

# Анализ динамики цены актива на примере модели Хестона с помощью спектрального метода<sup>1</sup>

А.С. Кожевников, К.А. Рыбаков

## Введение

Предсказание динамики цен самых разных финансовых инструментов – необходимый элемент любой инвестиционной деятельности. Сама идея инвестиций – вложение денег сейчас с целью получения дохода в будущем – основывается на идее прогнозирования. В связи с этим возникает задача оценки ожидаемой цены финансового инструмента и состояния рынка в целом. Для решения данной задачи необходимо построить адекватную математическую модель, описывающую движение цены финансового инструмента и удовлетворяющую определенным критериям.

Первая математическая модель цены актива в виде диффузионного процесса, который описывается с помощью броуновского движения, была представлена в докладе Башелье в 1900 году. Линейная модель Башелье [1] была создана для описания движения цен акций и других финансовых инструментов на парижском рынке ценных бумаг. С самого начала было ясно, что данная модель имеет множество недостатков и, в первую очередь то, что цены акций могут принимать отрицательные значения. Однако, эта модель показала, что броуновское движение, обладая богатой структурой, дает возможность использовать его для построения различных классов случайных процессов (в том числе и для построения более сложных моделей движения цены).

Следующим важным шагом было предложение описывать стоимости акций геометрическим броуновским движением: Самуэльсон предложил считать, что не стоимости, а логарифмы стоимостей подчиняются линейной модели Башелье. При переходе от логарифма цены непосредственно к цене получается диффузионная модель, которая была рассмотрена в 1973 году при расчетах стоимостей опционов Блэком, Шоулзом и Мертоном [1–3]. Именно с этой моделью связана знаменитая формула Блэка и Шоулза для расчета справедливой стоимости европейского опциона. Но модель Блэка-Шоулза основана на не слишком реалистичных допущениях: в ней предполагается, что процентная ставка и волатильность постоянны, хотя, в действительности, они меняются со временем.

Чтобы учесть изменение волатильности с течением времени, модель Блэка-Шоулза была обобщена. Например, можно отметить следующие модели:

- модель локальной волатильности, в которой предполагается, что волатильность зависит от цены и времени [4];
- модель неопределенной волатильности, в которой считается, что волатильность лежит в некоторых пределах, и, исходя из ограничений на волатильность, определяется максимальная и минимальная цена;
- модель стохастической волатильности, в которой волатильность представляет собой некоторую случайную величину, зависящую от времени [5–7].

Из этих трех моделей наибольшую популярность приобрела модель стохастической волатильности, так как с помощью неё можно более адекватно и точно оценить будущую цену актива (акции) и стоимость опциона.

В данной работе рассматривается модель стохастической волатильности, предложенная Хестоном в 1993 году [5–7]. В этой модели динамика цены описывается уравнением, аналогичным уравнению динамики цены в модели Блэка-Шоулза за исключением того, что здесь волатильность задаётся вторым диффузионным процессом, а между ценой и волатильностью имеется корреляция [5]. В постановке Хестона принимается во внимание, что распределение цен активов отличается от логарифмически нормального, учитывается эффект отрицательной корреляции волатильности и относительных доходностей, свойство волатильности возвращаться к равновесным уровням [5,6]. Также модель позволяет генерировать функции распределения цен и поверхности предполагаемой волатильности, хорошо совпадающие с реальными, и допускает вывод явных формул для расчета цен европейских опционов [7].

<sup>1</sup> Информатика, социология, экономика, менеджмент. Вып. 7, ч. 2: Межвуз. сб. науч. тр. – М.: АМИ, 2010. – С. 13–19.

