А. С. Кожевников, К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт (государственный технический университет)

ОБ ОЦЕНКЕ СТОИМОСТИ ФИНАНСОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ В МОДЕЛИ БЕЙТСА

Введение. В настоящее время в условиях неопределенности на рынке ценных бумаг разрабатывается огромное количество различных подходов – технический анализ, применение нейронных сетей, использование регрессионного анализа и т.п. – для прогнозирования цен различных финансовых инструментов. В течение последнего десятилетия при моделировании колебаний рынка становятся популярными случайные процессы со скачками, рассматриваемые в непрерывном времени. Большинство моделей, построенных на таких процессах, задаются с помощью процессов Леви с ненулевой гауссовой компонентой и компонентой, которая является составным пуассоновским процессом, позволяющим моделировать скачки цен [1]. Примерами таких моделей являются диффузионно-скачкообразная модель Мертона с гауссовскими скачками [2]; модель Коу с двойным экспоненциальным скачком [3]; модель Бейтса [4, 5] со скачками, имеющими логарифмически нормальное распределение, и стохастической волатильностью.

В данной работе предлагается рассмотреть модель, разработанную Бейтсом, которая применяется для оценки стоимости опционов и цен активов. Для анализа модели предлагается свести ее к интегро-дифференциальному уравнению в частных производных и применить метод, основанный на спектральной форме математического описания [6–8].

Описание модели. В модели Бейтса динамика цены актива состоит из диффузионной части, которая моделируется с помощью броуновского движения, и разрывной или скачкообразной части, которая моделируется пуассоновским процессом. Она относится к классу непрерывных по времени диффузионных моделей со скачками в цене. С помощью модели Бейтса можно получать достаточно сложные распределения. Эти распределения могут возникать как из-за корреляции между волатильностью и ценой актива, так и из-за скачков. Аналогично можно генерировать различные коэффициенты эксцесса и асимметрии, изменяя как волатильность вариации, так и параметры скачков.

В модели сделаны следующие допущения [4]:

- рынки являются идеальными: нет транзакционных выплат, налогов и ограничений на получение кредитов, торговля происходит в непрерывном времени, допускается «short-sale»;
- коэффициент роста является известным и постоянным;
- цена актива моделируется скачкообразно-диффузионным процессом со стохастической вариацией, описываемой CIR-процессом.

Предполагается, что скачки цены актива независимы и одинаково распределены. Они образуют пуассоновский поток событий с постоянной интенсивностью λ (характеризующей среднее количество скачков за единицу времени).

Предположим, что в малый промежуток времени Δt цена актива совершила скачок с X к yX, где y – коэффициент, характеризующий во сколько раз yX больше X. Тогда относительный скачок цены будет равен $\frac{yX-X}{X}=y-1$ и допускается, что коэффициент y аналогично распределению цены актива является неотрицательной случайной величиной, которая имеет логарифмически нормальное распределение, т.е. $\ln y \sim N(\gamma,\delta^2)$. При этом его математическое ожидание равно $M[y]=e^{\gamma+\frac{1}{2}\delta^2}$, а дисперсия – $D[y]=e^{2\gamma+\delta^2}(e^{\delta^2}-1)$.

Динамика цены актива в модели Бейтса описывается стохастическими дифференциальными уравнениями [4]

$$dX(t)=(\mu-\lambda\kappa)X(t)dt+\sqrt{\nu(t)}X(t)dW_1(t)+(y-1)X(t)dP(t), \quad X(0)=X_0, \tag{1}$$

$$d\nu(t)=k(\theta-\nu(t))dt+\varepsilon\sqrt{\nu(t)}dW_2(t), \quad \nu(0)=\nu_0, \tag{2}$$

где $t\in T=[0,t_k]$, $X\in[0,+\infty)$ – цена акции, $\nu\in[0,+\infty)$ – вариация (волатильность при этом будет равна $\sigma=\sqrt{\nu}$), μ – процентная ставка, θ – равновесная вариация, k – скорость возвращения к равновесной вариации, ε – волатильность вариации, $\kappa=e^{\gamma+\frac{1}{2}\delta^2}-1$ – математическое ожидание величины $y-1$. Начальная цена X_0 и начальная вариация ν_0 независимы и имеют заданные распределения (заданы плотности вероятности); $W_1(t)$ и $W_2(t)$ – винеровские случайные процессы с коэффициентом корреляции $\rho\in[-1,1]$, $P(t)$ – пуассоновский процесс с интенсивностью λ; $W_1(t)$, $W_2(t)$ и $P(t)$ не зависят от X_0, ν_0 и y; t_k – момент времени окончания процесса (момент исполнения опциона). Процессы $W_1(t)$ и $W_2(t)$ не зависят от $P(t)$. Процесс $W_2(t)$ будем представлять в виде $W_2(t)=\rho W_1(t)+\sqrt{1-\rho^2}Z(t)$, где $Z(t)$ – винеровский процесс, не зависящий от $W_1(t)$ и $P(t)$.

