КОЖЕВНИКОВ А.С., РЫБАКОВ К.А.

аспирант каф. 805

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ЦЕНЫ АКЦИЙ С ЭРЛАНГОВСКИМИ СКАЧКАМИ

Предложены новые математические модели описания динамики цен акций.

Введение

Для описания первых математических моделей динамики цены акции исследователи использовали диффузионный процесс, который позволял учитывать случайный характер поведения цены. Однако подобный подход не учитывал разрывное (скачкообразное) поведение цены и вследствие этого не позволял в равной степени смоделировать ее динамику во всех временных масштабах.

В настоящее время при моделировании колебаний рынка пользуются популярностью случайные процессы со скачками. Источники скачков могут обладать различными характеристиками, описывающими интервалы времени появления скачков и их величину. Большинство таких моделей задаются с помощью процессов Леви с ненулевой диффузионной компонентой и компонентой, которая является пуассоновским процессом, позволяющим моделировать скачки цен акции. Примерами таких моделей являются диффузионно-скачкообразные модели Мертона [1] и Бейтса [2] со скачками, величины которых задаются логарифмически нормальным распределением. Основным отличием модели Бейтса от модели Мертона является зависимость волатильности от времени, которая задается диффузионным процессом.

Использование пуассоновского процесса для описания «экстремальных событий» хоть и упрощает модель и анализ поведения цены акции, но значительно снижает возможность точно моделировать процесс появления скачков. В данной работе предлагается использовать эрланговский закон появления скачков цены акции для описания «экстремальных событий» в моделях Мертона и Бейтса. Это позволяет их обобщить и исследовать при скачках, интервалы времени между которыми могут описываться не только пуассоновским законом распределения.

Обобщенные модели Мертона и Бейтса

В моделях Мертона и Бейтса динамика цены акции описывается процессом в непрерывном времени, порождаемым аддитивной смесью диффузионного и скачкообразного процессов, который можно представить как решение стохастических дифференциальных уравнений. В частности, динамика цены акции с учетом эрланговского потока событий в модели Мертона описывается стохастическим дифференциальным уравнением

$$dX(t)=(\mu-\xi)X(t)dt+\sigma X(t)dW_1(t)+X(t)dQ(t), \tag{1}$$

$$X(0)=X_0,$$

а в модели Бейтса задается системой стохастических дифференциальных уравнений

$$dX(t)=(\mu-\xi)X(t)dt+\sqrt{\nu(t)}X(t)dW_1(t)+X(t)dQ(t), \tag{2}$$

$$d\nu(t)=\kappa\big(\theta-\nu(t)\big)dt+\varepsilon\sqrt{\nu(t)}dW_2(t), \tag{3}$$

$$X(0)=X_0, \quad \nu(0)=\nu_0,$$

где $t\in T=[0,t_1]$, $X\in\Omega_1=[0,+\infty)$ – цена акции, μ – ожидаемая доходность, σ – волатильность, $\nu\in\Omega_2=[0,+\infty)$ – вариация, которая характеризует изменчивость цены акции, θ – равновесная вариация, κ – скорость возвращения к равновесной вариации, ε – волатильность вариации. Начальная цена X_0 и начальная вариация ν_0 независимы и имеют заданные распределения (заданы плотности вероятности); $W_1(t)$ и $W_2(t)$ – винеровские случайные процессы с коэффициентом корреляции $\rho\in[-1,1]$, $Q(t)$ – процесс, заданный как $Q(t)=\sum_{i=1}^{J(t)}(Y_i-1)$, $J(t)$ – эрланговский процесс порядка N, который формируется в результате пропуска подряд $N-1$ события пуассоновского потока $P(t)$ интенсивности λ, Y_i – независимые и одинаково распределенные скалярные случайные величины, имеющие логарифмически нормальное распределение с параметрами γ и δ, т.е. цена акции получает случайные приращения в моменты времени τ_1, τ_2, …, образующие эрланговский поток событий; $W_1(t)$, $W_2(t)$ и $J(t)$ не зависят от X_0, ν_0 и Y_i; t_1 – момент времени окончания процесса. Величина ξ зависит от интенсивности λ и параметров γ и δ, например, $\xi=\frac{\lambda}{N}(e^{\gamma+\frac{1}{2}\delta^2}-1)$. Процессы $W_1(t)$, $W_2(t)$ не зависят от $Q(t)$. Процесс $W_2(t)$ будем представлять в виде $W_2(t)=\rho W_1(t)+\sqrt{1-\rho^2}Z(t)$, где $Z(t)$ – винеровский процесс, не зависящий от $W_1(t)$ и $J(t)$.