## Модель стохастической волатильности Хестона

Динамика цены акции в модели Хестона описывается системой стохастических дифференциальных уравнений Ито [5,6]:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sqrt{v(t)}X(t)dW_1(t), \quad X(0) = X_0, \quad (1)$$

$$dv(t) = k(\theta - v(t))dt + \varepsilon\sqrt{v(t)}dW_2(t), \quad v(0) = v_0, \quad (2)$$

где  $t \in T = [0, t_k]$ ,  $X \in \Omega_1 = [0, +\infty)$  – цена акции,  $v \in \Omega_2 = [0, +\infty)$  – вариация (волатильность при этом будет равна  $\sigma = \sqrt{v}$ ),  $\mu$  – процентная ставка,  $\theta$  – равновесная вариация,  $k$  – скорость возвращения к равновесной вариации,  $\varepsilon$  – волатильность вариации. Начальная цена  $X_0$  и начальная вариация  $v_0$  независимы и имеют заданные распределения (заданы плотности вероятности);  $W_1(t)$  и  $W_2(t)$  – винеровские случайные процессы с коэффициентом корреляции  $\rho \in [-1, 1]$ ,  $W_1(t)$  и  $W_2(t)$  не зависят от  $X_0$  и  $v_0$ ,  $t_k$  – момент времени окончания процесса. Процесс  $W_2(t)$  будем представлять в виде  $W_2(t) = \rho W_1(t) + \sqrt{1 - \rho^2} Z(t)$ , где  $Z(t)$  – винеровский процесс, не зависящий от  $W_1(t)$ .

*Замечания.*

1. При  $k$  и  $\varepsilon$ , равных нулю, модель Хестона сводится к модели Блэка-Шоулза.

2. Уравнение (2) описывает процесс Кокса-Ингерсолла-Росса (или CIR-процесс) [1,8]: вариация всегда положительна и если  $2k\theta > \varepsilon^2$ , то она не достигает нуля, а ее детерминированная часть при условии  $k > 0$  стремится к равновесной вариации [6].

3. Выбор значений параметров, используемых в модели, является одной из подзадач анализа модели Хестона. Параметры можно определять, используя исторические данные. Задача заключается в том, что параметры модели надо выбрать так, чтобы цены, генерируемые стохастической моделью, как можно меньше отличались от реальных цен на рынке. Процедуру определения параметров стохастической модели называют калибровкой [6].

Плотность вероятности  $\varphi(t, x, v)$  состояния  $(X, v)$  в случае, когда математическая модель описывается системой (1) и (2), удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова [9,10]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x, v)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} [\mu x \varphi(t, x, v)] - \frac{\partial}{\partial v} [k(\theta - v) \varphi(t, x, v)] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [x^2 v \varphi(t, x, v)] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} [\rho \varepsilon x v \varphi(t, x, v)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [\varepsilon^2 v \varphi(t, x, v)], \end{aligned} \quad (3)$$
$$\varphi(t, x, v)|_{t=0} = \varphi_0(x, v) = \varphi_{10}(x) \varphi_{20}(v),$$

где  $\varphi_{10}(x)$  и  $\varphi_{20}(v)$  – плотности вероятности начальной цены  $X_0$  и начальной вариации  $v_0$  соответственно,  $t \in T = [0, t_k]$ .

## Постановка и алгоритм решения задачи

Будем рассматривать следующую задачу: по заданной процентной ставке  $\mu$ , равновесной вариации  $\theta$ , скорости возвращения к равновесной вариации  $k$ , волатильности вариации  $\varepsilon$ , моменту времени  $t_k$ , законам распределения  $\varphi_{10}(x)$  и  $\varphi_{20}(v)$  начальной цены  $X_0$  и начальной вариации  $v_0$  требуется найти плотность вероятности  $\varphi(t, x, v)$  состояния  $(X, v)$ .

По найденной плотности  $\varphi(t, x, v)$  можно найти математические ожидания цены актива и вариации, а также любые моменты более высокого порядка.

Далее для решения уравнения (3) и нахождения моментов воспользуемся спектральным методом [9–11]. Данный метод основан на представлении функций совокупностью коэффициентов разложения их в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций. Он является наиболее универсальным по сравнению с другими методами, основанными на ортогональных разложениях, поскольку соотношения для решения задачи при его применении представляют

собой линейные алгебраические уравнения, инвариантные к выбору базисных систем и их свойствам [3,9].

