

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ МАЛОГО ИСКУССТВЕННОГО СПУТНИКА С УЧЕТОМ ОТКАЗА УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА*

Аверина Т.А., Рыбаков К.А.

Введение

Рассматривается задача анализа системы стабилизации малого искусственного спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов, с учетом возможного отказа управляющего устройства.

Вопросы, связанные с актуальностью разработки и применения малых искусственных спутников стандарта CubeSat (нано-спутников и пикоспутников), достаточно подробно освещены в работах [1, 2]. В качестве примеров можно привести международную систему Disaster Monitoring Constellation, позволяющую производить мониторинг катастроф по всему земному шару; норвежский спутник nCube, отслеживающий перемещение кораблей по территориальным водам Норвегии; проект AAUSAT, предназначенный для получения детальных изображений Земли; спутник UWE-1 (Вюрцбургский университет), позволяющий анализировать использование технологий TCP/IP для телеметрических и телекомандных данных с учетом проблем задержек и помех; японский проект XI, созданный для демонстрации и тестирования систем спутниковой платформы с использованием готовых элементов, включая проверку аппаратуры спутника в условиях реального орбитального полета.

Учет отказов управляющего устройства (срывов стабилизации) в случайные моменты времени приводит к необходимости использования моделей систем со случайной структурой [3].

Для решения задачи анализа систем со случайной структурой в работе применяются два подхода: метод статистического моделирования [4], основанный на моделировании системы управления, и спектральный метод [5], в основе которого лежит переход к детерминированной задаче (к решению обобщенных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова) с последующей параметризацией плотности вероятности вектора состояния системы. Оба метода позволяют оценивать любые вероятностные характеристики выходных процессов, в том числе и плотность вероятности.

Применение методов статистического моделирования и спектрального метода при анализе систем с распределенными переходами имеет ряд преимуществ по сравнению с другими приближенными методами [3]. Оба метода с незначительными изменениями могут применяться и в случае неточного восстановления реализаций.

Следует отметить, что метод статистического моделирования используется не только для систем с распределенными переходами, но и с сосредоточен-

* Работа выполнена при частичной финансовой поддержке грантов «Ведущие научные школы» НШ-4774.2006.1 и РФФИ (проект № 05-01-00268)

ными, т.е. в случае, когда переключение между структурами происходит при достижении вектором состояния заданной поверхности переключения, а также для систем с разделением времени.

Спектральный метод является более универсальным по сравнению с другими методами, основанными на ортогональных разложениях, поскольку соотношения для решения задачи анализа представляют собой алгебраические уравнения, инвариантные к выбору базисных систем и их свойствам.

Постановка задачи

Предполагается, что возмущенное движение спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов, в плоскости орбиты описывается следующими уравнениями [6]:

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau} = q(\tau), \quad \frac{dq(\tau)}{d\tau} = -3\Omega^2\beta \sin\theta(\tau)\cos\theta(\tau) + L\mathbf{u}(\tau),$$

где θ – угол отклонения оси спутника по отношению к радиус-вектору центра масс, q – угловая скорость вращения вокруг центра масс, Ω – угловая скорость обращения спутника по круговой орбите, L и β – константы, зависящие от конструкции спутника, \mathbf{u} – управление.

В [2] показано, что при малых колебаниях спутника его движение приближенно описывается уравнениями

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = X_2(t), \quad \frac{dX_2(t)}{dt} = -X_1(t) + (2-k)\mathbf{U}(t), \quad k=1,2,$$

где $\tau = \alpha t$, $\theta = \gamma X_1$ и $q = \delta X_2$, а числа α , γ и δ выбраны таким образом, что $\alpha\delta/\gamma = 1$, $3\Omega^2\beta\alpha\gamma/\delta = 1$, $\alpha L/\delta = 1$; $t \in [0,1]$. Случай $k=1$ соответствует режиму нормального функционирования, а случай $k=2$ – режиму отказа управляющего устройства, т.е. срыву стабилизации.

