А.С. Кожевников, К.А. Рыбаков

О ПРИМЕНЕНИИ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА АНАЛИЗА СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМ ПЕРИОДОМ КВАНТОВАНИЯ В МОДЕЛИ МЕРТОНА

В течение последнего десятилетия при моделировании колебаний рынка все более популярными (по сравнению с диффузионными процессами) становятся случайные процессы со скачками как для управления рисками, так и для определения справедливой цены опциона. В частности это связано с тем, что при описании процесса только с помощью броуновского движения цена актива в течение короткого промежутка времени может изменяться только на небольшую величину [1], хотя по существу реальные цены движутся скачками [2].

В данной работе рассматривается модель Мертона [3], в которой динамика цены актива состоит из диффузионной части, моделируемой с помощью броуновского движения, и разрывной (скачкообразной) части, моделируемой пуассоновским процессом. Предполагается, что скачки цены актива независимы, одинаково распределены и образуют пуассоновский поток событий с постоянной интенсивностью λ.

Предположим, что в малый промежуток времени Δt цена актива совершила скачок с X к yX. Тогда относительный скачок цены будет равен

$$\frac{yX-X}{X}=y-1 \tag{1}$$

и Мертон в своей работе допускает, что коэффициент y аналогично распределению цены актива является неотрицательной случайной величиной, которая имеет логарифмически нормальное распределение, т.е. $\ln y \sim N(\gamma,\delta^2)$. При этом его математическое ожидание равно $M[y]=e^{\gamma+\frac{1}{2}\delta^2}$, а дисперсия – $D[y]=e^{2\gamma+\delta^2}(e^{\delta^2}-1)$.

Динамика цены актива в модели Мертона описывается стохастическим дифференциальным уравнением [3]

$$\frac{dX(t)}{X(t)}=(\mu-\lambda\kappa)dt+\sigma dW(t)+(y-1)dP(t), \quad X(0)=X_0, \tag{2}$$

где $t\in T=[0,t_k]$, $X\in\Omega=(0,+\infty)$, X_0 – начальная цена актива, μ – процентная ставка, σ – волатильность, κ – среднее значение величины $y-1$, т.е. $\kappa=M[y-1]=e^{\gamma+\frac{1}{2}\delta^2}-1$, t_k – дата исполнения опциона, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский процесс и $P(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью λ, не зависящие от X_0 и y. Процессы $W(t)$ и $P(t)$ являются независимыми.

Замечание 1. При интенсивности λ, равной нулю, модель Мертона сводится к модели Блэка-Шоулза [1,3,4].

Для упрощения модели динамики цены актива и, следовательно, последующих расчетов целесообразно сделать замену переменных $S(t) = \ln X(t)$, воспользовавшись обобщенной формулой Ито [2].

Динамика логарифма цены актива описывается следующим уравнением:

$$dS(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa \right) dt + \sigma dW(t) + \ln y \, dP(t), \quad S(0) = S_0, \tag{3}$$

где $S \in \Omega = (-\infty, +\infty)$. Будем предполагать, что начальное состояние S_0 (логарифм начальной цены актива) имеет нормальное распределение, т.е. $S_0 \sim N(\alpha, \beta^2)$.

Известно, что если математическая модель описывается уравнением (3), то плотность вероятности $\varphi(t,s)$ состояния S удовлетворяет уравнению Колмогорова-Феллера:

$$\frac{\partial \varphi(t,s)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\kappa \right) \varphi(t,s) \right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[\sigma^2 \varphi(t,s) \right] -$$
$$-\lambda \varphi(t,s) + \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(s \,|\, z) \varphi(t,z) dz, \quad \varphi(t_0, s) = \varphi_0(s), \tag{4}$$

где $\psi(s \,|\, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta} e^{-\frac{(s-z-\gamma)^2}{2\delta^2}}$ – плотность распределения логарифма амплитуды скачка.