*Замечание.* Для повышения устойчивости расчетов спектральным методом преобразуем систему (1), (2) так, чтобы переменные  $X$  и  $\nu$  измерялись в одном масштабе. Для этого проведем в системе (1), (2) замену переменных  $Y(t) = a\nu(t)$ . Число  $a$  выбирается, например, исходя из отношения средних значений случайных величин  $X_0$  и  $\nu_0$ . Плотность вероятности  $\varphi(t, x, y)$  состояния  $(X, Y)$  в этом случае удовлетворяет следующему уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x, y)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x} [\mu x \varphi(t, x, y)] - \frac{\partial}{\partial y} [k(a\theta - y) \varphi(t, x, y)] + \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ x^2 \frac{y}{a} \varphi(t, x, y) \right] + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [\rho \varepsilon x y \varphi(t, x, y)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} [\varepsilon^2 a y \varphi(t, x, y)], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\varphi(t, x, y)|_{t=0} = \varphi_0(x, y),$$

где  $\varphi_0(x, y)$  – плотность вероятности начального состояния  $(X_0, Y_0)$ ,  $Y_0 = a\nu_0$ , которая определяется по заданным плотностям вероятности  $\varphi_{10}(x)$  и  $\varphi_{20}(\nu)$ ,  $t \in T = [0, t_k]$ . Также снимем формальные ограничения на значения величин  $x$  и  $y$ , т.е. будем полагать, что  $x, y \in R = (-\infty, +\infty)$ .

Решим уравнение (4) с помощью спектрального метода, опираясь на следующий алгоритм, согласно которому требуется:

1) Выбрать базисную систему  $\{e(i_0, i_1, i_2, t, x, y) = q(i_0, t) \cdot p(i_1, x) \cdot p(i_2, y)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^{\infty}$  пространства  $L_2(T \times R \times R)$  для представления плотности вероятности  $\varphi(t, x, y)$ , а также операторов дифференцирования и умножения. В качестве системы функций  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  предлагается использовать полиномы Лежандра  $P(i_0, t)$ , а в качестве систем функций  $\{p(i_1, x)\}_{i_1=0}^{\infty}$  и  $\{p(i_2, y)\}_{i_2=0}^{\infty}$  – функции Эрмита  $\Psi(i_1, x)$  и  $\Psi(i_2, y)$ . Возможны и другие варианты выбора базисных систем [9].

2) Вычислить: спектральные характеристики операторов дифференцирования, а именно  $P(3,3)$  – по времени с учетом значения функции в начальный момент;  $P_1(3,3)$ ,  $P_2(3,3)$  и  $P_{11}(3,3)$ ,  $P_{12}(3,3)$ ,  $P_{22}(3,3)$  – первого и второго порядков по координатам  $x$ ,  $y$ ; спектральные характеристики  $F_1(3,3)$ ,  $F_2(3,3)$  и  $G_{11}(3,3)$ ,  $G_{12}(3,3)$ ,  $G_{22}(3,3)$  операторов умножения на коэффициенты сноса:  $f_1(t, x, y) = \mu x$ ,  $f_2(t, x, y) = k(a\theta - y)$ , и диффузии:  $g_{11}(t, x, y) = x^2 \frac{y}{a}$ ,  $g_{12}(t, x, y) = \rho \varepsilon x y$ ,  $g_{22}(t, x, y) = \varepsilon^2 a y$  соответственно;  $\Phi_0(2,0)$  – спектральную характеристику плотности вероятности  $\varphi_0(x, y)$ ;  $q(1,0;0)$  – матрицу-столбец значений функций базисной системы  $\{P(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  в точке  $t_0$ .

3) Составить уравнение обобщенной характеристической функции [9] в соответствии с уравнением (4):

$$\begin{aligned} P(3,3) \cdot \Phi(3,0) - q(1,0;0) \otimes \Phi_0(2,0) = & (-P_1(3,3) \cdot F_1(3,3) - P_2(3,3) \cdot F_2(3,3) + \\ & + \frac{1}{2} P_{11}(3,3) \cdot G_{11}(3,3) + P_{12}(3,3) \cdot G_{12}(3,3) + \frac{1}{2} P_{22}(3,3) \cdot G_{22}(3,3)) \cdot \Phi(3,0), \end{aligned}$$

