УДК 681.514

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ, ОБРАЗУЮЩИМИ ЭРЛАНГОВСКИЕ ПОТОКИ СОБЫТИЙ[1]

А.С. КОЖЕВНИКОВ, К.А. РЫБАКОВ

Статья представлена доктором физико-математических наук, профессором Пантелеевым А.В.

В статье рассматриваются стохастические системы управления с импульсными воздействиями, которые образуют эрланговские потоки событий и приводят к разрывам траекторий системы. Решается задача нахождения плотности вероятности вектора состояния. В основе решения лежит использование спектральной формы математического описания систем управления.

Ключевые слова: задача анализа, импульсные воздействия, спектральный метод, стохастическая система, эрланговский поток событий, эрланговский процесс.

Введение

В работе рассматриваются стохастические системы управления с импульсными воздействиями, приводящими к тому, что в случайные моменты времени вектор состояния системы получает случайные приращения. Такие системы называют системами со случайным периодом квантования. Источники импульсов могут обладать различными характеристиками, описывающими интервалы времени появления импульсов и их величину [1, 2].

Стохастические системы управления с импульсными воздействиями находят применение в различных прикладных областях, например, для описания процессов в сложных технических системах (управление движущимися объектами, помехозащищенные радиолокационные системы, радиоизотопные измерительные системы, электрические цепи с импульсными источниками), в финансовой математике (описание динамики курсов акций и оценка стоимости опционов), в математической биологии и медицине (управление биомассой, действие лекарственных препаратов) [1, 3, 4].

Целью работы является развитие спектральных методов анализа систем управления, а именно, применение спектральной формы математического описания [5-7] к задаче вероятностного анализа систем со случайным периодом квантования. Спектральная форма математического описания для подобных систем применялась и ранее, но только в условиях пуассоновского потока квантования [8]. Здесь рассматривается более сложная задача, в которой предполагается, что поток квантования эрланговский. Это позволяет исследовать стохастические системы управления, допускающие разрывы траекторий в случайные моменты времени, интервалы между которыми могут описываться не только показательным законом распределения, но и эрланговским [3, 9].

1. Постановка задачи

Пусть поведение модели системы управления описывается процессом в непрерывном времени, порождаемым аддитивной смесью диффузионного и скачкообразного процессов, который можно представить как решение стохастического дифференциального уравнения [10]

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X \in R^n$ – вектор состояния; $t \in T$, $T = [t_0, t_1]$ – заданный отрезок времени функционирования системы; $f(t,x): T \times R^n \to R^n$ – вектор-функция размеров $n \times 1$; $\sigma(t,x): T \times R^n \to R^{n \times s}$ – матричная функция размеров $n \times s$; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00892-а)

Слагаемое $dQ(t)$ описывает «экстремальные события», сопровождающиеся скачками в траекториях вектора состояния (например, технический сбой или обвал на рынке ценных бумаг). Предполагается, что

$$Q(t)=\sum_{i=1}^{J(t)} Y(\tau_i).$$

Здесь $J(t)$ – эрланговский процесс порядка N, $Y(\tau_i)$ – независимые случайные величины из R^n, распределение которых задано плотностью вероятности $q(t,y)$, т.е. вектор состояния получает случайные приращения в моменты времени τ_1, τ_2, …, образующие эрланговский поток событий [1, 10]: $X(\tau_i)=X(\tau_i-0)+Y(\tau_i)$.

Эрланговский поток событий формируется в результате пропуска подряд $N-1$ события пуассоновского потока, который в свою очередь определяется интенсивностью $\lambda(t)$ следования событий и задает пуассоновский процесс $P(t)$.

С учетом введенных обозначений

$$Q(t)=\sum_{i=1}^{P(t)} \xi_i Y(\theta_i), \quad J(t)=\left[\frac{P(t)}{N}\right],$$

где величина ξ_i используется для пропуска подряд $N-1$ события пуассоновского потока и отбора каждого события с номером, кратным N (ξ_i – периодическая $\xi_{i+N}=\xi_i$)

$$\xi_i=\begin{cases}1, & i\ (\mathrm{mod}\ N)=0,\\ 0, & i\ (\mathrm{mod}\ N)\neq 0;\end{cases}$$

моменты времени θ_1, θ_2, … соответствуют событиям пуассоновского потока $\theta_{iN}=\tau_i$.