Стоимость call-опциона в модели Блэка-Шоулза C_{BS} выражается аналитической формулой [1,3,4]:

$$C_{BS} = \Phi(d_+) X_0 - \Phi(d_-) K e^{-(\mu - \lambda\kappa) t_k}, \tag{5}$$

где $\Phi(d)$ – функция распределения стандартной нормальной случайной величины и $d_\pm = \frac{1}{\sigma\sqrt{t_k}}\left(\ln\frac{X_0}{K} + t_k \left(\mu - \lambda\kappa \pm \frac{\sigma^2}{2} \right) \right)$, K – цена исполнения опциона.

Цена европейского call-опциона в модели Мертона выражается следующей формулой [2,3]:

$$C_M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda' t_k} (\lambda' t_k)^n}{n!} C_{BS}(n), \tag{6}$$

где $\lambda' = \lambda(1+\kappa) = \lambda e^{\gamma + \frac{1}{2}\delta^2}$, а величина $C_{BS}(n)$ представляет собой стоимость опциона, вычисленную по формуле Блэка-Шоулза, когда уровень изменчивости (волатильности) равен $\sigma^2 + \frac{n\delta^2}{t_k}$, а процентная ставка равна

$$\mu - \lambda\kappa + \frac{n \ln(1+\kappa)}{t_k} = \mu - \lambda \left(e^{\gamma + \frac{1}{2}\delta^2} - 1 \right) + \frac{n\left(\gamma + \frac{1}{2}\delta^2 \right)}{t_k}.$$

Стоимость опциона, полученная с помощью модели Мертона, может быть интерпретирована как средневзвешенное стоимости опциона, полученное с помощью формулы Блэка-Шоулза, с учетом того, что цена актива изменяется скачком n раз до истечения срока исполнения с некоторыми весовыми коэффициентами. Эти коэффициенты равны вероятностям того, что происходят n скачков до истечения срока исполнения.

Будем рассматривать следующую задачу, согласно которой требуется:

1) по заданной процентной ставке μ, волатильности σ, параметрам λ, γ и δ, моменту времени t_k и закону распределения $\varphi_0(s)$ логарифма начальной цены актива S_0 найти плотность вероятности $\varphi(t,s)$ состояния S (по найденной плотности вероятности $\varphi(t,s)$ можно определить вероятностные характеристики цены актива: математическое ожидание, дисперсию, коэффициенты асимметрии и эксцесса и др.).

2) по заданной цене исполнения K определить стоимость опциона C_M с помощью формулы (6).

Для нахождения плотности вероятности $\varphi(t,s)$, удовлетворяющей уравнению (4), будем использовать спектральную форму математического описания систем управления [4–8]. Согласно данному подходу искомая функция представляется упорядоченной совокупностью коэффициентов разложения в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций. Основное преимущество, которое отличает подобный подход, это универсальность его применения и простота реализации. Спектральный метод позволяет сводить уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова и Колмогорова-Феллера к линейным алгебраическим уравнениям относительно коэффициентов разложения, форма которых не зависит от выбора базисных систем и их свойств, а также от вида областей изменения времени и координат вектора состояния.

Согласно разработанному алгоритму требуется:

1) Выбрать базисную систему $\{e(i_0,i_1,t,s)=q(i_0,t)\cdot p(i_1,s)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T\times\Omega)$ для представления плотности вероятности $\varphi(t,s)$, а также операторов дифференцирования и умножения, интегрального оператора. В качестве системы функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать полиномы Лежандра $P(i_0,t)$, а в качестве системы функций $\{p(i_1,s)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – функции Эрмита $\Psi(i_1,s)$, так как $\Omega=(-\infty,\infty)$. Кроме того, возможны и другие варианты выбора базисных систем [5,6].

2) Вычислить: спектральные характеристики операторов дифференцирования, а именно $P(2,2)$ – по времени с учетом значения функции в начальный момент; $P_1(2,2)$ и $P_{11}(2,2)$ – первого и второго порядков по координате s; $F(2,2)$ и $G(2,2)$ – спектральные характеристики операторов умножения на коэффициенты сноса $f(t,s)=\mu-\dfrac{\sigma^2}{2}-\lambda\kappa$ и диффузии $g(t,s)=\sigma^2$ соответственно; $\Lambda(2,2)$ – спектральную характеристику оператора умножения на константу

λ; спектральную характеристику $K(2,2)$ интегрального оператора; $\Phi_0(1,0)$ – спектральную характеристику плотности вероятности $\varphi_0(s)$ начального состояния S_0; $q(1,0;0)$ – матрицу-столбец значений функций базисной системы $\{P(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке $t=0$.