где  $\Phi(3,0)$  – спектральная характеристика плотности вероятности  $\varphi(t, x, y)$ , и найти его решение:

$$\begin{aligned} \Phi(3,0) = & \left( P(3,3) + P_1(3,3) \cdot F_1(3,3) + P_2(3,3) \cdot F_2(3,3) - \frac{1}{2} P_{11}(3,3) \cdot G_{11}(3,3) - \right. \\ & \left. - P_{12}(3,3) \cdot G_{12}(3,3) - \frac{1}{2} P_{22}(3,3) \cdot G_{22}(3,3) \right)^{-1} \cdot (q(1,0;0) \otimes \Phi_0(2,0)). \end{aligned}$$

4) Найти плотность вероятности  $\varphi(t, x, y)$  по решению уравнения обобщенной характеристической функции, используя обратное спектральное преобразование [9]:

$$\varphi(t, x, y) = \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1 i_2} \cdot P(i_0, t) \cdot \Psi(i_1, x) \cdot \Psi(i_2, y), \quad (t, x, y) \in T \times \Omega_1 \times \Omega_2,$$

где  $\varphi_{i_0 i_1 i_2}$  – координаты спектральной характеристики  $\Phi(3, 0)$ .

*Замечание.* Для получения приближенного решения задачи проводится усечение спектральных характеристик [9].

С помощью найденной плотности вероятности и обратной замены переменных можно получить плотность вероятности и моментные характеристики процессов, описываемых системой (1), (2).

### Пример расчета будущей цены и волатильности

Рассмотрим модель Хестона, в которой начальная цена  $X_0$  имеет усеченное нормальное распределение с математическим ожиданием 10 и дисперсией 1, а вариация  $v_0$  – усеченное нормальное распределение с математическим ожиданием 0.01 и дисперсией 0.000001 (среднее значение начальной волатильности  $\sigma_0$  равно 0.1; рассматриваются неотрицательные значения  $X_0$  и  $v_0$ ). Положим  $a = 900$ , тогда  $Y_0$  будет иметь усеченное нормальное распределение с математическим ожиданием 9 и дисперсией 0.81. Срок исполнения опциона  $t_k$  равен 1 (момент времени окончания процесса), процентная ставка  $\mu = 0.2$ , скорость возвращения к равновесной вариации  $k = 1.6$ , равновесная вариация  $\theta = 0.009$ , волатильность вариации  $\varepsilon = 0.05$  и корреляция  $\rho = -0.2$ . Для упрощения расчетов при представлении плотности вероятности в виде ряда будем использовать первые восемь функций базисной системы  $\{P(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ , шестнадцать функций для системы  $\{\Psi(i_1, x)\}_{i_1=0}^{\infty}$  и шестнадцать функций для системы  $\{\Psi(i_2, y)\}_{i_2=0}^{\infty}$  (параметры функций Эрмита [11]:  $m = 10$  и  $D = 1$ ).

Применим разработанный алгоритм поиска будущей цены, вариации и, следовательно, волатильности. Результаты расчетов представлены в таблице 1.

Если рассматривать графики плотностей, то можно сказать, что дисперсия (как цены, так и вариации) со временем растет. Данная модель описывает ситуацию, в которой цена в будущем будет увеличиваться, а волатильность – падать (например падающая волатильность может показывать, что рынок стабилизируется или восстанавливается).

График ковариации цены акции и вариации показывает, что между этими величинами есть взаимосвязь, причем, так как она принимает отрицательные значения, рост цены акции сопровождается снижением волатильности.

Отметим, что для упрощения вычислений можно в уравнении (1) перейти от стоимости акции  $X$  к её логарифму и исключить процентную ставку путем введения новой переменной:  $S = \ln X - \mu t$ . В результате, используя формулу Ито [1,8], систему (1), (2) можно привести к виду [7]:

$$dS(t) = -\frac{v(t)}{2} dt + \sqrt{v(t)} dW_1(t), \quad S(0) = S_0,$$

$$dv(t) = k(\theta - v(t)) dt + \varepsilon \sqrt{v(t)} dW_2(t), \quad v(0) = v_0.$$