Отметим, что есть и другие формы записи [1, 4, 10, 11] уравнения (1).

Для дальнейшего изложения введем случайный процесс $K(t)$ с конечным множеством состояний $\{1,2,\ldots,N\}$. Они сменяются последовательно, начиная с 1, в соответствии с кольцевым графом состояний (рис. 1), интенсивность смены состояний – $\lambda(t)$

$$K(t)=1+P(t)\ (\mathrm{mod}\ N).$$

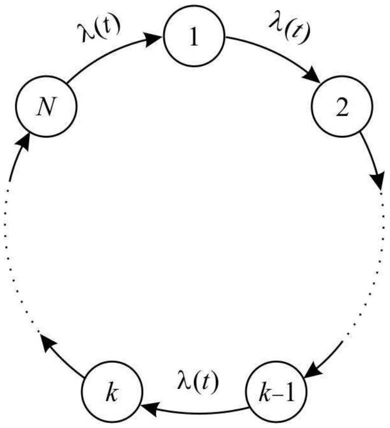

Рис. 1. Граф состояний случайного процесса $K(t)$

При переходе из состояния с номером N в состояние с номером 1 вектор состояния X системы (1) получает случайное приращение, что соответствует разрыву (скачку) траектории процесса $X(t)$ (рис. 2).

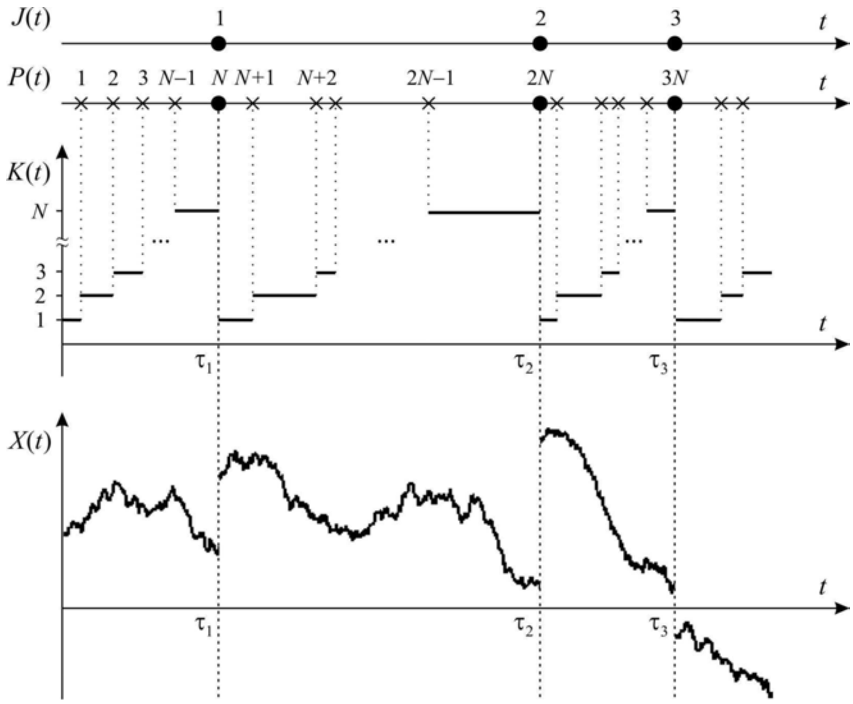

Рис. 2. Пример траекторий случайных процессов $K(t)$ и $X(t)$

Введение дополнительного процесса $K(t)$ позволяет представить плотность вероятности $\varphi(t,x)$ вектора X в виде суммы

$$\varphi(t,x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi^{(k)}(t,x),$$

где функции $\varphi^{(k)}(t,x)$ удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова [1, 5, 11]

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}(t,x)}{\partial t}=\mathcal{A}\varphi^{(1)}(t,x)-\lambda(t)\varphi^{(1)}(t,x)+\lambda(t)\int_{R^n}q(t,x-z)\varphi^{(N)}(t,z)dz, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\varphi^{(k)}(t,x)}{\partial t}=\mathcal{A}\varphi^{(k)}(t,x)-\lambda(t)\varphi^{(k)}(t,x)+\lambda(t)\varphi^{(k-1)}(t,x),\quad k=2,\ldots,N, \qquad (3)$$

