = 0, \quad p_0^{*(2)}(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-(y - 0.5)^2).$$

Требуется найти вероятности $P^{(l)}(t)$ работы системы в режимах нормального функционирования и срыва слежения, ненормированные плотности распределения $p^{*(l)}(t, y)$, а также математическое ожидание $m(t)$ и дисперсию $D(t)$ состояния системы; $l = 1, 2$.

Результаты расчетов представлены на рис. 1 и 2 (тонкой линией показаны характеристики, полученные методом статистического моделирования, а толстой линией — характеристики, полученные спектральным методом). При решении задачи методом статистического моделирования использовался метод Эйлера (11) с шагом $h = 0.01$; число моделируемых траекторий $N = 10^6$; для построения гистограммы область изменения вектора состояния $[-5, 5]$ равномерно разбивалась на 100 частей. Для получения искомым характеристик спектральным методом в качестве базисной системы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ выбраны полиномы Лежандра (порядок усечения $L_0 = 16$), а в качестве базисной системы $\{\chi_{i_1}(y)\}_{i_1=0}^{\infty}$ — функции Эрмита с параметрами $m = 0$ и $D = 1/3$ [14] (порядок усечения $L_1 = 32$).

Погрешности вычисления вероятностей $P^{(1)}(t)$, $P^{(2)}(t)$ приведены в табл. 1 и 2 (через дробь даны значения для критериев J_1 и J_2 соответственно, $t_{\text{сч}}$ — время счета). При других базисных системах погрешности спектрального метода приведены в табл. 3.