Будем предполагать, что начальные условия $X_{10} = X_1(0)$ и $X_{20} = X_2(0)$ представляют собой случайные величины, которые характеризуются заданной плотностью вероятности $\varphi_0(x_1, x_2)$. Кроме того, в случайный момент времени возможен отказ управляющего устройства с последующим восстановлением режима нормального функционирования. Интенсивности отказа и восстановления в общем случае зависят от времени и задаются функциями $\lambda_{12}(t)$ и $\lambda_{21}(t)$ соответственно [3]. В начальный момент времени система функционирует нормально с вероятностью $P_0^{<1>} < 1$. Таким образом параметр k принимает значения дискретного случайного процесса $K(t)$ с двумя состояниями.

Задача анализа системы стабилизации заключается в нахождении ненормированных плотностей вероятности $\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2)$ и $\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)$ вектора состояния $x = [x_1 \ x_2]^T$ по заданным начальной плотности $\varphi_0(x_1, x_2)$, вероятности

$P_0^{<1>}$ нормального функционирования системы в начальный момент времени, интенсивностям $\lambda_{12}(t)$ и $\lambda_{21}(t)$.

Искомые характеристики для рассматриваемой системы удовлетворяют обобщенным уравнениям Фоккера-Планка-Колмогорова [2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi^{<1>}(t, x_1, x_2)}{\partial t} &= -x_2 \frac{\partial \varphi^{<1>}(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial((-x_1 + U(t))\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2))}{\partial x_2} - \\ &\quad - \lambda_{12}(t)\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2) + \lambda_{21}(t)\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2), \\ \frac{\partial \varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)}{\partial t} &= -x_2 \frac{\partial \varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)}{\partial x_2} - \\ &\quad - \lambda_{21}(t)\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2) + \lambda_{12}(t)\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2), \\ \varphi^{<1>}(0, x_1, x_2) &= P_0^{<1>} \varphi_0(x_1, x_2), \quad \varphi^{<2>}(0, x_1, x_2) = P_0^{<2>} \varphi_0(x_1, x_2); \end{aligned}$$

где $P_0^{<2>} = 1 - P_0^{<1>}$.

Наряду с нахождением функций $\varphi^{<1>}(t, x_1, x_2)$ и $\varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)$ можно рассматривать задачу нахождения маргинальных плотностей вероятности (как нормированных, так и ненормированных) и моментных характеристик вектора состояния (в том числе взвешенных и условных), а также задачу определения вероятностных характеристик времени перехода из одной структуры в другую.

Результаты расчетов

В качестве численного примера рассмотрим задачу нахождения вероятностей $P^{<k>}(t)$ работы системы в режимах нормального функционирования и срыва стабилизации, маргинальных плотностей вероятности $\varphi_i(t, x_i)$, математических ожиданий $m_i(t)$ и вторых начальных моментов $\Psi_i(t)$ координат вектора состояния:

$$\begin{aligned} P^{<k>}(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi^{<k>}(t, x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad k = 1, 2; \\ \varphi_1(t, x_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, x_1, x_2) dx_2, \quad \varphi_2(t, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, x_1, x_2) dx_1; \\ m_i(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x_i \varphi_i(t, x_i) dx_i, \quad \Psi_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_i^2 \varphi_i(t, x_i) dx_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

где $\varphi(t, x_1, x_2) = \varphi^{<1>}(t, x_1, x_2) + \varphi^{<2>}(t, x_1, x_2)$ – плотность вероятности вектора состояния.