в которой

$$\mathcal{A}\varphi^{(k)}(t,x)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i(t,x)\varphi^{(k)}(t,x)\right]+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left[g_{ij}(t,x)\varphi^{(k)}(t,x)\right],\quad k=1,2,\ldots,N, \qquad (4)$$

$$g_{ij}(t,x)=\sum_{r=1}^{s}\sigma_{ir}(t,x)\sigma_{jr}(t,x),\quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Начальное состояние X_0 определяется заданной плотностью вероятности $\varphi_0(x)$. Для процесса $K(t)$ начальное состояние фиксировано: $K(t_0)=1$, следовательно,

$$\varphi^{(1)}(t_0,x)=\varphi_0(x),\quad \varphi^{(k)}(t_0,x)=0,\quad k=2,\ldots,N. \qquad (5)$$

Последнее слагаемое в правой части уравнения (2) можно представить в операторной форме $\mathcal{H}\varphi^{(N)}(t,x)$, определив

$$\mathcal{H}\varphi(t,x)=\lambda(t)\int_{R^n}q(t,x-z)\varphi(t,z)dz \qquad (6)$$

для всех допустимых функций $\varphi(t,x)$; $\mathcal{H}$ – линейный оператор, а именно, композиция оператора умножения и оператора Фредгольма с ядром $q(t,x-z)$.

Задача анализа стохастической системы управления со случайным периодом квантования, описываемой уравнением (1), заключается в нахождении плотности вероятности $\varphi(t,x)$ вектора состояния X.

Далее предполагается, что при заданных функциях $f(t,x)$, $\sigma(t,x)$, $\lambda(t)$, $q(t,y)$ и $\varphi_0(x)$ существует единственное решение задач (1) и (2)–(5).

2. Применение спектральной формы математического описания

Сведем задачу анализа к поиску коэффициентов разложения $\varphi_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ функции $\varphi(t,x)$ по ортонормированным функциям в пространстве $L_2(T\times R^n)$. Обозначим полную систему ортонормированных функций $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, предполагая, что они представляются в виде произведения

$$e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)=q(i_0,t)\cdot p(i_1,\ldots,i_n,x),\quad i_0,i_1,\ldots,i_n=0,1,2,\ldots,$$

причем функции $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ образуют полные ортонормированные системы в пространствах $L_2(T)$ и $L_2(R^n)$ соответственно.

Применим спектральное преобразование [5] к уравнениям (2) и (3) с учетом условий (5), тогда

$$\begin{gathered} P(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(1)}(n+1,0)-q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)=A(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(1)}(n+1,0)- \\ -\Lambda(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(1)}(n+1,0)+H(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(N)}(n+1,0), \end{gathered}\tag{7}$$

$$\begin{gathered} P(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(k)}(n+1,0)=A(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(k)}(n+1,0)-\Lambda(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(k)}(n+1,0)+ \\ +\Lambda(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(k-1)}(n+1,0),\quad k=2,\ldots,N. \end{gathered}\tag{8}$$

В этих соотношениях $P(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент; $A(n+1,n+1)$ и $H(n+1,n+1)$ – спектральные характеристики операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{H}$, определенных выражениями (4) и (6) соответственно; $\Lambda(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\lambda(t)$; $\Phi^{(k)}(n+1,0)$ – спектральные характеристики функций $\varphi^{(k)}(t,x)$, $k=1,2,\ldots,N$. Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно системы функций $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. Далее $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0; $\Phi_0(n,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно системы функций $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Спектральная характеристика $\Phi(n+1,0)$ плотности вероятности $\varphi(t,x)$, называемая также обобщенной характеристической функцией [5, 12, 13], выражается следующим образом ($\Phi(n+1,0)$ – многомерная гиперстолбцовая матрица, образованная искомыми коэффициентами разложения $\varphi_{i_0 i_1 \ldots i_n}$)

$$\Phi(n+1,0)=\sum_{k=1}^{N}\Phi^{(k)}(n+1,0).\tag{9}$$

В основе соотношений (7)–(9) лежат определения, форма представления и свойства спектральных характеристик функций и линейных операторов, подробно изложенные в [5].