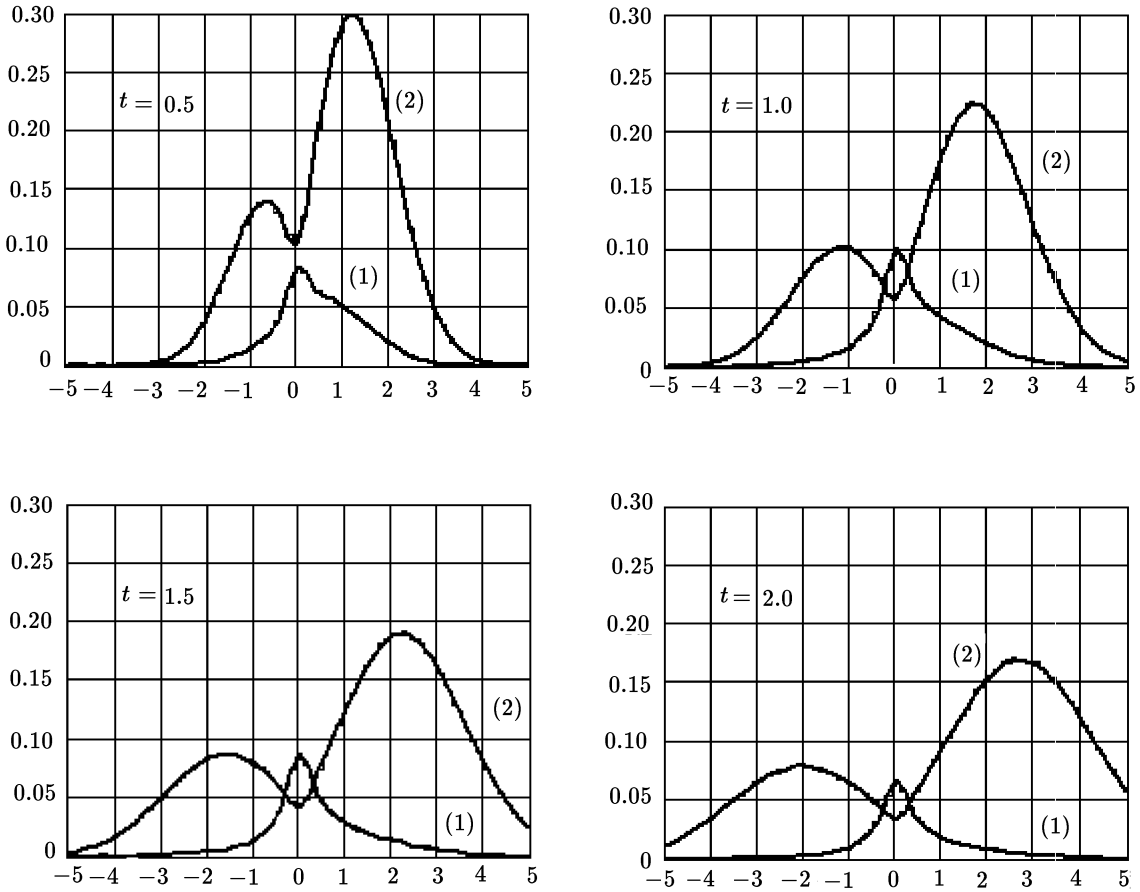


Рис. 1. Сечения ненормированных плотностей распределения $p^{*(1)}(t, y)$ и $p^{*(2)}(t, y)$ в различные моменты времени (для первой структуры — (1), для второй структуры — (2))

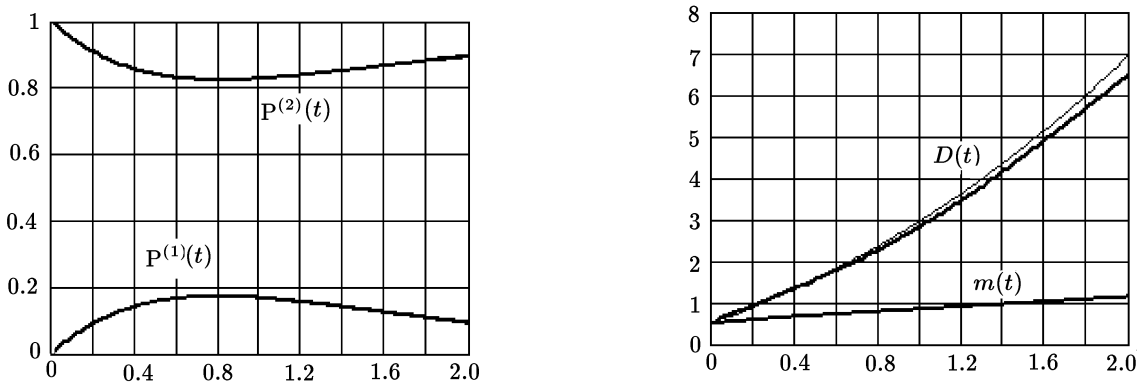


Рис. 2. Вероятности $P^{(1)}(t)$ и $P^{(2)}(t)$ работы системы в различных режимах; математическое ожидание $m(t)$ и дисперсия $D(t)$ состояния системы

Таблица 1. Погрешность метода статистического моделирования при различном объеме выборки

N	$J(P^{(1)})$	$J(P^{(2)})$	$t_{сч}$
10^4	0.010058/0.008888	0.010058/0.008888	1''
10^5	0.001200/0.000790	0.001200/0.000790	12''
10^6	0.000637/0.000607	0.000637/0.000607	2' 15''

Таблица 2. Погрешность спектрального метода при различных усечениях спектральных характеристик ($\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^\infty$ — полиномы Лежандра, $\{\chi_{i_1}(y)\}_{i_1=0}^\infty$ — функции Эрмита с параметрами $m = 0$ и $D = 1/3$)

(L_0, L_1)	$J(P^{(1)})$	$J(P^{(2)})$	$t_{сч}$
(16, 16)	0.012645/0.012749	0.109495/0.054063	4''
(16, 32)	0.006164/0.006450	0.008055/0.003501	1' 56''
(16, 48)	0.004141/0.004352	0.001620/0.001226	6' 10''

Таблица 3. Погрешность спектрального метода при различных усечениях спектральных характеристик ($\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^\infty$ — косинусоиды, $\{\chi_{i_1}(y)\}_{i_1=0}^\infty$ — функции Эрмита с параметрами $m = 0$ и $D = 1$)

(L_0, L_1)	$J(P^{(1)})$	$J(P^{(2)})$	$t_{сч}$
(16, 16)	0.026826/0.019491	0.021677/0.007139	4''
(16, 32)	0.026843/0.012002	0.024573/0.004660	1' 57''
(16, 48)	0.026866/0.008908	0.025313/0.004156	6' 20''

Пример 2. Задача стабилизации малого искусственного спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов [15, 16]. Упрощенная математическая модель этой системы описывается следующими уравнениями:

$$dy_1(t) = y_2(t)dt, \quad dy_2(t) = (-y_1(t) + u(t))dt + 0.1dw(t), \quad y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20},$$

где $t \in [0, 1]$; $y_1(t)$ — угол отклонения оси спутника по отношению к радиус-вектору центра масс, $y_2(t)$ — угловая скорость вращения спутника вокруг центра масс; y_{10} и y_{20} являются независимыми случайными величинами, имеющими гауссовское распределение с параметрами $m_{10} = -0.3$, $D_{10} = 1$ и $m_{20} = 0.1$, $D_{20} = 1$ соответственно ($n = 2$, $m = 1$, $\mathbf{y}(t) = [y_1(t), y_2(t)]^T$).