Пусть X_{10} и X_{20} являются независимыми случайными величинами, имеющими нормальное распределение с параметрами $m_{10} = -0.3$, $D_{10} = 1$ и $m_{20} = 0.1$, $D_{20} = 1$ соответственно, т.е.

$$\varphi_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x_1+0.3)^2 + (x_2-0.1)^2}{2}}.$$

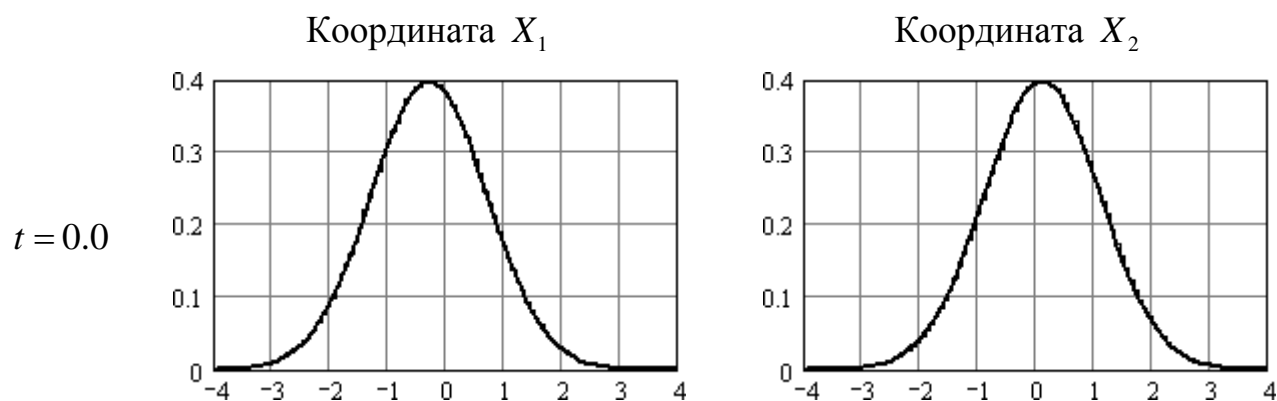
Управляющее воздействие $U(t)$ задается соотношением

$$U(t) = -0.2(1 - \operatorname{tg} 1 - 2 \operatorname{tg}^2 1) \cos t - 0.2(3 + 3 \operatorname{tg} 1 + 2 \operatorname{tg}^2 1) \sin t$$

и в среднем обеспечивает минимальный расход энергии, а также стабилизацию спутника в момент времени $t = 1$, т.е. математические ожидания величин $X_1(1)$ и $X_2(1)$ равны нулю.

Интенсивности отказа и восстановления задаются функциями $\lambda_{12}(t) = 0.2$ и $\lambda_{21}(t) = 0.1$, соответственно. В начальный момент времени система функционирует нормально с вероятностью $P_0^{<1>} = 0.95$.

Результаты расчетов представлены на рис. 1–4 (тонкой линией показаны характеристики, полученные методом статистического моделирования, а толстой – характеристики, полученные спектральным методом). При решении задачи методом статистического моделирования использовался обобщенный одностадийный метод типа Розенброка [7] с шагом $h = 0.001$; число моделируемых траекторий $N = 10^6$; для построения гистограммы отрезок $[-4, 4]$ изменения координат вектора состояния равномерно разбивался на 100 частей. При получении искомым характеристикам спектральным методом в качестве базисной системы для представления функций времени были выбраны полиномы Лежандра (порядок усечения $L_0 = 8$), а в качестве базисных систем для представления функций координат вектора состояния – функции Эрмита (порядки усечения $L_1 = L_2 = 12$) [5].