Как правило [13], спектральная характеристика $A(n+1,n+1)$ выражается через спектральные характеристики операторов дифференцирования и умножения, а именно,

$$A(n+1,n+1)=-\sum_{i=1}^{n}\mathcal{P}_i(n+1,n+1)\cdot F_i(n+1,n+1)+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\cdot G_{ij}(n+1,n+1),$$

где $\mathcal{P}_i(n+1,n+1)$ и $\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам вектора состояния; $F_i(n+1,n+1)$ и $G_{ij}(n+1,n+1)$ – спектральные характеристики операторов умножения на координатные функции, образующие $f(t,x)$ и $\sigma(t,x)$. Эти спектральные характеристики определены, как и $A(n+1,n+1)$, относительно $\{e(i_0,i_1,...,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,...,i_n=0}^{\infty}$. Такое представление для $A(n+1,n+1)$ предпочтительнее, так как для операторов дифференцирования и операторов умножения на некоторые функции получены аналитические выражения элементов их спектральных характеристик относительно различных систем ортонормированных функций [5-7, 14].

Поскольку в [5, 7, 14] основное внимание уделено спектральным характеристикам операторов умножения, дифференцирования и интегрирования, остановимся подробнее на спектральной характеристике $H(n+1,n+1)$ оператора $\mathcal{H}$. По определению $H(n+1,n+1)$ – $2(n+1)$-мерная гиперквадратная матрица с элементами

$$H_{i_0 i_1\dots i_n j_0 j_1\dots j_n}=\int_{T\times R^n} e(i_0,i_1,...,i_n,t,x)\mathcal{H}e(j_0,j_1,...,j_n,t,x)dtdx=$$

$$=\int_{T\times R^n} e(i_0,i_1,...,i_n,t,x)\lambda(t)\int_{R^n} q(t,x-z)e(j_0,j_1,...,j_n,t,z)dzdtdx,\quad i_0,i_1,...,i_n,j_0,j_1,...,j_n=0,1,2,...$$

Система уравнений (7) и (8) – это система линейных матричных уравнений относительно неизвестных спектральных характеристик $\Phi^{(k)}(n+1,0)$, или система линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно элементов матриц $\Phi^{(k)}(n+1,0)$, т.е. коэффициентов разложения функций $\varphi^{(k)}(t,x)$ по функциям $\{e(i_0,i_1,...,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,...,i_n=0}^{\infty}$. Перейдем к решению этой системы.

Из уравнения (8) следует, что

$$\big(P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1)+\Lambda(n+1,n+1)\big)\cdot\Phi^{(k)}(n+1,0)=\Lambda(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(k-1)}(n+1,0),\quad(10)$$

т.е.

$$\Phi^{(k-1)}(n+1,0)=\Lambda^{-1}(n+1,n+1)\cdot\big(P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1)+\Lambda(n+1,n+1)\big)\cdot\Phi^{(k)}(n+1,0)$$

или кратко

$$\Phi^{(k-1)}(n+1,0)=W(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(k)}(n+1,0),$$

где

$$W(n+1,n+1)=\Lambda^{-1}(n+1,n+1)\cdot\big(P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1)+\Lambda(n+1,n+1)\big)=$$
$$=\Lambda^{-1}(n+1,n+1)\cdot\big(P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1)\big)+E(n+1,n+1),$$

а $E(n+1,n+1)$ – $2(n+1)$-мерная единичная матрица.