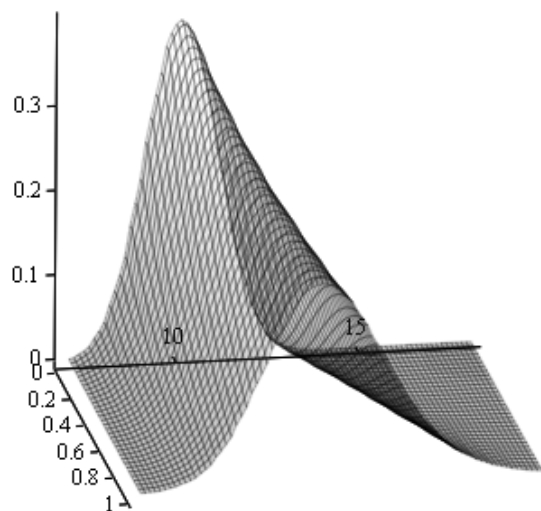
Соответствующее уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, s, v)}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} [v \varphi(t, s, v)] - \frac{\partial}{\partial v} [k(\theta - v) \varphi(t, s, v)] + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} [v \varphi(t, s, v)] + \frac{\partial^2}{\partial s \partial v} [\rho \varepsilon v \varphi(t, s, v)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [\varepsilon^2 v \varphi(t, s, v)]. \end{aligned}$$

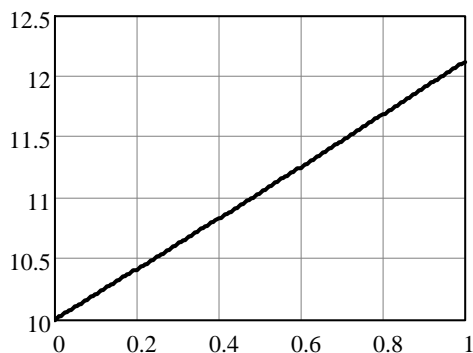
Начальное условие для этого уравнения определяется законами распределения величин  $X_0$  и  $v_0$  с учетом замены переменных.

Маргинальная плотность вероятности

$$\varphi_X(t, x)$$

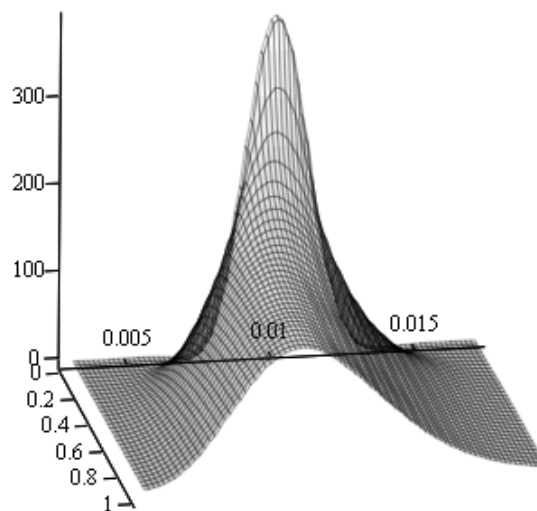


Ожидаемая цена

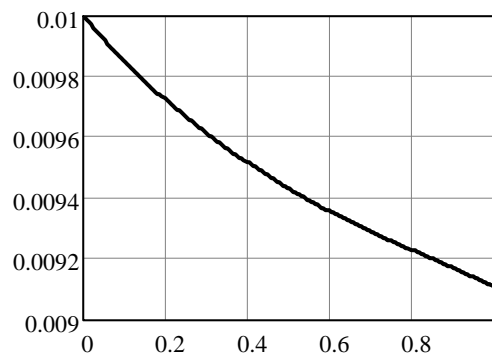


Маргинальная плотность вероятности

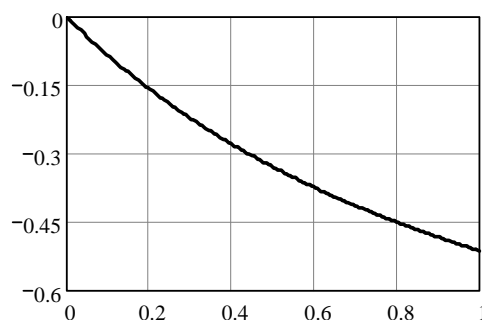
$$\varphi_V(t, v)$$



Предполагаемая вариация



Ковариация цены акции и вариации



### Заключение

Модель Хестона достаточно полно отражает динамику цены акций (моделирует цены близкие к реальным) и очень полезна при принятии инвестиционных решений, поскольку показывает себя как ценный инструмент для прогнозирования ожидаемых цен, но не гарантирует прибыль на биржевых торгах. Она учитывает множество факторов, которые не были учтены в модели Блэка-Шоулза, например, зависимость волатильности от времени (представление её диффузионным процессом), эффект отрицательной корреляции волатильности и относительных доходностей, свойство волатильности возвращаться к равновесным уровням [5,6].

