НАУЧНОЕ ИЗДАНИЕ МГТУ ИМ. Н. Э. БАУМАНА

НАУКА и ОБРАЗОВАНИЕ

Эл № ФС77 - 48211. Государственная регистрация №0421200025. ISSN 1994-0408

электронный научно-технический журнал

Спектральный метод анализа стохастических систем с разрывами траекторий, характеризуемыми чередованием эрланговских распределений

04, апрель 2013

DOI: 10.7463/0413.0568901

Кожевников А. С., Рыбаков К. А.

УДК 519.63 + 519.246

Россия, Московский авиационный институт
exequit@yandex.ru
rkoffice@mail.ru

Введение

Многие окружающие нас явления и закономерности (природные, технические, экономические и т.п.) имеют случайный характер, что позволяет описывать их случайными процессами. Математические модели, заданные в рамках этого подхода, применяются в социологических и демографических исследованиях, для имитации экономической конкуренции и ценообразования, при описании действия лекарственных препаратов и распространения эпидемий, при анализе процессов в сложных технических системах [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Эти явления достаточно часто требуется рассматривать в различных масштабах и поэтому изменения величин, описывающих состояние процесса, можно разделить на диффузионные (малые случайные изменения) и скачкообразные (изменения, связанные с разрывом траектории процесса). Таким образом, различные явления и процессы можно описать с помощью стохастических дифференциальных уравнений с диффузионной и скачкообразной компонентами.

В работе предложена модель стохастической системы управления, в которой моменты появления разрывов (скачков) траекторий образуют гиперэрланговский поток событий и генерируется два типа скачков, имеющих различные законы распределения величины скачка и распределения интервалов времени между скачками. Использование гиперэрланговского закона распределения (смеси эрланговских законов [9]), позволяет расширить спектр решаемых прикладных задач. Цель работы состоит в разработке спектрального метода анализа таких систем, основанного на разложении функций в ряды по ортонормированному базису [10, 11, 12, 13, 14, 15]. Этот метод является развитием подхода, применяемого для более простых стохастических систем [16, 17, 8, 18].

1. Постановка задачи

Будем предполагать, что поведение модели системы управления можно описать случайным процессом в непрерывном времени, являющимся аддитивной смесью диффузионного и специального скачкообразного процессов и удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению Ито [19]:

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)\,dt + \sigma\big(t, X(t)\big)\,dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

в котором $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $t \in T$, $T = [t_0, t_1]$ — заданный отрезок времени функционирования системы; $f(t, x)\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функция размеров $n \times 1$; $\sigma(t, x)\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times s}$ — матричная функция размеров $n \times s$; $W(t)$ — s-мерный стандартный винеровский процесс, который не зависит от начального состояния X_0, определяемого заданной плотностью вероятности $\varphi_0(x)$.

Случайный процесс $Q(t)$ представляется в виде

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{P(t)} Y(i, \tau_i), \quad Y(i, \tau_i) = \begin{cases} Y_1(\tau_i), & i \,(\mathrm{mod}\, N) = N_1; \\ Y_2(\tau_i), & i \,(\mathrm{mod}\, N) = 0; \\ \quad 0, & i \,(\mathrm{mod}\, N) \neq N_1 \text{ и } i \,(\mathrm{mod}\, N) \neq 0. \end{cases}$$

где $P(t)$ — пуассоновский процесс интенсивности λ, ассоциированный со случайным потоком событий [1, 20], состоящих в том, что вектор состояния X получает приращения $Y_1(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$ или $Y_2(\tau_i) \in \mathbb{R}^n$ в случайные моменты времени из множества $\{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$:

$$X(\tau_i) = X(\tau_i - 0) + Y(i, \tau_i), \quad i \,(\mathrm{mod}\, N) = N_1 \text{ или } i \,(\mathrm{mod}\, N) = 0.$$

Распределение интервалов времени $\Delta\tau_i = \tau_i - \tau_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ ($\tau_0 = t_0$), определяется показательным законом с параметром λ [3, 21]. Случайный вектор $Y_1(\tau_i)$ характеризуется плотностью вероятности $\psi_1(t, y)$, а случайный вектор $Y_2(\tau_i)$ — плотностью вероятности $\psi_2(t, y)$; $t = \tau_i$. Приращения $Y_1(\tau_i)$ и $Y_2(\tau_i)$ чередуются между собой.

Заданное положительное число λ, а также натуральные числа N_1 и N определяют гиперэрланговский закон распределения промежутков времени между последовательными разрывами траектории процесса $X(t)$. Это распределение можно описать с помощью чередования эрланговских законов распределений, имеющих одинаковую интенсивность λ и различные порядки N_1 и $N_2 = N - N_1$ соответственно [21].