Таким образом,

$$\Phi^{(1)}(n+1,0)=W^{k-1}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(k)}(n+1,0),\quad \Phi^{(k)}(n+1,0)=W^{N-k}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(N)}(n+1,0),$$

в частности,

$$\Phi^{(1)}(n+1,0)=W^{N-1}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(N)}(n+1,0).\quad(11)$$

Перепишем уравнение (7) с учетом (11)

$$\big(P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1)+\Lambda(n+1,n+1)\big)\cdot W^{N-1}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(N)}(n+1,0)-$$
$$-H(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(N)}(n+1,0)=q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)$$

или

$$\Big(\Lambda(n+1,n+1)\cdot W^N(n+1,n+1)-H(n+1,n+1)\Big)\cdot\Phi^{(N)}(n+1,0)=q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0),$$

следовательно,

$$\Phi^{(N)}(n+1,0)=\Big(\Lambda(n+1,n+1)\cdot W^N(n+1,n+1)-H(n+1,n+1)\Big)^{-1}\cdot\big(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\big).$$

Далее выразим спектральную характеристику $\Phi(n+1,0)$, принимая во внимание (9)

$$\Phi(n+1,0)=\sum_{k=1}^{N}W^{N-k}(n+1,n+1)\cdot\Phi^{(N)}(n+1,0)=$$
$$=\Big(W^{N-1}(n+1,n+1)+\ldots+W^2(n+1,n+1)+W(n+1,n+1)+E(n+1,n+1)\Big)\cdot\Phi^{(N)}(n+1,0).$$

Умножим справа выражение в скобках на разность $E(n+1,n+1)-W(n+1,n+1)$

$$\begin{aligned}&\Big(W^{N-1}(n+1,n+1)+\ldots+W^2(n+1,n+1)+W(n+1,n+1)+E(n+1,n+1)\Big)\cdot\\&\cdot\big(E(n+1,n+1)-W(n+1,n+1)\big)=W^{N-1}(n+1,n+1)+\ldots+W^2(n+1,n+1)+\\&+W(n+1,n+1)+E(n+1,n+1)-W^N(n+1,n+1)-\ldots-W^3(n+1,n+1)-\\&-W^2(n+1,n+1)-W(n+1,n+1)=E(n+1,n+1)-W^N(n+1,n+1),\end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}&W^{N-1}(n+1,n+1)+\ldots+W^2(n+1,n+1)+W(n+1,n+1)+E(n+1,n+1)=\\&=\Big(E(n+1,n+1)-W^N(n+1,n+1)\Big)\cdot\big(E(n+1,n+1)-W(n+1,n+1)\big)^{-1}.\end{aligned}\tag{12}$$

Похожий результат можно получить, умножая на $E(n+1,n+1)-W(n+1,n+1)$ слева, в этом случае

$$\begin{aligned}&W^{N-1}(n+1,n+1)+\ldots+W^2(n+1,n+1)+W(n+1,n+1)+E(n+1,n+1)=\\&=\big(E(n+1,n+1)-W(n+1,n+1)\big)^{-1}\cdot\Big(E(n+1,n+1)-W^N(n+1,n+1)\Big).\end{aligned}\tag{13}$$

Выражения (12) и (13), очевидно, представляют собой аналоги формулы суммы членов геометрической прогрессии.

Таким образом,

$$\begin{aligned}\Phi(n+1,0)=&\Big(E(n+1,n+1)-W^N(n+1,n+1)\Big)\cdot\big(E(n+1,n+1)-W(n+1,n+1)\big)^{-1}\cdot\\&\cdot\Big(\Lambda(n+1,n+1)\cdot W^N(n+1,n+1)-H(n+1,n+1)\Big)^{-1}\cdot\big(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\big)\end{aligned}\tag{14}$$

или

$$\begin{aligned}\Phi(n+1,0)=&\big(E(n+1,n+1)-W(n+1,n+1)\big)^{-1}\cdot\Big(E(n+1,n+1)-W^N(n+1,n+1)\Big)\cdot\\&\cdot\Big(\Lambda(n+1,n+1)\cdot W^N(n+1,n+1)-H(n+1,n+1)\Big)^{-1}\cdot\big(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\big)\end{aligned}\tag{15}$$

– решение рассматриваемой задачи в спектральной форме математического описания.