Для упрощения модели динамики цены акции и расчетов сделаем замену переменных $S(t)=\ln X(t)$. В результате замены для модели Мертона получаем [3]

$$dS(t)=\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}-\xi\right)dt+\sigma dW_1(t)+d\tilde{Q}(t), \tag{4}$$

$$S(0)=S_0,$$

а для модели Бейтса [4]

$$dS(t) = \left(\mu - \frac{\nu(t)}{2} - \xi\right)dt + \sqrt{\nu(t)}dW_1(t) + d\tilde{Q}(t), \tag{5}$$

$$d\nu(t) = \kappa\left(\theta - \nu(t)\right)dt + \varepsilon\sqrt{\nu(t)}dW_2(t), \tag{6}$$

$$S(0) = S_0, \quad \nu(0) = \nu_0,$$

где $\tilde{Q}(t) = \sum_{i=1}^{J(t)} \ln Y_i$.

Для дальнейшего изложения введем случайный процесс $K(t)$ с конечным множеством состояний $\{1, 2, ..., N\}$, которые сменяются последовательно, начиная с 1:

$$K(t) = 1 + P(t) \ (\mathrm{mod}\ N).$$

При переходе из состояния с номером N в состояние с номером 1 величина S получает случайное приращение, что соответствует разрыву (скачку) траектории процесса $S(t)$.

Введение дополнительного процесса $K(t)$ в модели Мертона позволяет представить плотность вероятности $\varphi(t,s)$ в виде суммы:

$$\varphi(t,s) = \sum_{k=1}^{N} \varphi^{(k)}(t,s),$$

где функции $\varphi^{(k)}(t,s)$ удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова [5].

Система обобщенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова для модели Мертона имеет вид

$$\frac{\partial \varphi^{(1)}(t,s)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi^{(1)}(t,s) - \lambda\varphi^{(1)}(t,s) + \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}\delta}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(s-z-\gamma)^2}{2\delta^2}} \varphi^{(N)}(t,z)dz,$$

$$\frac{\partial \varphi^{(k)}(t,s)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi^{(k)}(t,s) - \lambda\varphi^{(k)}(t,s) + \lambda\varphi^{(k-1)}(t,s), \quad k = 2, ..., N,$$

в которой при $k = 1, 2, ..., N$,

$$\mathcal{A}\varphi^{(k)}(t,s) = -\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} - \xi\right)\frac{\partial}{\partial s}\varphi^{(k)}(t,s) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\varphi^{(k)}(t,s).$$

Начальное состояние S_0 определяется заданной плотностью вероятности $\varphi_0(s)$. Для процесса $K(t)$ начальное состояние фиксировано, а именно $K(t_0) = 1$, поэтому

$$\varphi^{(1)}(t_0,s)=\varphi_0(s),\quad \varphi^{(k)}(t_0,s)=0,\quad k=2,\dots,N.$$