Далее рассмотрим другое описание схемы появления событий (разрывов в траекториях вектора состояния). Для этого рассмотрим случайный процесс $K(t)$ с конечным множеством состояний $\{1, 2, \ldots, N\}$, которые сменяются последовательно, начиная с 1, в соответствии с кольцевым графом состояний. Граф состояний случайного процесса $K(t)$ представлен на рис. 1. При переходе из состояния с номером N_1 в состояние с номером $N_1 + 1$ вектор X получает случайное приращение Y_1 с плотностью $\psi_1(t, y)$, а при переходе из состояния с номером N в состояние с номером 1 — случайное приращение Y_2 с плотностью $\psi_2(t, y)$,

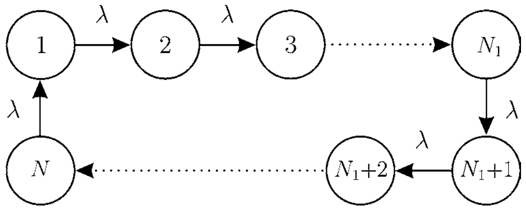

Рис. 1. Граф состояний случайного процесса $K(t)$

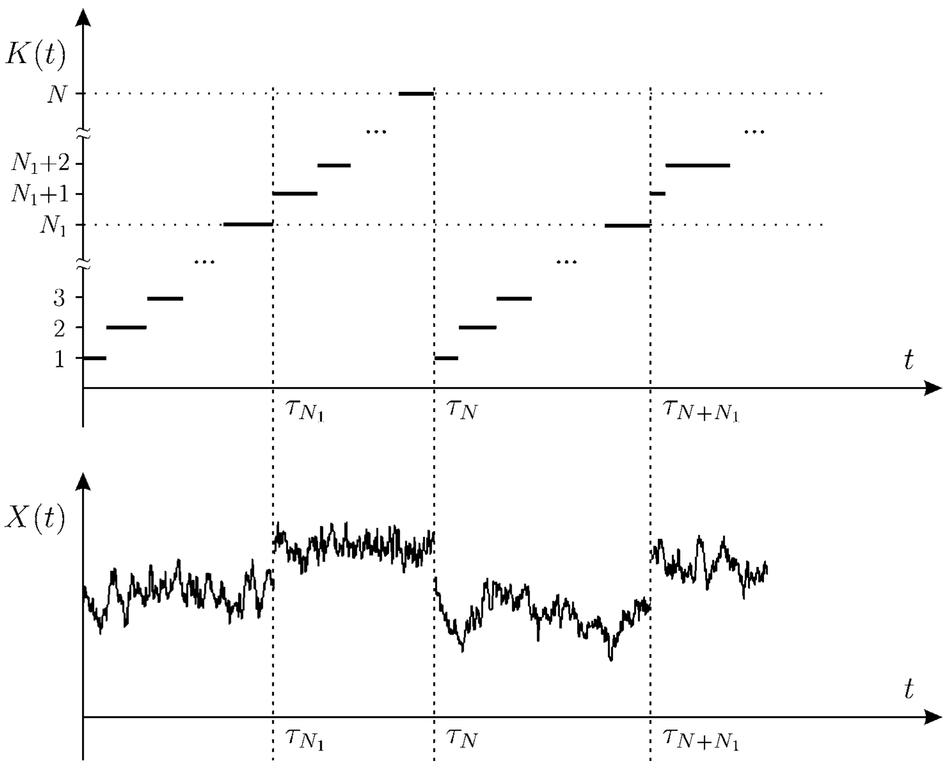

Рис. 2. Выборочные траектории процессов $K(t)$ и $X(t)$

что соответствует разрыву траектории процесса $X(t)$. Примеры выборочных траекторий процессов $K(t)$ и $X(t)$ показаны на рис. 2.

Если предположить, что распределение величины Y_1 характеризуется плотностью вероятности $\psi_1(t, y) = \delta(y)$, где $\delta(y)$ — дельта-функция, то интервалы времени между последовательными разрывами траектории процесса $X(t)$ будут иметь эрланговское распределение с параметрами λ и N. Этот случай изложен в работе [18].

Заметим, что постановка задачи может быть изменена с предположением, что интенсивность λ зависит от времени, т.е. $\lambda = \lambda(t)$, $\lambda(t)\colon T \to [0,\ +\infty)$. Далее будем рассматривать именно такой вариант.

Таким образом, рассматривается стохастическая система с расширенным вектором состояния, непрерывная часть которого — X, а дискретная — $K \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Тогда плотность вероятности $\varphi(t, x)$ вектора X может быть представлена в виде суммы:

$$\varphi(t, x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi^{(k)}(t, x),$$

где функции $\varphi^{(k)}(t,x)$ удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера — Планка — Колмогорова [1,2,22]:

$$\frac{\partial\varphi^{(1)}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi^{(1)}(t,x) - \lambda(t)\varphi^{(1)}(t,x) + \lambda(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi_2(t,x-z)\varphi^{(N)}(t,z)\,dz, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(N_1+1)}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi^{(N_1+1)}(t,x) - \lambda(t)\varphi^{(N_1+1)}(t,x) + \lambda(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi_1(t,x-z)\varphi^{(N_1)}(t,z)\,dz, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\varphi^{(k)}(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi^{(k)}(t,x) - \lambda(t)\varphi^{(k)}(t,x) + \lambda(t)\varphi^{(k-1)}(t,x), \quad k=2,\ldots,N_1,N_1+2,\ldots,N, \tag{4}$$