Управляющее воздействие $u(t)$ задается соотношением

$$u(t) = -0.2(1 - \operatorname{tg}1 - 2\operatorname{tg}^2 1) \cos t - 0.2(3 + 3\operatorname{tg}1 + 2\operatorname{tg}^2 1) \sin t$$

и в среднем обеспечивает стабилизацию спутника в момент времени $t = 1$, т. е. математические ожидания величин $y_1(1)$ и $y_2(1)$ равны нулю.

Рассмотрим ситуацию, когда в случайный момент времени возможен отказ управляющего устройства (срыв стабилизации) с последующим восстановлением режима нормального функционирования. Интенсивности отказа и восстановления задаются соответственно функциями $\nu_{12}(t, y_1, y_2) = 0.2$ и $\nu_{21}(t, y_1, y_2) = 0.1$. В начальный момент времени система функционирует нормально. Таким образом, данную систему управления можно рассматривать как систему со случайной структурой, описываемую уравнениями

$$dy_1(t) = y_2(t)dt, \quad dy_2(t) = (-y_1(t) + (2 - l)u(t))dt + 0.1dw(t), \quad y_1(0) = y_{10}, \quad y_2(0) = y_{20},$$

где $l = 1$ соответствует режиму нормального функционирования, а $l = 2$ — режиму срыва стабилизации, т. е. $s(t)$ представляет собой дискретный однородный марковский процесс с двумя состояниями ($S = 2$), а начальное состояние $\mathbf{y}_0 = [y_{10}, y_{20}]^T$ характеризуется ненормированными плотностями распределения

$$p_0^{*(1)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{(y_1 + 0.3)^2 + (y_2 - 0.1)^2}{2}\right), \quad p_0^{*(2)}(y_1, y_2) = 0.$$

Требуется найти вероятности $P^{(l)}(t)$ работы системы в режимах нормального функционирования и срыва стабилизации, маргинальные плотности вероятности $p_i(t, y_i)$ и математические ожидания $m_i(t)$ координат вектора состояния; $l = 1, 2$; $i = 1, 2$.

Результаты расчетов (рис. 3, 4), полученные методом статистического моделирования и спектральным методом практически совпадают. При решении задачи методом статистического моделирования использовался обобщенный одностадийный метод типа Розенброка (10) с шагом $h = 0.001$, $N = 10^6$; для построения гистограммы область изменения координат вектора состояния $[-4, 4]$ равномерно разбивалась на 100 частей. Для получения искомых характеристик спектральным методом в качестве базисной системы $\{q_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ выбраны полиномы Лежандра (порядок усечения $L_0 = 8$), а в качестве базисных систем $\{\chi_{i_1}^1(y_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $\{\chi_{i_2}^2(y_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ — функции Эрмита с параметрами $m = 0$ и $D = 1$ (порядки усечения $L_1 = L_2 = 12$), т. е. $\chi_{i_1 i_2}(\mathbf{y}) = \chi_{i_1}^1(y_1)\chi_{i_2}^2(y_2)$; $i_1, i_2 = 0, 1, 2, \dots$.