Данная модель идеально подходит для описания некоторых рыночных ситуаций. Например, растущая волатильность актива ассоциируется с его падающей стоимостью, однако рост волатильности рыночного индекса соответствует падению цен на входящие в него акции и т.д. Но её рост может быть вызван не только падением цен. Растущий рынок также имеет высокий

уровень волатильности. Хотя ситуация, когда скачок волатильности вызван резким ростом цен, наблюдается на рынке гораздо реже. Все это говорит о том, что возможно моделировать разнообразные рыночные ситуации, что хорошо характеризует модель.

Основные трудности, которые могут возникнуть при применении данной модели, связаны с получением достоверных исходных данных, необходимых для расчета (время до реализации заложенных в проекте возможностей, значение процентной ставки и т.д.). То есть использование модели Хестона осложнено тем, что в расчетах всегда будет присутствовать множество параметров, которые несут оценочный характер (например, уровень процентных ставок, равновесная вариация и т.д.).

Рассмотренная модель позволяет проводить расчеты только для одного финансового инструмента. Однако разработанный алгоритм может быть использован и для оценки портфеля финансовых инструментов (увеличение размерности вектора цен приведет к увеличению размерности спектральных характеристик [9], а в целом алгоритм анализа останется без существенных изменений).

В качестве направлений дальнейших исследований можно расширить данную модель, если учесть, что реальные цены могут иметь большие изменения на малых промежутках времени. Тогда динамика цены будет определяться диффузионным процессом, который время от времени испытывает скачки в случайные моменты времени [12]:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sqrt{v(t)}X(t)dW_1(t) + X(t)dP(t), \quad X(0) = X_0,$$
$$dv(t) = k(\theta - v(t))dt + \varepsilon\sqrt{v(t)}dW_2(t), \quad v(0) = v_0,$$

где  $P(t)$  – пуассоновский процесс. Данная модель известна как модель Бейтса [12], а её анализ можно свести к решению интегро-дифференциального уравнения Колмогорова-Феллера. Для такой задачи также можно эффективно применять спектральный метод [13].

### Список литературы

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. – М.: ФАЗИС, 1998.
2. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // The Journal of Political Economy. – 1973. V. 81. № 3. – P. 637–654.
3. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Спектральный метод анализа стохастических систем в приложении к задачам финансовой математики на примере модели Блэка-Шоулза // Вестник Московского авиационного института. – 2009. Т. 16. № 4. – С. 113–125.
4. Dupire B. Pricing With a Smile // Risk magazine. – 1994. V. 7. № 1. – P. 18–20.
5. Heston S.L. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options // Review of Financial Studies. – 1993. V. 6. – P. 327–343.
6. Mikhailov S., Nögel U. Heston's Stochastic Volatility Model Implementation, Calibration and Some Extensions // Wilmott magazine. – 2003. – P. 74–79.
7. Drăgulescu A.A., Yakovenko V.M. Probability Distribution of Returns in the Heston Model with Stochastic Volatility // Quantitative Finance, 2002. V. 2. – P. 443–453.
8. Cont R., Tankov P. Financial Modelling with Jump Processes. – Chapman & Hall, CRC, 2004.
9. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006.
10. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Применение спектрального метода анализа стохастических систем в задачах финансовой математики. Модель Хестона // Тез. докл. 8-й Межд. конф. «Авиация и космонавтика – 2009». – М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. – С. 77.
11. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004. № 16. – <http://www.mai.ru>.
12. Bates D. Jump and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options // Review of Financial Studies. – 1996. V. 9. – P. 69–107.
13. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. Анализ систем управления со случайным периодом квантования в классе обобщенных характеристических функций // Тез. докл. 8-й Межд. конф. «Авиация и космонавтика – 2009». – М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. – С. 72.