



Фонд поддержки творческих инициатив студентов

Посвящается 80-летию МАИ
и 70-летию ОКБ имени А. И. Микояна

ПРОЕКТНО-КОНСТРУКТОРСКИЕ И ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ВОПРОСЫ СОЗДАНИЯ ПЕРСПЕКТИВНОЙ АВИАЦИОННОЙ ТЕХНИКИ

Под редакцией профессора Ю. Ю. Комарова

Москва
2009

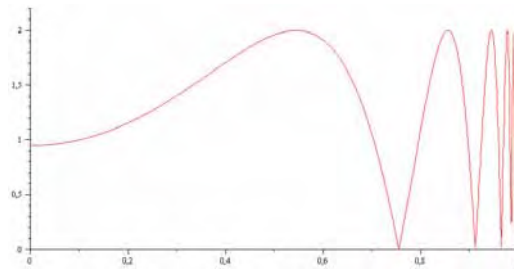


Рис. 3. График зависимости $|a|$ от ϵ при $\omega = 2\sqrt{2}$

уравнения колебаний, так как при $\epsilon = 1$ это уравнение имеет особую точку $E = 2k\pi$.

Библиографический список

1. Ситников К. Существование осциллирующих движений в задаче трёх тел // ДАН СССР. Т. 133. № 2. С. 303–306. 1960.
2. Меркин Д. Р. Введение в теорию устойчивости движения (издание 3). — М.: Наука, 1976.
3. Hagel J. A new analytic approach to the Sitnikov problem. *Celes. Mech.* 53, P. 267–292. 1992.
4. Moser J. *Stable and Random Motions in Dynamical Systems*. Princeton University Press, 1973.
5. Алексеев В. М. Лекции по небесной механике. — Ижевск, 1999.

А. С. Кожевников, К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт (государственный технический университет)

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В ПРИЛОЖЕНИИ К ЗАДАЧАМ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

В наше время в условиях возрастающей неустойчивости движения цен самых разных финансовых инструментов, таких, как акции, валюты или фьючерсы на фондовых, валютных и срочных рынках, операции с ними являются рисковыми. Поэтому в инвестиционный портфель включают различные инструменты, способные в некоторых случаях путем ограничения суперприбыли ограничить потери портфеля. Одним из таких финансовых инструментов, позволяющих ограничить будущие потери путем отказа от будущей суперприбыли, являются опционы. Труд в области оценки стоимости (премии) опционов, впервые опубликованный в 1973, принадлежит

Блэку и Шоулзу и известен под названием модели Блэка—Шоулза [1]. Модель Блэка—Шоулза позволяет вычислить будущее значение цены актива и помогает определить справедливую стоимость европейского опциона. Цена опциона выражается аналитической формулой как функция от ожидаемой цены актива $m(t_k)$ в срок исполнения, начальной цены актива X_0 , цены исполнения опциона K , безрисковой процентной ставки r , процентной ставки μ , волатильности σ , срока исполнения опциона t_k , а именно [1]:

1) для call-опциона:

$$C = e^{-rt_k} (\Phi(d_+) m(t_k) - \Phi(d_-) K); \quad (1)$$

2) для put-опциона:

$$C = e^{-rt_k} (-\Phi(-d_+) m(t_k) + \Phi(-d_-) K), \quad (2)$$

где $\Phi(d)$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины и $d_{\pm} = \frac{1}{\sigma\sqrt{t_k}} \left(\ln \frac{X_0}{K} + t_k \left(\mu \pm \frac{\sigma^2}{2} \right) \right)$.

Динамика цены акции X в модели Блэка—Шоулза для нахождения ожидаемой цены актива описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито [1]:

$$dX(t) = \mu X(t) dt + \sigma X(t) dW(t), \quad X(0) = X_0, \quad (3)$$

где $t \in T = [0, t_k]$, $X \in \Omega = [0, +\infty)$; X_0 — начальное состояние; $W(t)$ — одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0 .

Приведем постановку задачи с точки зрения экономики и математики.

Экономическая постановка задачи. Для рассматриваемой акции, не выплачивающей дивидендов, известны информация о начальной цене акции X_0 и значения процентной ставки μ и волатильности σ . Начальную цену X_0 в общем случае будем задавать плотностью распределения вероятности. В зависимости от выбранных покупателем значений срока исполнения call-опциона t_k и цены исполнения K требуется рассчитать плотность распределения стоимости акции, ожидаемое значение стоимости акции в срок исполнения опциона t_k , риск, а также премию.