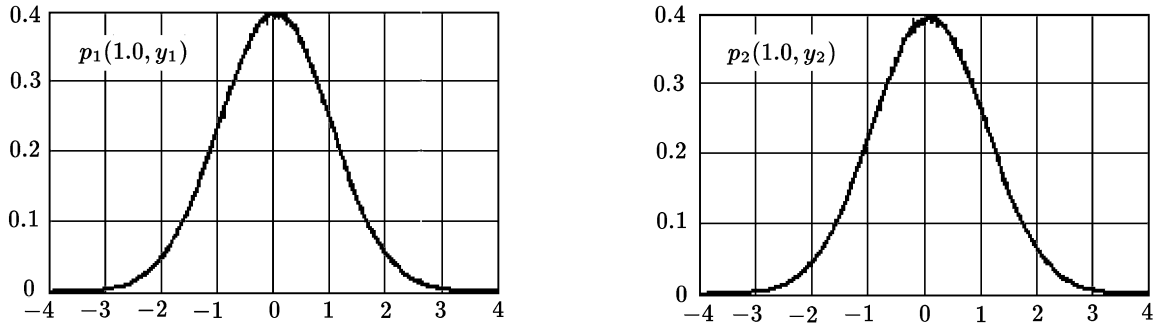


Рис. 3. Маргинальные плотности вероятности в момент времени $t = 1$

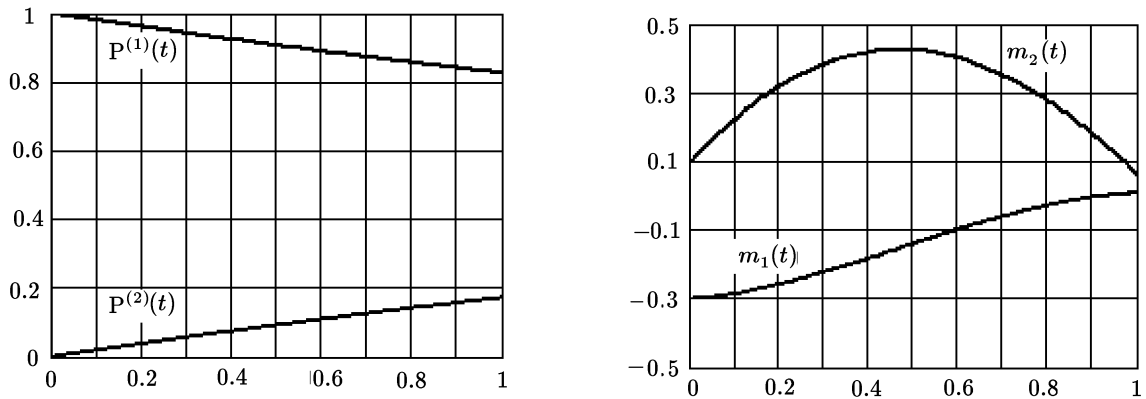


Рис. 4. Вероятности $P^{(1)}(t)$ и $P^{(2)}(t)$ работы системы в различных режимах; математические ожидания $m_1(t)$ и $m_2(t)$ координат вектора состояния

Метод двухмоментной параметрической аппроксимации [1] позволяет для данной задачи найти аналитическое решение для вероятностей $P^{(l)}(t)$ и моментов $m_i(t)$. Погрешность метода статистического моделирования приведена в табл. 4, а спектрального метода — в табл. 5. Обозначения такие же, как и в табл. 1–3.

Таблица 4. Погрешность метода статистического моделирования при различных шаге и объеме выборки

h	N	$J(P^{(1)})$	$J(P^{(2)})$	$J(m_1)$	$J(m_2)$	$t_{сч}$
0.01	10^4	0.007388/0.005135	0.007388/0.005135	0.021895/0.018748	0.022492/0.013881	1.5''
0.01	10^6	0.001017/0.000547	0.001017/0.000547	0.005661/0.002681	0.009814/0.006131	2' 37''
0.001	10^4	0.003829/0.002083	0.003829/0.002083	0.003802/0.002134	0.007895/0.007253	15''
0.001	10^6	0.000562/0.000332	0.000562/0.000332	0.000320/0.000236	0.001072/0.000601	25' 12''

Таблица 5. Погрешность спектрального метода при различных усечениях спектральных характеристик

(L_0, L_1, L_2)	$J(P^{(1)})$	$J(P^{(2)})$	$J(m_1)$	$J(m_2)$	$t_{сч}$
(8, 8, 8)	0.012117/0.007337	0.002185/0.001039	0.008719/0.005693	0.011070/0.008628	50''
(8, 12, 12)	0.001093/0.000584	0.000178/0.000080	0.001078/0.000728	0.001398/0.001076	8' 36''
(8, 16, 16)	0.000095/0.000046	0.000014/0.000006	0.000129/0.000086	0.000158/0.000121	59' 02''

7. Заключение

Из проведенных численных экспериментов видно, что при сопоставимом времени счета оба метода обеспечивают достаточную для приложений точность анализа линейных и нелинейных стохастических мультиструктурных систем управления с распределенными переходами. Точность оценок, полученных методом статистического моделирования, зависит от шага интегрирования h и числа моделируемых траекторий N . Точность оценок, полученных спектральным методом, зависит от выбора базисных систем и порядков усечения L_0, \dots, L_n .