в которой

$$\mathcal{A}\varphi^{(k)}(t,x) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[f_i(t,x)\varphi^{(k)}(t,x)\Big] + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Big[g_{ij}(t,x)\varphi^{(k)}(t,x)\Big], \quad k=1,2,\ldots,N, \tag{5}$$

$$g_{ij}(t,x) = \sum_{r=1}^{s}\sigma_{ir}(t,x)\sigma_{jr}(t,x), \quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Для случайного процесса $K(t)$ начальное состояние фиксировано: $K(t_0)=1$, поэтому с учетом заданной плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0 имеем

$$\varphi^{(1)}(t_0,x) = \varphi_0(x), \quad \varphi^{(k)}(t_0,x) = 0, \quad k=2,\ldots,N. \tag{6}$$

Последние слагаемые в правых частях уравнений (3) и (2) можно представить в операторной форме $\mathcal{H}_1\varphi^{(N_1)}(t,x)$ и $\mathcal{H}_2\varphi^{(N)}(t,x)$ соответственно, определив

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_1\varphi^{(N_1)}(t,x) &= \lambda(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi_1(t,x-z)\varphi^{(N_1)}(t,z)\,dz,\\ \mathcal{H}_2\varphi^{(N)}(t,x) &= \lambda(t)\int\limits_{\mathbb{R}^n}\psi_2(t,x-z)\varphi^{(N)}(t,z)\,dz,\end{aligned} \tag{7}$$

для всех допустимых функций $\varphi(t,x)$; $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — линейные операторы, а именно композиции оператора умножения на функцию $\lambda(t)$ и операторов Фредгольма с ядрами $\psi_1(t,x-z)$ и $\psi_2(t,x-z)$.

Задача анализа стохастической системы управления, описываемой уравнением (1), заключается в нахождении плотности вероятности $\varphi(t,x)$ вектора состояния X.

Далее предполагается, что при заданных функциях $f(t,x)$, $\sigma(t,x)$, $\lambda(t)$, $\psi_1(t,y)$, $\psi_2(t,y)$ и $\varphi_0(x)$ существует единственное решение задач (1) и (2)–(6). Условия на функции $f(t,x)$, $\sigma(t,x)$, $\lambda(t)$, начальное состояние X_0 и определение обобщенного решения системы уравнений (2)–(6) даны, например, в [22].

2. Применение спектральной формы математического описания

Сведем задачу анализа к поиску коэффициентов разложения $\varphi_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ функции $\varphi(t,x)$ по ортонормированным функциям в пространстве $L_2(T \times \mathbb{R}^n)$. Обозначим полную систему ортонормированных функций $\bigl\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\bigr\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$, предполагая, что они представляются в виде произведения

$$e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x) = q(i_0, t)\, p(i_1, \ldots, i_n, x), \quad i_0, i_1, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots,$$

причем функции $\bigl\{q(i_0,t)\bigr\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\bigl\{p(i_1, \ldots, i_n, x)\bigr\}_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ образуют полные ортонормированные системы в пространствах $L_2(T)$ и $L_2(\mathbb{R}^n)$ соответственно.

Применим спектральное преобразование [13, 14] к системе уравнений (2)–(4) с учетом условий (6), тогда

$$\begin{gathered} P(n+1,n+1)\, \Phi^{(1)}(n+1,0) - q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(n,0) = A(n+1,n+1)\Phi^{(1)}(n+1,0) - \\ - \Lambda(n+1,n+1)\Phi^{(1)}(n+1,0) + H_2(n+1,n+1) \cdot \Phi^{(N)}(n+1,0), \end{gathered} \tag{8}$$

$$\begin{gathered} P(n+1,n+1)\, \Phi^{(N_1+1)}(n+1,0) = A(n+1,n+1)\, \Phi^{(N_1+1)}(n+1,0) - \\ - \Lambda(n+1,n+1)\, \Phi^{(N_1+1)}(n+1,0) + H_1(n+1,n+1)\, \Phi^{(N_1)}(n+1,0), \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} P(n+1,n+1)\, \Phi^{(k)}(n+1,0) = \\ = A(n+1,n+1)\, \Phi^{(k)}(n+1,0) - \Lambda(n+1,n+1)\, \Phi^{(k)}(n+1,0) + \\ + \Lambda(n+1,n+1)\, \Phi^{(k-1)}(n+1,0), \quad k = 2, \ldots, N_1, N_1+2, \ldots, N. \end{gathered} \tag{10}$$

В этих соотношениях $P(n+1,n+1)$ — спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент; $A(n+1,n+1)$, $H_1(n+1,n+1)$ и $H_2(n+1,n+1)$ — спектральные характеристики операторов $\mathcal{A}$, $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$, определенных выражениями (5), (7); $\Lambda(n+1,n+1)$ — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\lambda(t)$; $\Phi^{(k)}(n+1,0)$ — спектральные характеристики функций $\varphi^{(k)}(t,x)$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Все перечисленные характеристики определены относительно системы функций $\bigl\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\bigr\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$. Далее, $q(1,0;t_0)$ — матрица-столбец значений функций базисной системы $\bigl\{q(i_0,t)\bigr\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0; $\Phi_0(n,0)$ — спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно функций $\bigl\{p(i_1, \ldots, i_n, x)\bigr\}_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$.