Нетрудно видеть, что если порядок N эрланговского процесса равен единице, то задача сводится к анализу стохастических систем при пуассоновском потоке квантования [8] и

$$\Phi(n+1,0)=\big(P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1)+\Lambda(n+1,n+1)-H(n+1,n+1)\big)^{-1}\cdot\big(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\big).$$

При отсутствии скачков ($H(n+1,n+1)=\Lambda(n+1,n+1)$) получаем известный результат решения задачи анализа стохастических систем с непрерывными траекториями [5, 13]

$$\Phi(n+1,0)=\left(P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1)\right)^{-1}\cdot\left(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\right).$$

Для нахождения решения задачи анализа в пространстве функций времени и вектора состояния требуется применить формулу обращения [5]

$$\varphi(t,x)=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\varphi_{i_0i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),\quad (t,x)\in T\times R^n,$$

но обычно приближенно определяется конечное число коэффициентов $\varphi_{i_0i_1\ldots i_n}$, поскольку задача нахождения всех коэффициентов разложения не является тривиальной. В этом случае бесконечные матрицы в (7)-(9) заменяются конечными матрицами (усекаются), тогда

$$\varphi(t,x)\approx\sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\ldots\sum_{i_n=0}^{L_n-1}\varphi_{i_0i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),$$

где натуральные числа $L_0,L_1,\ldots,L_n$ – выбранные порядки усечения спектральных характеристик.

Замечания.

1. Можно найти решение задачи анализа иначе. Для этого выражаем $\Phi^{(k)}(n+1,0)$ через $\Phi^{(k-1)}(n+1,0)$ из уравнения (10), затем $\Phi^{(k)}(n+1,0)$ через $\Phi^{(1)}(n+1,0)$, $k=2,\ldots,N$, что дает возможность получить $\Phi^{(1)}(n+1,0)$ из уравнения (7). Следующий шаг – вывод окончательных выражений для $\Phi(n+1,0)$ с учетом (9) и аналогичных преобразований, которые проводились при получении (14) и (15)

$$\Phi(n+1,0)=\left(Z(n+1,n+1)-Z^{N+1}(n+1,n+1)\right)\cdot\left(E(n+1,n+1)-Z(n+1,n+1)\right)^{-1}\cdot$$
$$\cdot\left(\Lambda(n+1,n+1)-H(n+1,n+1)\cdot Z^{N}(n+1,n+1)\right)^{-1}\cdot\left(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\right)$$

или

$$\Phi(n+1,0)=\left(E(n+1,n+1)-Z(n+1,n+1)\right)^{-1}\cdot\left(Z(n+1,n+1)-Z^{N+1}(n+1,n+1)\right)\cdot$$
$$\cdot\left(\Lambda(n+1,n+1)-H(n+1,n+1)\cdot Z^{N}(n+1,n+1)\right)^{-1}\cdot\left(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\right),$$

где

$$Z(n+1,n+1)=\left(P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1)+\Lambda(n+1,n+1)\right)^{-1}\cdot\Lambda(n+1,n+1)=W^{-1}(n+1,n+1).$$

Эти выражения эквивалентны (14) и (15), однако (14) и (15) предпочтительнее, поскольку в этом случае нахождения обратной матрицы $\Lambda^{-1}(n+1,n+1)$ можно избежать, определив $\Lambda^{-1}(n+1,n+1)$ как спектральную характеристику оператора умножения на функцию $\frac{1}{\lambda(t)}$. В частности, при постоянной интенсивности $\lambda(t)=\lambda$ имеем $\Lambda^{-1}(n+1,n+1)=\frac{1}{\lambda}\cdot E(n+1,n+1)$.

2. Естественным обобщением рассмотренной выше задачи является учет зависимости интенсивности пуассоновского потока событий, порождающего эрланговский поток, от вектора состояния и описание величины скачков не безусловной плотностью $q(t,y)$, а условной плотностью $q(t,x\,|\,z)$, характеризующей распределение вектора состояния $X(\tau_i)$ после скачка в за-

висимости от предыдущего значения $X(\tau_i - 0) = z$, τ_i – момент времени, в который происходит разрыв траектории процесса $X(t)$.