Погрешность метода статистического моделирования можно оценить, не пользуясь точным решением. Поэтому погрешность спектрального метода можно контролировать с помощью метода статистического моделирования.

В основе спектрального метода лежит представление плотностей вероятности в виде обобщенных рядов Фурье, поэтому погрешность J_2 , как правило, существенно меньше погрешности J_1 , так как решение ищется в классе функций из $L_2([t_0, T] \times \mathbb{R}^n)$ и, вообще говоря, не предполагает дальнейшего поточечного сравнения. Для метода статистического моделирования погрешности J_1 и J_2 почти не отличаются.

Решение задачи анализа, полученное спектральным методом, представляет собой функции непрерывных аргументов t и y , но при этом такое решение может не удовлетворять условию нормировки (4) в отличие от решения, полученного методом статистического моделирования. Это, в первую очередь, отражается на точности вычисления моментов вектора состояния (особенно моментов высокого порядка) при небольших порядках усечения спектральных характеристик. На рис. 4 видно, что если оценки математического ожидания $m(t)$, полученные обоими методами, полностью совпали, то оценка дисперсии $D(t)$, полученная спектральным методом, несколько отличается от оценки, полученной методом статистического моделирования (которая фактически совпадает с точной).

Значение результатов состоит в том, что оценки метода статистического моделирования являются асимптотически (по $h \rightarrow 0$) несмещенными, этим самым и обеспечивая контроль спектрального метода.

Список литературы

- [1] Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. — М.: Физматлит, 1993.

- [2] **Федосов Е.А., Инсаров В.В., Селивохин О.С.** Системы управления конечным положением в условиях противодействия среды. — М.: Наука, 1989.
- [3] **Averina T.A.** Algorithm of statistical simulation of dynamic systems with distributed change of structure // Monte Carlo Methods and Appl. — 2004. — Vol. 10, № 3–4. — P. 221–226.
- [4] **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2006.
- [5] **Averina T.A.** Algorithm for statistical simulation of two types of random-structure systems // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. — 2001. — Vol. 16, № 6. — P. 467–482.
- [6] **Аверина Т.А.** Статистическое моделирование динамических систем с разделением времени с автономным управлением // Вестник НГУ, серия: матем., механика, информ. — 2004. — Т. 4, № 2. — С. 3–23.
- [7] **Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д.** Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. — М.: Машиностроение, 1979.
- [8] **Оксендаль Б.** Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. — М.: Мир, 2003.
- [9] **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.** Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982.
- [10] **Artemiev S.S., Averina T.A.** Numerical Analysis Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. — Utrecht: VSP, 1997.
- [11] **Крамер Г.** Математические методы статистики. — М.: Мир, 1975.
- [12] **Михайлов Г.А.** Весовые методы Монте-Карло. — Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
- [13] **Астапов Ю.М., Медведев В.С.** Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1982.
- [14] **Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал “Труды МАИ”. — 2004. — № 16. — (http://www.mai.ru/projects/mai_works/articles/num16/article11/auther.htm)
- [15] **Гурман В.И.** Вырожденные задачи оптимального управления. — М.: Наука, 1977.
- [16] **Рыбаков К.А., Сотскова И.Л., Юдин М.А.** Синтез алгоритмов оптимального управления малым искусственным спутником с учетом возможного отказа управляющего устройства // Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения. — М.: МИРЭА, 2006. — С. 98–103. — (Межвуз. сб. науч. тр.)

Аверина Т.А.

Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН,
просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6,
Новосибирск, 630090
E-mail: ata@osmf.sccc.ru
Новосибирский госуниверситет,
ул. Пирогова, 2,
Новосибирск, 630090

*Статья поступила**26 сентября 2006 г.**Переработанный вариант**19 января 2007 г.***Рыбаков К.А.**

Московский авиационный институт,
(государственный технический университет),
Волоколамское шоссе, 4,
А-80, ГСП-3, Москва, 125993
E-mail: rkoffice@mail.ru