Спектральная характеристика $\Phi(n+1,0)$ плотности вероятности $\varphi(t,x)$, называемая также обобщенной характеристической функцией [11, 13, 14], выражается следующим образом ($\Phi(n+1,0)$ — многомерная гиперстолбцовая матрица, образованная искомыми коэффициентами разложения $\varphi_{i_0 i_1 \ldots i_n}$):

$$\Phi(n+1,0) = \sum_{k=1}^{N} \Phi^{(k)}(n+1,0). \tag{11}$$

В основе соотношений (8)–(10) лежат определения, форма представления и свойства спектральных характеристик функций и линейных операторов, подробно изложенные в [10, 13, 14, 15]. Определение спектральной характеристики, аналогичной $H_1(n+1, n+1)$ и $H_2(n+1, n+1)$, дано в [18]. В работах [8, 13, 14, 17, 18] приведено представление спектральной характеристики $A(n+1, n+1)$ с помощью спектральных характеристик операторов дифференцирования и умножения.

Система уравнений (8)–(10) представляет собой систему линейных матричных уравнений относительно неизвестных спектральных характеристик $\Phi^{(k)}(n+1, 0)$, или систему линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно элементов матриц $\Phi^{(k)}(n+1, 0)$, т.е. коэффициентов разложения функций $\varphi^{(k)}(t, x)$ по функциям базисной системы $\big\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\big\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$.

Перейдем к решению этой системы. Из уравнения (9) следует, что

$$\begin{aligned}\big(P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \Lambda(n+1, n+1)\big)\Phi^{(N_1+1)}(n+1, 0) = \\ = H_1(n+1, n+1) \cdot \Phi^{(N_1)}(n+1, 0),\end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}\Phi^{(N_1)}(n+1, 0) = H_1^{-1}(n+1, n+1)\big(P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \\ + \Lambda(n+1, n+1)\big)\Phi^{(N_1+1)}(n+1, 0),\end{aligned}$$

или кратко

$$\begin{aligned}\Phi^{(N_1)}(n+1, 0) = \widetilde{W}(n+1, n+1)\,\Phi^{(N_1+1)}(n+1, 0) = \\ = H_1^{-1}(n+1, n+1)\,\Lambda(n+1, n+1)\,W(n+1, n+1)\,\Phi^{(N_1+1)}(n+1, 0),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\widetilde{W}(n+1, n+1) &= H_1^{-1}(n+1, n+1)\big(P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \Lambda(n+1, n+1)\big), \\ W(n+1, n+1) &= \Lambda^{-1}(n+1, n+1)\big(P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \Lambda(n+1, n+1)\big).\end{aligned}$$

Из уравнения (10) следует, что

$$\begin{aligned}\big(P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \Lambda(n+1, n+1)\big)\Phi^{(k)}(n+1, 0) = \\ = \Lambda(n+1, n+1)\Phi^{(k-1)}(n+1, 0), \quad k = 2, \ldots, N_1, N_1+2, \ldots, N.\end{aligned}$$

т.е.

$$\begin{aligned}\Phi^{(k-1)}(n+1, 0) = \Lambda^{-1}(n+1, n+1)\big(P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \\ + \Lambda(n+1, n+1)\big) \cdot \Phi^{(k)}(n+1, 0), \quad k = 2, \ldots, N_1, N_1+2, \ldots, N,\end{aligned}$$

или кратко

$$\Phi^{(k-1)}(n+1,0) = W(n+1,n+1)\,\Phi^{(k)}(n+1,0), \quad k = 2,\ldots,N_1, N_1+2,\ldots,N.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&\Phi^{(1)}(n+1,0) = W^{k-1}(n+1,n+1)\,\Phi^{(k)}(n+1,0),\\
&\Phi^{(k)}(n+1,0) = W^{N_1-k}(n+1,n+1)\,\widetilde{W}(n+1,n+1)\times\\
&\qquad\qquad\times W^{N-N_1-1}(n+1,n+1)\,\Phi^{(N)}(n+1,0), \quad k = 1,\ldots,N_1;\\
&\Phi^{(1)}(n+1,0) = W^{N_1-1}(n+1,n+1)\,\widetilde{W}(n+1,n+1)\times\\
&\qquad\qquad\times W^{k-N_1-1}(n+1,n+1)\,\Phi^{(k)}(n+1,0),\\
&\Phi^{(k)}(n+1,0) = W^{N-k}(n+1,n+1)\,\Phi^{(N)}(n+1,0), \quad k = N_1+1,\ldots,N,
\end{aligned}$$