В этом случае уравнения (2) и (3) примут вид:

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi^{(1)}(t,x) - \lambda(t,x)\varphi^{(1)}(t,x) + \int\limits_{R^n} \lambda(t,z)q(t,x\,|\,z)\varphi^{(N)}(t,z)dz,$$

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi^{(k)}(t,x) - \lambda(t,x)\varphi^{(k)}(t,x) + \lambda(t,x)\varphi^{(k-1)}(t,x), \quad k = 2,\ldots,N,$$

а оператор $\mathcal{H}$ (6) следует переопределить

$$\mathcal{H}\varphi(t,x) = \int\limits_{R^n} \lambda(t,z)q(t,x\,|\,z)\varphi(t,z)dz.$$

Уравнения (7), (8) и методика их решения останутся такими же с учетом того, что $\Lambda(n+1,n+1)$ – это спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\lambda(t,x)$, а спектральную характеристику $H(n+1,n+1)$ нужно вычислять согласно новому определению оператора $\mathcal{H}$.

Заключение

В работе рассмотрено применение спектральной формы математического описания к задаче вероятностного анализа стохастических систем, которые характеризуются наличием разрывов (скачков) траекторий, образующих эрланговский поток событий, получены соотношения для нахождения плотности вероятности вектора состояния в спектральной форме математического описания систем управления.

Использование эрланговских потоков позволяет учитывать более сложный характер поведения траекторий вектора состояния. Характером появления скачков в траекториях можно управлять посредством соответствующего подбора таких параметров, как интенсивность $\lambda(t)$ и порядок N эрланговского процесса (эта возможность делает его достаточно гибким инструментом при моделировании). Так, при $N = 1$ интервалы времени между скачками описываются показательным законом распределения, при $N > 1$ – эрланговским, который является частным случаем гамма-распределения, причем с ростом N этот закон приближается к нормальному [9].

Применение спектральной формы математического описания позволяет свести систему интегро-дифференциальных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомой плотности вероятности по некоторой полной ортонормированной системе функций, что существенно упрощает решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Артемьев В.М., Ивановский А.В.** Дискретные системы управления со случайным периодом квантования. - М.: Энергоатомиздат, 1986.
2. **Большаков И.А., Ракошиц В.С.** Прикладная теория случайных потоков. - М.: Сов. радио, 1978.
3. **Тихонов В.И., Миронов М.А.** Марковские процессы. - М.: Сов. радио, 1977.
4. **Hanson F.B.** Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions. - SIAM, 2007.
5. **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. - М.: Вузовская книга, 2006.
6. **Рыбин В.В.** Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. - М.: Изд-во МАИ, 2011.
7. **Солодовников В.В., Семенов В.В.** Спектральная теория нестационарных систем управления. - М.: Наука, 1974.

8. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. Анализ систем управления со случайным периодом квантования в классе обобщенных характеристических функций // Авиация и космонавтика: материалы VIII междунар. науч. конф. - М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009. - С. 72.

9. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - М.: Наука, 1988.

10. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. - М.: Наука, 1990.

11. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. - М.: Физматлит, 1993.

12. Семенов В.В. Уравнение обобщенной характеристической функции вектора состояния систем автоматического управления // Аналитические методы синтеза регуляторов: межвуз. сб. науч. тр. - Саратов: СПИ, 1977. - Вып. 2. - С. 3-36.

13. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций // Автоматика и телемеханика. - 2011. - № 2. - С. 183-194.

14. Романов В.А., Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита: электронный журнал «Труды МАИ». - 2010. - № 39 [Электронный ресурс]. URL: http://www.mai.ru.

ANALYSIS OF NONLINEAR STOCHASTIC CONTROL SYSTEM WITH IMPULSE SIGNALS GENERATED BY ERLANG FLOWS OF EVENTS

Kozhevnikov A.S., Rybakov K.A.

The article deals with the stochastic control system with the impulses which generated by Erlang flows of events and lead to discontinuities of the system trajectories. We solve the problem of finding the probability density function for the system state. The solution is based on using the spectral form of mathematical description.

Key words: analysis, Erlang process, Erlang flow of events, impulse signals, spectral method, stochastic system.

Сведения об авторах

Кожевников Александр Сергеевич, 1987 г.р., окончил МАИ (2010), аспирант кафедры математической кибернетики МАИ, автор 10 научных работ, область научных интересов – анализ стохастических систем управления и финансовая математика.

Рыбаков Константин Александрович, 1979 г.р., окончил МАИ (2002), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики МАИ, автор 70 научных работ, область научных интересов – анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания систем управления.