Для упрощения модели цены актива и, следовательно, последующих расчетов целесообразно сделать замену переменных $S(t)=\ln X(t)$.

Используя формулу Ито [1] для функции $\xi(t,x)=\ln x$, получаем

$$d\ln X(t)=\frac{\partial \ln X(t)}{\partial t}dt+(\mu-\lambda\kappa)X(t)\left.\frac{\partial \ln x}{\partial x}\right|_{X(t)}dt+\frac{\nu X^2(t)}{2}\left.\frac{\partial^2 \ln x}{\partial x^2}\right|_{X(t)}dt+$$

$$+\sqrt{\nu}X(t)\left.\frac{\partial \ln x}{\partial x}\right|_{X(t)}dW(t)+\big(\ln(yX(t))-\ln X(t)\big)dP(t)=$$

$$=0\cdot dt+(\mu-\lambda k)X(t)\frac{1}{X(t)}dt-\frac{\nu X^2(t)}{2}\frac{1}{X^2(t)}dt+\sqrt{\nu}X(t)\frac{1}{X(t)}dW(t)+$$

$$+\big(\ln y+\ln X(t)-\ln X(t)\big)dP(t)=\left(\mu-\lambda k-\frac{\nu}{2}\right)dt+\sqrt{\nu}dW(t)+\ln y\,dP(t).$$

Таким образом, динамика логарифма цены актива описывается следующим уравнением:

$$dS(t) = \left(\mu - \lambda\kappa - \frac{\nu}{2}\right)dt + \sigma dW(t) + \ln y\, dP(t), \quad S(0) = S_0, \tag{3}$$

где $S \in (-\infty, +\infty)$, S_0 – начальное состояние (логарифм начальной цены актива), имеющее нормальное распределение: $S_0 \sim N(\alpha, \beta^2)$.

Известно, что если математическая модель описывается системой (3) и (2), то плотность вероятности $\varphi(t,s,\nu)$ состояния (S,ν) удовлетворяет уравнению Колмогорова–Феллера:

$$\frac{\partial\varphi(t,s,\nu)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\mu - \lambda\kappa - \frac{\nu}{2}\right)\varphi(t,s,\nu)\right] - \frac{\partial}{\partial\nu}\left[k(\theta-\nu)\varphi(t,s,\nu)\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[\nu\varphi(t,s,\nu)\right] + \frac{\partial^2}{\partial s\partial\nu}\left[\rho\varepsilon\nu\varphi(t,s,\nu)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\left[\varepsilon^2\nu\varphi(t,s,\nu)\right] - \tag{4}$$

$$-\lambda\varphi(t,s,\nu) + \lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(s\,|\,z)\varphi(t,z,\nu)dz, \quad \varphi(0,s,\nu) = \varphi_0(s,\nu) = \varphi_{10}(s)\varphi_{20}(\nu),$$

где $\psi(s\,|\,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}e^{-\frac{(s-z-\gamma)^2}{2\delta^2}}$ – плотность вероятности величины $\ln y = s - z$, $\varphi_{10}(s)$ и $\varphi_{20}(\nu)$ – плотности вероятности логарифма начальной цены S_0 и начальной вариации ν_0 соответственно, $t \in T = [0, t_k]$.