в частности,

$$\Phi^{(1)}(n+1,0) = W^{N_1-1}(n+1,n+1)\,\widetilde{W}(n+1,n+1)\,W^{N_2-1}(n+1,n+1)\,\Phi^{(N)}(n+1,0). \quad (12)$$

Перепишем уравнение (8) с учетом (12):

$$\begin{aligned}
&\big(\Lambda(n+1,n+1)W^{N_1}(n+1,n+1)\widetilde{W}(n+1,n+1)W^{N_2-1}(n+1,n+1)-\\
&\qquad - H_2(n+1,n+1)\big)\Phi^{(N)}(n+1,0) = q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0),
\end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned}
\Phi^{(N)}(n+1,0) = &\big(\Lambda(n+1,n+1)\,W^{N_1}(n+1,n+1)\,\widetilde{W}(n+1,n+1)\times\\
&\times W^{N_2-1}(n+1,n+1) - H_2(n+1,n+1)\big)\big(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\big).
\end{aligned}$$

С учетом равенства

$$\widetilde{W}(n+1,n+1) = H_1^{-1}(n+1,n+1)\,\Lambda(n+1,n+1)\,W(n+1,n+1) \quad (13)$$

имеем

$$\begin{aligned}
\Phi^{(N)}(n+1,0) = &\big(\Lambda(n+1,n+1)\,W^{N_1}(n+1,n+1)\,H_1^{-1}(n+1,n+1)\times\\
&\times\Lambda(n+1,n+1)\,W^{N_2}(n+1,n+1) - H_2(n+1,n+1)\big)^{-1}\big(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\big). \quad (14)
\end{aligned}$$

Далее выразим спектральную характеристику $\Phi(n+1,0)$, принимая во внимание (11):

$$\begin{aligned}
\Phi(n+1,0) = &\sum_{k=1}^{N_1}\Phi^{(k)}(n+1,0) + \sum_{k=N_1+1}^{N}\Phi^{(k)}(n+1,0) =\\
&= \Bigg[\sum_{k=1}^{N_1} W^{N_1-k}(n+1,n+1)\,\widetilde{W}(n+1,n+1)\,W^{N_2-1}(n+1,n+1) +\\
&\qquad + \sum_{k=1}^{N_2} W^{N_2-k}(n+1,n+1)\Bigg]\Phi^{(N)}(n+1,0).
\end{aligned}$$

В [18] было показано, что

$$\sum_{k=1}^{N} W^{N-k}(n+1,n+1) = \\ = \big(E(n+1,n+1) - W^{N}(n+1,n+1)\big)\big(E(n+1,n+1) - W(n+1,n+1)\big)^{-1}, \quad (15)$$

поэтому

$$\Phi(n+1,0) = \Big[\big(E(n+1,n+1) - W^{N_1}(n+1,n+1)\big) \times \\ \times \big(E(n+1,n+1) - W(n+1,n+1)\big)^{-1}\widetilde{W}(n+1,n+1)\,W^{N_2-1}(n+1,n+1) + \\ + \big(E(n+1,n+1) - W^{N_2}(n+1,n+1)\big)\big(E(n+1,n+1) - W(n+1,n+1)\big)^{-1}\Big]\Phi^{(N)}(n+1,0).$$

Тогда, учитывая соотношения (13) и (14), получаем решение рассматриваемой задачи в спектральной форме математического описания:

$$\Phi(n+1,0) = \Big[\big(E(n+1,n+1) - W^{N_1}(n+1,n+1)\big)\big(E(n+1,n+1) - W(n+1,n+1)\big)^{-1} \times \\ \times H_1^{-1}(n+1,n+1)\,\Lambda(n+1,n+1)\,W^{N_2}(n+1,n+1) + \\ + \big(E(n+1,n+1) - W^{N_2}(n+1,n+1)\big)\big(E(n+1,n+1) - W(n+1,n+1)\big)^{-1}\Big] \times \\ \times \Big[\Lambda(n+1,n+1)W^{N_1}(n+1,n+1)\,H_1^{-1}(n+1,n+1)\,\Lambda(n+1,n+1) \times \\ \times W^{N_2}(n+1,n+1) - H_2(n+1,n+1)\Big]^{-1}\big(q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(n,0)\big).$$

З а м е ч а н и е. Если при переходе из состояния с номером N_1 в состояние с номером N_1+1 приращение Y_1 вектора состояния X будет всегда нулевым, то $H_1(n+1,n+1) = = \Lambda(n+1,n+1)$, $\widetilde{W}(n+1,n+1) = W(n+1,n+1)$ и решение рассматриваемой задачи в спектральной форме математического описания примет вид

$$\Phi(n+1,0) = \Big[\big(E(n+1,n+1) - W^{N_1}(n+1,n+1)\big) \times \\ \times \big(E(n+1,n+1) - W(n+1,n+1)\big)^{-1} W^{N_2}(n+1,n+1) + \\ + \big(E(n+1,n+1) - W^{N_2}(n+1,n+1)\big)\big(E(n+1,n+1) - W(n+1,n+1)\big)^{-1}\Big] \times \\ \times \big[\Lambda(n+1,n+1)\,W^{N_1+N_2}(n+1,n+1) - H_2(n+1,n+1)\big]^{-1}\big(q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(n,0)\big).$$