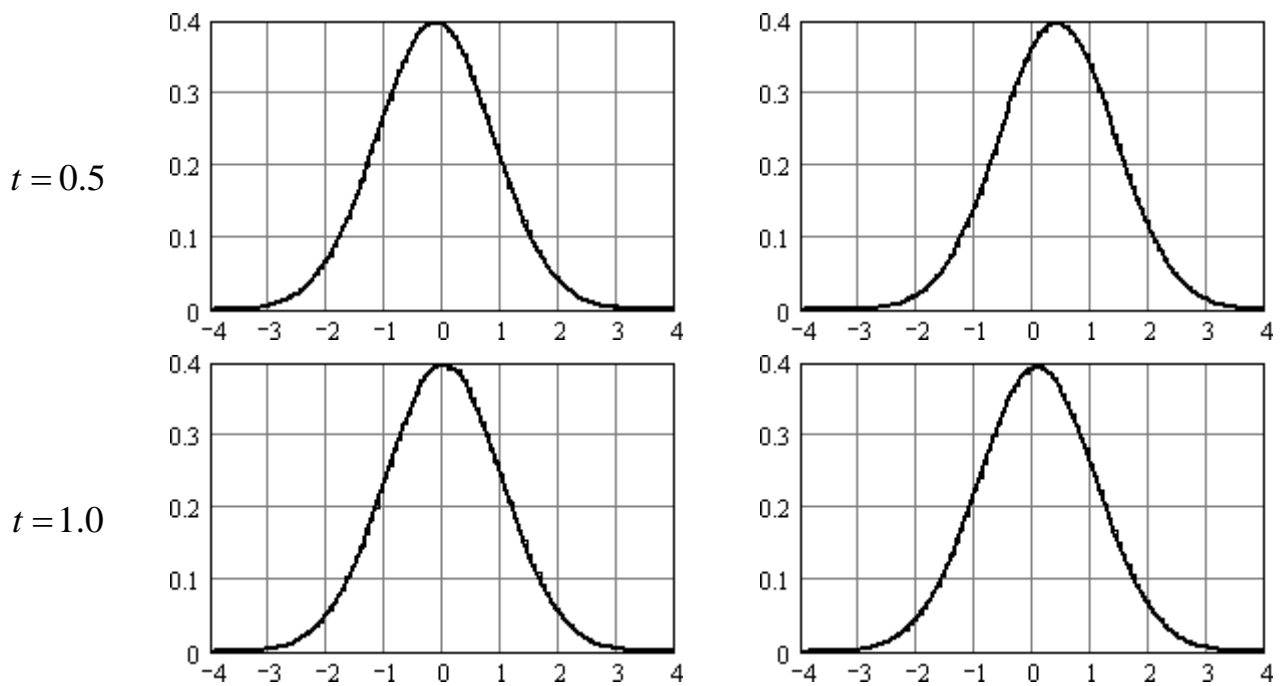


Рис. 1. Сечения маргинальных плотностей вероятности в различные моменты времени

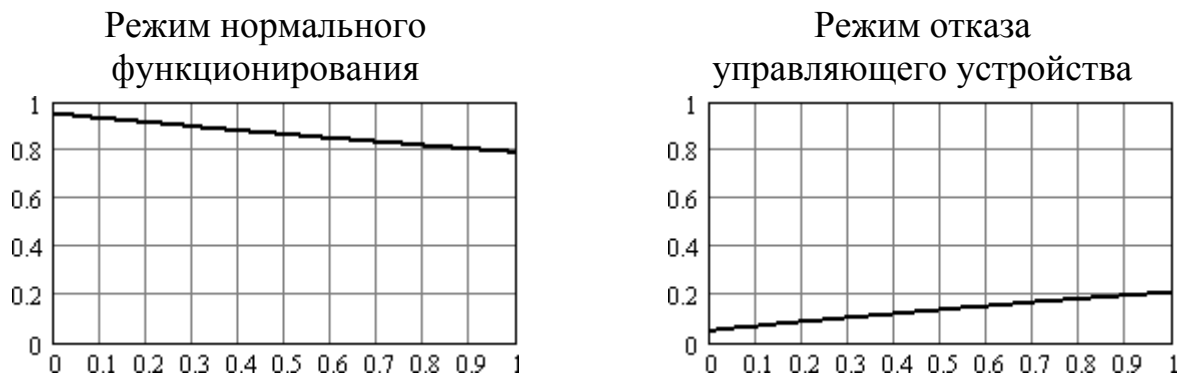


Рис. 2. Вероятности режимов работы системы стабилизации

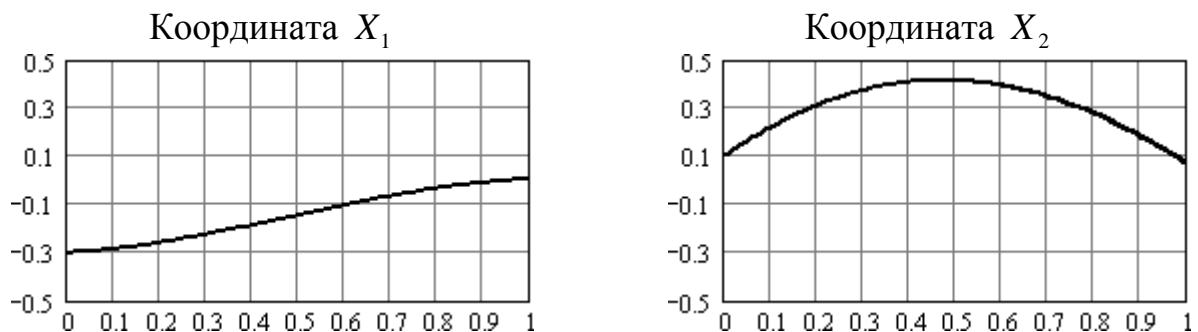


Рис. 3. Математические ожидания координат вектора состояния

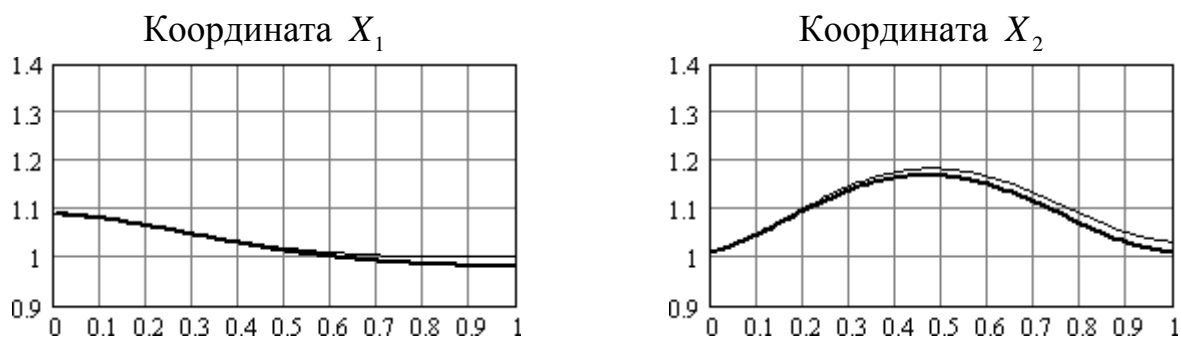


Рис. 4. Вторые начальные моменты координат вектора состояния

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Матросов В.М., Веретенников В.Г. О научно-образовательной программе разработки университетских пико-спутников Земли; о их стабилизации и устойчивости при возмущениях // Тез. докл. конф. «Авиация и космонавтика – 2004», Москва. – 2004.
2. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л., Юдин М.А. Синтез алгоритмов оптимального управления малым искусственным спутником с учетом возможного отказа управляющего устройства // Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения: Межвуз. сб. науч. тр. М.: МИРЭА, 2006, с. 98–103.
3. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993.
4. Аверина Т.А. Статистический алгоритм моделирования динамических систем с переменной структурой // Сибирский журнал вычислительной математики, 2002, т. 5, № 1, с. 1–10.
5. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. М.: Вузовская книга, 2006.
6. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. М.: Наука, 1977.
7. Artemiev S.S., Averina T.A. Numerical Analysis Systems of Ordinary and Stochastic Differential Equations. Utrecht: VSP, 1997.