3) Составить уравнение обобщенной характеристической функции [5, 7]:

$$P(2,2)\cdot\Phi(2,0)-q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0)=\big(-P_1(2,2)\cdot F(2,2)+ \\ +\frac{1}{2}P_{11}(2,2)\cdot G(2,2)-\Lambda(2,2)+K(2,2)\big)\cdot\Phi(2,0), \tag{7}$$

где $\Phi(2,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t,s)$, и найти его решение:

$$\Phi(2,0)=\Big(P(2,2)+P_1(2,2)\cdot F(2,2)-\frac{1}{2}P_{11}(2,2)\cdot G(2,2)+\Lambda(2,2)-K(2,2)\Big)^{-1}\cdot \\ \cdot\big(q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0)\big).$$

4) Найти плотность вероятности $\varphi(t,s)$ по решению уравнения обобщенной характеристической функции, используя обратное спектральное преобразование:

$$\varphi(t,s)=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\varphi_{i_0 i_1}\cdot P(i_0,t)\cdot\Psi(i_1,s),\quad (t,s)\in T\times\Omega, \tag{8}$$

где $\varphi_{i_0 i_1}$ – координаты спектральной характеристики $\Phi(2,0)$.

Замечание 2. С помощью полученной плотности вероятности и обратной замены переменных можно найти плотность вероятности и моментные характеристики процесса, описываемого уравнением (2), т.е. непосредственно цены актива.

Замечание 3. Для получения приближенного решения задачи анализа проводится усечение спектральных характеристик [5].

Рассмотрим модель цены на промежутке $T=[0,1]$ при процентной ставке $\mu=0.1$, волатильности $\sigma=0.2$, параметрах $\lambda=1$, $\gamma=0$ и $\delta=\sqrt{0.1}$. Начальная цена имеет логарифмически нормальное распределение ($X_0\sim\mathrm{Ln}(2.297,0.01)$) с математическим ожиданием 10 и дисперсией 1. Логарифм y имеет нормальное распределение ($\ln y\sim N(0,0.1)$), при этом математическое ожидание κ величины $y-1$ равно 0.051, а дисперсия – 0.116. Для расчетов при представлении искомой плотности вероятности в виде ряда будем использовать первые тридцать функций базисных систем $\{P(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{\Psi(i_1,s)\}_{i_1=0}^{\infty}$ [5,6]. Результаты расчетов представлены на рисунках 1–4.

Для оценки влияния интенсивности скачков цен и параметров их распределения были проведены дополнительные расчеты. Результаты представлены на рисунках 5 и 6.

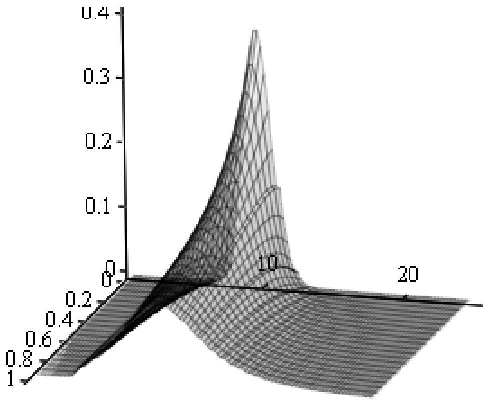

Рис. 1. Плотность вероятности $\varphi(t,x)$ *цены актива*

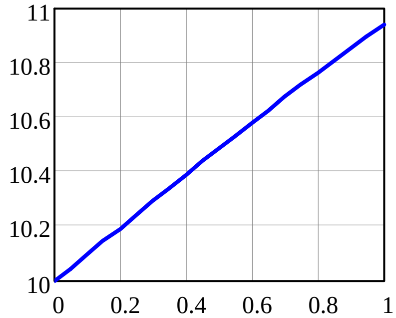

Рис. 2. Математическое ожидание $m_x(t)$ *цены актива*

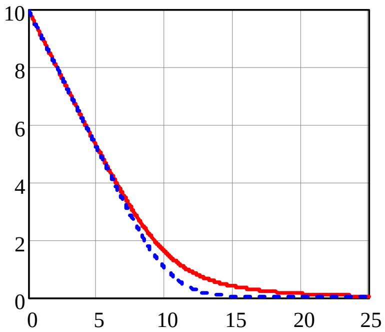

Рис. 3. Зависимость стоимости call-опциона от цены исполнения K (C_{BS} , C_M)