Далее, ввиду (15) и того, что $N_1 + N_2 = N$,

$$\big(E(n+1,n+1) - W^{N_1}(n+1,n+1)\big)\big(E(n+1,n+1) - W(n+1,n+1)\big)^{-1}W^{N_2}(n+1,n+1) + \\ + \big(E(n+1,n+1) - W^{N_2}(n+1,n+1)\big)\big(E(n+1,n+1) - W(n+1,n+1)\big)^{-1} = \\ = \sum_{k=1}^{N_1} W^{N_1-k}(n+1,n+1)\cdot W^{N_2}(n+1,n+1) + \sum_{k=1}^{N_2} W^{N_2-k}(n+1,n+1) = \\ = \sum_{k=1}^{N_1} W^{N_1+N_2-k}(n+1,n+1) + \sum_{k=N_1+1}^{N_1+N_2} W^{N_1+N_2-k}(n+1,n+1) = \sum_{k=1}^{N} W^{N-k}(n+1,n+1).$$

Обозначая $H_2(n+1,n+1) = H(n+1,n+1)$, получаем

$$\Phi(n+1,0) = \big(E(n+1,n+1) - W^N(n+1,n+1)\big)\big(E(n+1,n+1) - W(n+1,n+1)\big)^{-1} \times \\ \times \big[\Lambda(n+1,n+1)\cdot W^N(n+1,n+1) - H(n+1,n+1)\big]^{-1}\big(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\big),$$

что совпадает с решением задачи анализа, рассмотренной в работе [18].

Для нахождения решения задачи анализа в пространстве функций времени и вектора состояния требуется применить формулу обращения [13, 14]:

$$\varphi(t,x) = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}\varphi_{i_0 i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \quad (t,x)\in T\times\mathbb{R}^n.$$

Обычно приближенно определяется конечное число коэффициентов $\varphi_{i_0 i_1\ldots i_n}$, поскольку задача нахождения всех коэффициентов разложения не является тривиальной. В этом случае бесконечные матрицы в (8)–(11) заменяются конечными матрицами:

$$\varphi(t,x) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\ldots\sum_{i_n=0}^{L_n-1}\varphi_{i_0 i_1\ldots i_n}\, e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),$$

где натуральные числа L_0, L_1, ..., L_n — выбранные порядки усечения спектральных характеристик, влияющие на точность решения.

Заключение

В работе рассмотрено применение спектральной формы математического описания к задаче вероятностного анализа стохастических систем, которые характеризуются наличием разрывов (скачков) траекторий, образующих гиперэрланговский поток событий. Получены соотношения для нахождения плотности вероятности вектора состояния в спектральной форме математического описания систем управления. Использование гиперэрланговских потоков дает возможность учитывать более сложный характер поведения траекторий вектора состояния, а применение спектральной формы математического описания позволяет свести систему интегро-дифференциальных уравнений к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения искомой плотности вероятности по некоторой ортонормированной системе функций.

Рассмотренный подход упрощает процесс решения задачи анализа, делая его удобным для применения современных высокопроизводительных вычислительных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00892-а).

Список литературы

1. Артемьев В.М., Ивановский А.В. Дискретные системы управления со случайным периодом квантования. М.: Энергоатомиздат, 1986. 96 с.

2. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993. 272 с.
3. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977. 488 с.
4. Hanson F.B. Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions. Philadelphia: SIAM, 2007.
5. Кожевников А.С. Программное обеспечение для статистического моделирования и анализа случайных процессов со скачками, описывающих динамику цен акций предприятий авиационной отрасли // Труды МАИ. 2012. № 59. Режим доступа: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=34411 (дата обращения 01.02.2013).
6. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. О применении спектрального метода анализа систем со случайным периодом квантования в модели Мертона // Модернизация и инновации в авиации и космонавтике: сб. науч. тр. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2011. С. 299–305.
7. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Об оценке стоимости финансовых инструментов в модели Бейтса // Проблемы авиастроения, космонавтики и ракетостроения: сб. науч. тр. М.: Изд-во «Ваш полиграфический партнер», 2012. С. 353–361.
8. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Новые методы анализа воздействия пуассоновских дельта-импульсов в задачах радиотехники // Журнал радиоэлектроники. 2013. № 1. Режим доступа: http://jre.cplire.ru/jre/jan13/13/text.html (дата обращения 01.02.2013).
9. Костылев В.И. О композиции гамма-статистик // Вестник Воронежского государственного университета. Серия «Физика. Математика». 2000. № 1. Режим доступа: http://www.vestnik.vsu.ru/program/view/view.asp?sec=physmath&year=2000&num=01&f_name=kostylev (дата обращения 01.02.2013).
10. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974. 334 с.
11. Семенов В.В. Уравнение обобщенной характеристической функции вектора состояния систем автоматического управления // Аналитические методы синтеза регуляторов. Вып. 2: межвуз. науч. сб. Саратов: СПИ, 1977. С. 3–36.
12. Лапин С.В., Егупов Н.Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления: монография. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997. 495 с.
13. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. 160 с.
14. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 2012. 160 с.

15. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. М.: Изд-во МАИ, 2011. 218 с.

16. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Анализ стохастических систем на основе решения уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова // В кн.: Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация / под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. С. 312–338.

17. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций // Автоматика и телемеханика. 2011. № 2. С. 183–194.

18. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Анализ нелинейных стохастических систем управления с импульсными воздействиями, образующими эрланговские потоки событий // Научный Вестник МГТУ ГА. 2012. № 184 (10). С. 37–45.

19. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990. 632 с.

20. Большаков И.А., Ракошиц В.С. Прикладная теория случайных потоков. М.: Советское радио, 1978. 248 с.

21. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.

22. Rybakov K.A., Sotskova I.L. Spectral Method for Analysis of Switching Diffusions // IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. V. 52. № 7. P. 1320–1325. DOI: 10.1109/TAC.2007.900841.

SCIENTIFIC PERIODICAL OF THE BAUMAN MSTU

SCIENCE and EDUCATION

EL № FS77 - 48211. №0421200025. ISSN 1994-0408

electronic scientific and technical journal

Spectral method for stochastic systems with discontinuous trajectories described by alternation of Erlangian distribution

04, April 2013

DOI: 10.7463/0413.0568901

Kozhevnikov A. S., Rybakov K. A.

Russia, Moscow Aviation Institute

exequit@yandex.ru

rkoffice@mail.ru

This article considers stochastic control systems with impulses that are generated by hyper-Erlangian flows of events and lead to discontinuities of system trajectories. The authors solve the problem of finding a probability density function for the system state. The solution is based on usage of the spectral form of mathematical description. The purpose of this paper is to develop a spectral method for analysis of this kind of systems, based on function expansion by a series of orthonormal functions. This approach simplifies the process of solving analysis problems, making it convenient for use of modern high-performance computers.

References

1. Artemev V.M., Ivanovskiy A.V. *Diskretnye sistemy upravleniya so sluchaynym periodom kvantovaniya* [Digital Control Systems with Random Sampling Period]. Moscow, Energoatomizdat, 1986. 96 p.
2. Kazakov I.Ye., Artemev V.M., Bukhalev V.A. *Analiz sistem sluchaynoy struktury* [Analysis of Systems with Random Structure]. Moscow, Fizmatlit, 1993. 272 p.
3. Tikhonov V.I., Mironov M.A. *Markovskie protsessy* [Markov Processes]. Moscow, Sovetskoe radio, 1977. 488 p.
4. Hanson F.B. *Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions*. SIAM, Philadelphia, 2007.
5. Kozhevnikov A.S. Programmnoe obespechenie dlya statisticheskogo modelirovaniya i analiza sluchaynykh protsessov so skachkami, opisyvayushchikh dinamiku tsen aktsiy predpriyatiy aviatsionnoy otrasli [The Software for Statistical Modeling and Analysis

of Random Processes with Jumps, which Describe the Stock Price Dynamics of Aircraft Industry]. *Trudy MAI* [Proceedings of MAI], 2012, no. 59. Available at: http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?eng=Y&ID=34411, accessed 01.02.2013.

6. Kozhevnikov A.S., Rybakov K.A. O primenenii spektralnogo metoda analiza sistem so sluchaynym periodom kvantovaniya v modeli Mertona [On the Application of Spectral Analysis Method of Systems with Random Sampling Period in Merton Model]. In: *Modernizatsiya i innovatsii v aviatsii i kosmonavtike: cb. nauch. tr.* [Modernization and Innovation in Aviation and Aerospace: collection of scientific papers]. Moscow, MAI-PRINT Publ., 2011, pp. 299–305.

7. Kozhevnikov A.S., Rybakov K.A. Ob otsenke stoimosti finansovykh instrumentov v modeli Beytsa [On the Valuation of Financial Instruments in Bates Model]. In: *Problemy aviastroeniya, kosmonavtiki i raketostroeniya: cb. nauch. tr.* [Problems of Aviation, Space Exploration and Rocketry: collection of scientific papers]. Moscow, "Vash poligraficheskiy partner" Publ., 2012, pp. 353–361.

8. Averina T.A., Rybakov K.A. Novye metody analiza vozdeystviya puassonovskikh delta-impulsov v zadachakh radiotekhniki [New Methods of Poisson Impulses Analysis in Radio Engineering Problems]. *Zhurnal radioelektroniki* [Journal of Radio Electronics], 2013, no. 1. Available at: http://jre.cplire.ru/jre/jan13/13/abstract_e.html, accessed 01.02.2013.