В модели Бейтса справедливая стоимость опциона определяется по форме, соответствующей моделям Блэка–Шоулза и Хестона [4,9,10]:

$$C(t_k, X_0, \nu_0, K) = X_0 P_1(t_k, X_0, \nu_0; K) - K P_2(t_k, X_0, \nu_0; K)e^{-\mu t_k}, \tag{5}$$

где P_1 – дельта европейского call-опциона, P_2 – условная риск-нейтральная вероятность того, что цена на актив будет больше, чем цена исполнения K в момент исполнения опциона. Величины P_1 и P_2 можно определить следующим образом [1,4]:

$$P_r(t,x,\nu;K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\varphi}\mathrm{Im}\left[e^{-i\varphi\ln\left[\frac{Ke^{-\mu t}}{x}\right]}f_r(t,x,\nu;\varphi)\right]d\varphi, \quad r = 1,2,$$

$$f_r(t,x,\nu;\varphi) = \exp\left(C_r(t,\varphi) + D_r(t,\varphi)\nu + \lambda t(1+\kappa)^{u_r+\frac{1}{2}}\left[(1+\kappa)^{i\varphi}e^{\delta\left(u_r i\varphi - \frac{1}{2}\varphi^2\right)} - 1\right]\right),$$

где

$$C_r(t,\varphi) = (\mu - \lambda\kappa)i\varphi t - \frac{ht}{\varepsilon^2}(\rho\varepsilon\varphi i - b_r - d_r) - \frac{2h}{\varepsilon^2}\ln\left[1 + \frac{1}{2}(\rho\varepsilon\varphi i - b_r - d_r)\frac{1-e^{d_r t}}{d_r}\right],$$

$$D_r(t,\varphi) = -2\frac{u_r\varphi i - \frac{1}{2}\varphi^2}{\rho\varepsilon\varphi i - b_r + d_r\dfrac{1+e^{d_r t}}{1-e^{d_r t}}}, \quad d_r = \sqrt{(\rho\varepsilon\varphi i - b_r)^2 - 2\varepsilon^2(u_r\varphi i - \frac{1}{2}\varphi^2)},$$

$$h = k\theta, \quad u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad b_1 = k - \rho\varepsilon, \quad b_2 = k.$$

Постановка задачи анализа.

1. По заданной процентной ставке μ, равновесной вариации θ, скорости возвращения к равновесной вариации k, волатильности вариации ε, параметрам λ, γ и δ, моменту времени t_k, законам распределения $\varphi_{10}(s)$ и $\varphi_{20}(v)$ логарифма начальной цены S_0 и начальной вариации v_0 требуется найти плотность вероятности $\varphi(t,s,v)$ состояния (S,v) (по найденной плотности вероятности $\varphi(t,s,v)$ можно определить вероятностные характеристики цены актива: математическое ожидание, дисперсию, коэффициенты асимметрии, эксцесса и др.).

2. По заданной цене исполнения K определить стоимость опциона C с помощью формулы (5).

Алгоритм анализа динамики цены актива спектральным методом. Для нахождения плотности вероятности $\varphi(t,s,v)$ будем использовать спектральную форму математического описания систем управления [6–8]. Согласно данному подходу искомые функции представляются упорядоченной совокупностью коэффициентов разложения их в ряд Фурье по полной ортонормированной системе базисных функций.

Спектральный метод позволяет сводить уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова и Колмогорова–Феллера к линейным алгебраическим уравнениям относительно коэффициентов разложения, форма которых не зависит от выбора базисных систем и их свойств, а также от вида областей изменения времени и координат вектора состояния [6,7].

Замечание. Для повышения устойчивости расчетов спектральным методом преобразуем систему (3) и (2) так, чтобы S и v измерялись в одном масштабе. Для этого проведем замену переменных $l(t)=av(t)$. Число a выбирается, например, исходя из отношения средних значений случайных величин S_0 и v_0. Плотность вероятности $\varphi(t,s,l)$ состояния (S,l) в этом случае удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\varphi(t,s,l)}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial s}\left[\left(\mu-\lambda\kappa-\frac{l}{2a}\right)\varphi(t,s,l)\right]-\frac{\partial}{\partial l}\left[k(a\theta-l)\varphi(t,s,l)\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial s^2}\left[\frac{l}{a}\varphi(t,s,l)\right]+\frac{\partial^2}{\partial s\partial l}\left[\rho\varepsilon l\varphi(t,s,l)\right]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial l^2}\left[a\varepsilon^2 l\varphi(t,s,l)\right]-$$
$$-\lambda\varphi(t,s,l)+\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(s\,|\,z)\varphi(t,z,l)dz,\quad \varphi(0,s,l)=\varphi_0(s,l),$$

где $\varphi_0(s,l)$ – плотность вероятности начального состояния (S_0,l_0), $l_0=av_0$, которая определяется по заданным плотностям вероятности $\varphi_{10}(s)$ и $\varphi_{20}(v)$. Кроме того, снимем формальные ограничения на значения величины l, т.е. будем полагать, что $l\in R=(-\infty,+\infty)$.