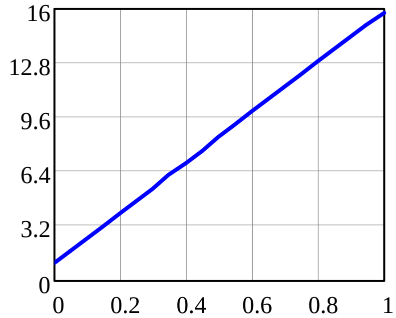

Рис. 4. Дисперсия $D_x(t)$ *цены актива*

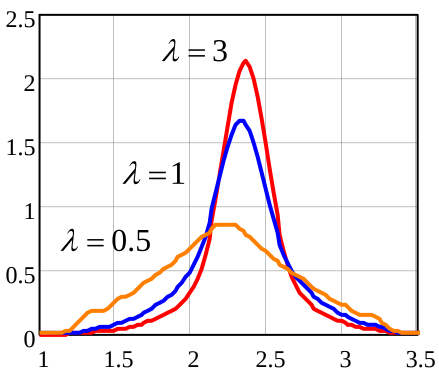

Рис. 5. Сечения $\varphi(t_k,s)$ *при* $\gamma=0$, $\delta=\sqrt{0.1}$, $\mu=0.1$, $\sigma=0.1$ *для разных* λ

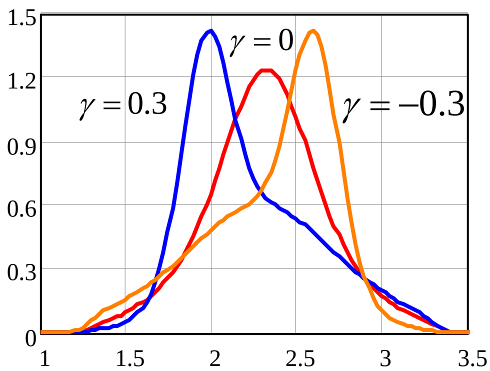

Рис. 6. Сечения $\varphi(t_k,s)$ *при* $\lambda=1$, $\delta=\sqrt{0.1}$, $\mu=0.1$, $\sigma=0.1$ *для разных* γ

Алгоритм решения задачи анализа с использованием спектральной формы математического описания также эффективно работает и при других параметрах модели.

В качестве направления дальнейших исследований необходимо учесть зависимость волатильности от времени. Модель, объединяющая в себе модель стохастической волатильности Хестона [8] и диффузионно-скачкообразную модель Мертона, известна как модель Бейтса [9].

Список литературы

1. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // The Journal of Political Economy. – 1973. V. 81. № 3. – P. 637–654.
2. Cont R., Tankov P. Financial Modelling with Jump Processes. – Chapman and Hall, 2004.
3. Merton R. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous // Journal of Financial Economics. – 1976. V. 3. – P. 125–144.
4. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Спектральный метод анализа стохастических систем в приложении к задачам финансовой математики на примере модели Блэка-Шоулза // Вестник Московского авиационного института. – 2009. Т. 16. № 4. – С. 113–125.
5. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006.
6. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004. № 16. – http://www.mai.ru.
7. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. Анализ систем управления со случайным периодом квантования в классе обобщенных характеристических функций // Тез. докл. 8-й Межд. конф. «Авиация и космонавтика – 2009». – М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. – С. 72.
8. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Применение спектрального метода анализа стохастических систем в задачах финансовой математики. Модель Хестона // Тез. докл. 8-й Межд. конф. «Авиация и космонавтика – 2009». – М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. – С. 77.
9. Bates D. Jump and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options // Review of Financial Studies. – 1996. V. 9. – P. 69–107.