9. Kostylev V.I. O kompozitsii gamma-statistik [On the Composition of Gamma-Statistics]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta. Ser. "Fizika. Matematika"* [Proc. of Voronezh State University. Ser. Physics. Mathematics], 2000, no. 1. Available at: http://www.vestnik.vsu.ru/program/view/view.asp?sec=physmath&year=2000&num=01&f_name=kostylev, accessed 01.02.2013.

10. Solodovnikov V.V., Semenov V.V. *Spektralnaya teoriya nestatsionarnykh sistem upravleniya* [The Spectral Theory of Nonstationary Control Systems]. Moscow, Nauka, 1974. 334 p.

11. Semenov V.V. Uravnenie obobshchennoy kharakteristicheskoy funktsii vektora sostoyaniya sistem avtomaticheskogo upravleniya [The Equation for Generalized Characteristic Function of Automatic Control Systems State Vector]. *Analiticheskie metody sinteza regulyatorov: mezhvuz. nauch. sb*. Iss. 2. [Analytical Methods for Regulator Synthesis: interuniversity collection of scientific papers]. Saratov, SPI Publ., 1977, pp. 3–36.

12. Lapin S.V., Yegupov N.D. *Teoriya matrichnykh operatorov i ee prilozhenie k zadacham avtomaticheskogo upravleniya* [The Theory of Matrix Operators and its Application to Automatic Control Problems]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 1997. 495 p.

13. Panteleev A.V., Rybakov K.A. Prikladnoy veroyatnostnyy analiz nelineynykh sistem upravleniya spektraln'ym metodom [Applied Probabilistic Analysis of Nonlinear Control Systems by Spectral Method]. Moscow, MAI-PRINT Publ., 2010. 160 p.

14. Panteleev A.V., Rybakov K.A. Metody i algoritmy sinteza optimalnykh stokhasticheskikh sistem upravleniya pri nepolnoy informatsii [Methods and Algorithms for Synthesis of Optimal Stochastic Control Systems on Incomplete Information]. Moscow, MAI Publ., 2012. 160 p.

15. Rybin V.V. Modelirovanie nestatsionarnykh nepreryvno-diskretnykh sistem upravleniya spektralnym metodom v sistemakh kompyuternoy matematiki [Simulation of Nonstationary Continuous-Discrete Control Systems by Spectral Method on Computers]. Moscow, MAI Publ., 2011. 218 p.

16. Rybakov K.A., Sotskova I.L. Analiz stokhasticheskikh sistem na osnove resheniya uravneniya Fokkera–Planka–Kolmogorova [Analysis of Stochastic Systems Based on the Solution of the Fokker–Planck–Kolmogorov Equation]. In: Pupkov K.A., Yegupov N.D., eds. *Nestatsionarnye sistemy avtomaticheskogo upravleniya: analiz, sintez i optimizatsiya* [Nonstationary Automation Systems: Analysis, Synthesis and Optimization]. Moscow, Bauman MSTU Publ., 2007, pp. 312–338.

17. Panteleev A.V., Rybakov K.A. Analiz nelineinykh stokhasticheskikh sistem upravleniia v klasse obobshchennykh kharakteristicheskikh funktsii [Analyzing Nonlinear Stochastic Control Systems in the Class of Generalized Characteristic Functions]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2011, no. 2, pp. 183–194. (Trans. version: Automation and Remote Control, 2011, vol. 72, no. 2, pp. 393–404. DOI: 10.1134/S0005117911020159.)

18. Kozhevnikov A.S., Rybakov K.A. Analiz nelineynykh stokhasticheskikh sistem upravleniya s impulsnymi vozdeystviyami, obrazuyushchimi erlangovskie potoki sobytiy [Analysis of Nonlinear Stochastic Control System with Impulse Signals Generated by Erlang Flows of Events]. *Nauchnyy Vestnik MGTU GA*, 2012, no. 184 (10), pp. 37–45.

19. Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. *Stokhasticheskie differentsial'nye sistemy. Analiz i fil'tratsiia* [Stochastic differential systems. Analysis and filtering]. Moscow, Nauka, 1990. 632 p. (Eng. ed.: Pugachev V.S., Sinitsyn I.N. *Stochastic Systems: Theory and Applications*. World Scientific, New Jersey, 2001.)

20. Bolshakov I.A., Rakoshits V.S. Prikladnaya teoriya sluchaynykh potokov [Applied Theory of Random Flows]. Moscow, Sovetskoe radio, 1978. 248 p.

21. Venttsel Ye.S., Ovcharov L.A. Teoriya veroyatnostey i ee inzhenernye prilozheniya [Probability Theory and its Engineering Applications]. Moscow, Nauka, 1988. 480 p.

22. Rybakov K.A., Sotskova I.L. Spectral Method for Analysis of Switching Diffusions. IEEE Transactions on Automatic Control, 2007, vol. 52, no. 7, pp. 1320–1325. DOI: 10.1109/TAC.2007.900841.