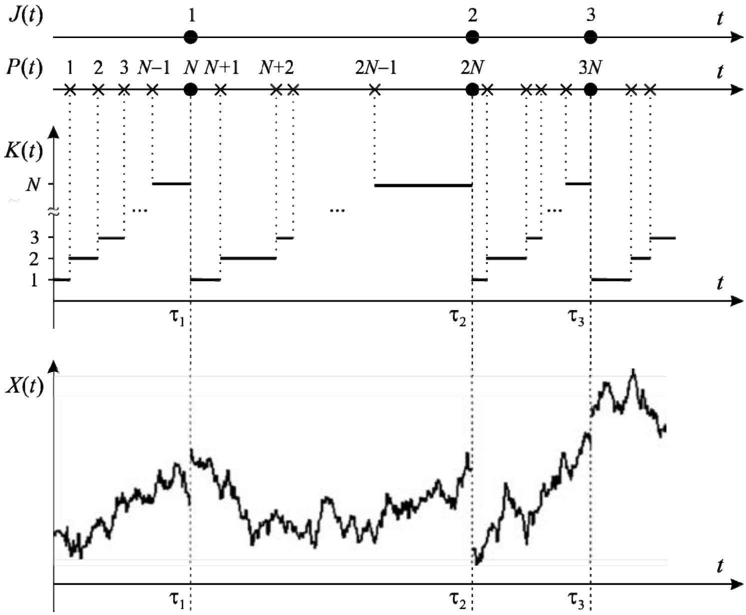

Рис. Пример траекторий случайных процессов $K(t)$ и $X(t)$

Аналогично в модели Бейтса плотность вероятности $\varphi(t,s,\nu)$ можно представить в виде суммы:

$$\varphi(t,s,\nu)=\sum_{k=1}^{N}\varphi^{(k)}(t,s,\nu),$$

где функции $\varphi^{(k)}(t,s,\nu)$ удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова:

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}(t,s,\nu)}{\partial t}=\mathcal{A}\varphi^{(1)}(t,s,\nu)-\lambda\varphi^{(1)}(t,s,\nu)+\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(s-z-\gamma)^2}{2\delta^2}}\varphi^{(N)}(t,z,\nu)dz,$$

$$\frac{\partial\varphi^{(k)}(t,s,\nu)}{\partial t}=\mathcal{A}\varphi^{(k)}(t,s,\nu)-\lambda\varphi^{(k)}(t,s,\nu)+\lambda\varphi^{(k-1)}(t,s,\nu),\quad k=2,\dots,N,$$

в которой

$$\mathcal{A}\varphi^{(k)}(t,s,\nu)=-\left(\mu-\frac{\nu}{2}-\xi\right)\frac{\partial}{\partial s}\varphi^{(k)}(t,s,\nu)-$$

$$-\kappa\frac{\partial}{\partial\nu}\left[(\theta-\nu)\varphi^{(k)}(t,s,\nu)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[\nu\varphi^{(k)}(t,s,\nu)\right]+$$

$$+\rho\varepsilon\frac{\partial^2}{\partial s\partial\nu}\left[\nu\varphi^{(k)}(t,s,\nu)\right]+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\left[\nu\varphi^{(k)}(t,s,\nu)\right],\quad k=1,2,\ldots,N.$$

Начальные состояния S_0 и ν_0 определяются заданными плотностями вероятности $\varphi_{10}(s)$ и $\varphi_{20}(\nu)$ соответственно:

$$\varphi^{(1)}(t_0,s,\nu)=\varphi_{10}(s)\varphi_{20}(\nu),\quad \varphi^{(k)}(t_0,s,\nu)=0,\quad k=2,\ldots,N.$$

Задача анализа динамики цены акции, описываемой моделями Мертона и Бейтса, заключается в нахождении вероятностных характеристик цены (плотности вероятности, математического ожидания, дисперсии, коэффициентов асимметрии и эксцесса и др.) по заданным параметрам модели. Плотность вероятности и моментные характеристики цены акции можно получить с помощью плотности вероятности логарифма цены и обратной замены переменных.

Заключение

Обобщение моделей Мертона и Бейтса позволяет приблизиться к более точному описанию динамики цены акций после обработки статистических данных по активам, использование эрланговских процессов дает возможность учитывать более сложный характер скачкообразного поведения цен и их некоторые специфические свойства.

ЛИТЕРАТУРА

1. Merton R. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous // Journal of Financial Economics. – 1976. V. 3. – P. 125–144.
2. Bates D. Jump and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options // Review of Financial Studies. – 1996. V. 9. – P. 69–107.
3. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. О применении спектрального метода анализа систем со случайным периодом квантования в модели Мертона // Модернизация и инновации в авиации и космонавтике: Сб. науч. тр. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. – С. 299–305.
4. Кожевников А.С. Анализ динамики цены актива в модели Бейтса спектральным методом // Студент и научно-технический прогресс. XLVIII Международная научная студенческая конференция: Тез. докл. – Новосибирск: НГУ, 2010. – С. 294–295.
5. Артемьев В.М., Ивановский А.В. Дискретные системы управления со случайным периодом квантования. – М.: Энергоатомиздат, 1986.