Приведем алгоритм анализа динамики цены актива.

1. Выбрать базисную систему $\{e(i_0,i_1,i_2,t,s,l)=q(i_0,t)\,p_1(i_1,s)\,p_2(i_2,l)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T\times R\times R)$ для представления плотности вероятности $\varphi(t,s,l)$, а

также операторов дифференцирования и умножения. В качестве системы функций $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ предлагается использовать полиномы Лежандра $P(i_0,t)$, а в качестве систем функций $\{p_1(i_1,s)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,l)\}_{i_2=0}^{\infty}$ – функции Эрмита $\Psi(i_1,s)$ и $\Psi(i_2,l)$. Кроме того, возможны и другие варианты выбора базисных систем [6,7].

2. Вычислить: спектральные характеристики операторов дифференцирования, а именно $P(3,3)$ – по времени с учетом значения функции в начальный момент; $P_1(3,3)$, $P_2(3,3)$ и $P_{11}(3,3)$, $P_{12}(3,3)$, $P_{22}(3,3)$ – первого и второго порядков по координатам s и l; спектральные характеристики $F_1(3,3)$, $F_2(3,3)$ и $G_{11}(3,3)$, $G_{12}(3,3)$, $G_{22}(3,3)$ операторов умножения на коэффициенты сноса: $f_1(t,s,l)=\mu-\lambda\kappa-\frac{l}{2a}$, $f_2(t,s,l)=k(a\theta-l)$, и диффузии: $g_{11}(t,s,l)=\frac{l}{a}$, $g_{12}(t,s,l)=\rho\varepsilon l$, $g_{22}(t,s,l)=a\varepsilon^2 l$ соответственно; спектральную характеристику $\Phi_0(2,0)$ плотности вероятности $\varphi_0(s,l)$; матрицу-столбец $q(1,0;0)$ значений функций базисной системы $\{P(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0; спектральную характеристику $\Lambda(3,3)$ оператора умножения на функцию λ (согласно свойствам спектрального преобразования операторов умножения $\Lambda(3,3)=\lambda E(3,3)$, где $E(3,3)$ – шестимерная единичная матрица); спектральную характеристику $K(3,3)$ интегрального оператора:

$$K(3,3)=\lambda\left(E(1,1)\otimes K(1,1)\otimes E(1,1)\right),$$

где $E(1,1)$ – двумерная единичная матрица, а элементы K_{ij} матрицы $K(1,1)$ определяются следующим образом [8]:

$$K_{ij}=\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi(i,s)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{-(s-z-\gamma)^2}{2\delta^2}}\Psi(j,z)dz\right)ds.$$

3. Составить уравнение обобщенной характеристической функции [5,6]:

$$P(3,3)\cdot\Phi(3,0)-q(1,0;0)\otimes\Phi_0(2,0)=$$
$$=\left(-P_1(3,3)\cdot F_1(3,3)-P_2(3,3)\cdot F_2(3,3)+\frac{1}{2}P_{11}(3,3)\cdot G_{11}(3,3)+\right.$$
$$\left.+P_{12}(3,3)\cdot G_{12}(3,3)+\frac{1}{2}P_{22}(3,3)\cdot G_{22}(3,3)-\Lambda(3,3)+K(3,3)\right)\cdot\Phi(3,0),$$

где $\Phi(3,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t,s,l)$, и найти его решение:

$$\Phi(3,0)=\left(P(3,3)+P_1(3,3)\cdot F_1(3,3)+P_2(3,3)\cdot F_2(3,3)-\frac{1}{2}P_{11}(3,3)\cdot G_{11}(3,3)-\right.$$
$$\left.-P_{12}(3,3)\cdot G_{12}(3,3)-\frac{1}{2}P_{22}(3,3)\cdot G_{22}(3,3)+\Lambda(3,3)-K(3,3)\right)^{-1}\cdot\left(q(1,0;0)\otimes\Phi_0(2,0)\right).$$

4. Найти плотность вероятности $\varphi(t,s,l)$ по решению уравнения обобщенной характеристической функции, используя обратное спектральное преобразование:

$$\varphi(t,s,l) = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\varphi_{i_0 i_1 i_2} P(i_0,t)\Psi(i_1,s)\Psi(i_2,l), \quad (t,s,l)\in T\times R\times R,$$

где $\varphi_{i_0 i_1 i_2}$ – координаты спектральной характеристики $\Phi(3,0)$.

5. Вычислить $J_k(0,1)$ – спектральную характеристику функционала J_k, ставящего в соответствие заданной функции $h(s)$ интеграл по множеству R от произведения этой функции на s^k:

$$J_k h(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} s^k h(s)ds,$$

и найти спектральные характеристики $M^{\{k\}}(1,0)$ начальных моментов $m^{\{k\}}(t)$ порядка k логарифма цены актива S и величины l, используя соотношения [6]:

$$M_s^{\{k\}}(1,0) = \big(E(1,1)\otimes J_k(0,1)\otimes J_0(0,1)\big)\cdot\Phi(3,0),$$

$$M_l^{\{k\}}(1,0) = \big(E(1,1)\otimes J_0(0,1)\otimes J_k(0,1)\big)\cdot\Phi(3,0),\ k=1,2,\ldots$$

6. Найти начальные моменты $m^{\{k\}}(t)$ по спектральным характеристикам $M^{\{k\}}(1,0)$, применяя формулы обращения:

$$m^{\{k\}}(t) = \sum_{i_0=0}^{\infty} m_{i_0}^{\{k\}} P(i_0,t), \quad t\in T,$$

где $m_{i_0}^{\{k\}}$ – координаты спектральной характеристики $M^{\{k\}}(1,0)$.

7. Вычислить стоимость call-опциона C с помощью формулы (5) при цене исполнения K.

Замечания.

1. Пункты 5 и 6 выполняются при необходимости расчета моментных характеристик. По начальным моментам могут быть вычислены, например, дисперсия, коэффициенты асимметрии и эксцесса.

2. С помощью полученной плотности вероятности и обратной замены переменных можно найти плотность вероятности и моментные характеристики процесса, описываемого системой (1) и (2), т.е. непосредственно цены актива.

3. Для получения приближенного решения задачи анализа проводится усечение спектральных характеристик [6].

4. В модели Бейтса рассматривается только один актив. Однако можно проводить расчеты и для совокупности активов. Это приведет к увеличению размерности вектора цен, следовательно, и размерности спектральных характеристик. При этом алгоритм поиска цены актива практически не изменится. Также при использовании этой модели можно учесть выплату дивидендов, в результате чего изменится коэффициент сноса, а именно добавится дивидендная доходность.

Основные результаты. Основным итогом является разработка алгоритма решения задачи анализа динамики цены актива в модели Бейтса и его апробация на ряде примеров. Рассмотренная модель позволяет учесть мгновенное изменение цены, контролировать коэффициенты асимметрии и эксцесса, учитывать эффект отрицательной корреляции волатильности и относительных доходностей, свойство волатильности возвращаться к равновесным уровням [1,4,5]. При хорошей калибровке модель позволяет достаточно точно прогнозировать будущую цену актива, оценивать стоимость опциона, генерировать функции распределения цен и поверхности предполагаемой волатильности, хорошо совпадающие с реальными.

В качестве направления дальнейших исследований необходимо по реальным данным получить параметры модели, например с помощью обобщенного метода наименьших квадратов, учесть скачки для волатильности и зависимость процентной ставки от времени.

Библиографический список

1. Cont R., Tankov P. Financial Modelling with Jump Processes. – Chapman and Hall, 2004.
2. Merton R. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous // Journal of Financial Economics. – 1976. V. 3. – P. 125–144.
3. Kou S. A Jump-Diffusion Model for Option Pricing // Management Science. – 2002. V. 48 – P. 1086–1101.
4. Bates D. Jump and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options // Review of Financial Studies. – 1996. V. 9. – P. 69–107.
5. Кожевников А.С. Анализ динамики цены актива в модели Бейтса спектральным методом // Материалы 48-й Межд. науч. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Математика / Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск, 2010. – С. 294–295.
6. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006.
7. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004. № 16. – http://www.mai.ru.
8. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. Алгоритмическое обеспечение решения линейных интегральных уравнений спектральным методом // Научный Вестник МГТУ ГА. – 2010. 157(7). – С. 51–57.
9. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // The Journal of Political Economy. – 1973. V. 81. № 3. – P. 637–654.
10. Heston S.L. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options // Review of Financial Studies. – 1993. V. 6. – P. 327–343.