Математическая постановка задачи.

1. Решить задачу анализа одномерной стохастической системы, заданной уравнением (3), т. е. найти законы изменения плотности вероятности и моментных характеристик при заданных μ , σ , X_0 .
2. Найти стоимость опциона C с помощью формулы Блэка—Шоулза (1) и (2) при цене исполнения K .

Известно, что если математическая модель описывается уравнением (3), то плотность вероятности $\varphi(t, x)$ удовлетворяет уравнению Фоккера—План-

ка—Колмогорова [2]:

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [\mu x \varphi(t, x)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [\sigma^2 x^2 \varphi(t, x)], \quad (4)$$

$$\varphi(t, x)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \varphi(t, x)|_{x=\pm\infty} = 0,$$

где $\varphi_0(x)$ — плотность вероятности начального состояния X_0 , $t \in T = [0, t_k]$, $x \in \mathbb{R}$. Следовательно, задача сводится к решению уравнения (4). Из этого уравнения требуется получить закон изменения плотности вероятности $\varphi(t, x)$ и, используя его, найти моментные характеристики функций $m(t)$ и $D(t)$.

Для нахождения плотности вероятности $\varphi(t, x)$ будем использовать спектральную форму математического описания систем управления [2]. В основе предлагаемого подхода лежит представление сигналов совокупностью коэффициентов разложения их в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций, заданной в общем случае на нестационарном отрезке. Использование спектральной формы математического описания позволяет формализовать процесс решения задачи анализа при различных областях изменения времени и координат вектора состояния. Следует отметить, что спектральный метод является наиболее универсальным по сравнению с другими методами, основанными на ортогональных разложениях, поскольку соотношения для решения задачи анализа спектральным методом представляют собой линейные алгебраические уравнения и инвариантны к выбору базисных систем и их свойствам.

Алгоритм решения заключается в следующем:

1) Выбрать базисную систему $\{e(i_0, i_1, t, x) = q(i_0, t) \cdot p(i_1, x)\}_{i_0, i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T \times \Omega)$ для представления плотности вероятности $\varphi(t, x)$, а также для операторов дифференцирования по времени и по координатам вектора состояния. В качестве системы функций $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ можно использовать полиномы Лежандра $P(i_0, t)$, а в качестве системы функций $\{p(i_1, x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ — функции Эрмита $\Psi(i_1, x)$, так как для удобства последующих расчетов задача формально рассматривается при условии $\Omega = \mathbb{R}$. Кроме того, возможны и другие варианты выбора базисных систем [2, 3].

2) Вычислить: спектральные характеристики операторов дифференцирования, а именно $P(2, 2)$ — по времени с учетом значения функции в начальный момент; $P_1(2, 2)$ и $P_{11}(2, 2)$ — первого и второго порядков по координате x ; $F(2, 2)$ и $G(2, 2)$ — спектральные характеристики оператора умножения на коэффициенты сноса $f(t, x) = \mu x$ и диффузии $g(t, x) = \sigma^2 x^2$ соответственно; $\Phi_0(1, 0)$ — спектральную характеристику плотности вероятности начального состояния X_0 ; $q(1, 0; 0)$ — матрицу-столбец значе-

ний функций базисной системы $\{P(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0 .

3) Составить уравнение обобщенной характеристической функции в соответствии с постановкой задачи [2]:

$$P(2,2) \cdot \Phi(2,0) - q(1,0;0) \otimes \Phi_0(1,0) = -P_1(2,2) \cdot F(2,2) + \frac{1}{2} P_{11}(2,2) \cdot G(2,2), \quad (5)$$

где $\Phi(2,0)$ — спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi(t, x)$, и найти его решение:

$$\Phi(2,0) = \left[P(2,2) + P_1(2,2) \cdot F(2,2) - \frac{1}{2} P_{11}(2,2) \cdot G(2,2) \right]^{-1} (q(1,0;0) \otimes \Phi_0(1,0)). \quad (6)$$

4) Найти плотность вероятности $\varphi(t, x)$ по решению уравнения обобщенной характеристической функции, используя обратное спектральное преобразование:

$$\varphi(t, x) = \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1} \cdot P(i_0, t) \cdot \Psi(i_1, x), \quad (t, x) \in T \times \Omega, \quad (7)$$

где $\varphi_{i_0 i_1}$ — координаты спектральной характеристики $\Phi(2,0)$.

5) Вычислить: $X_1(2,2)$ и $X_{11}(2,2)$ — спектральные характеристики оператора умножения на функции $a_1(t, x) = x$ и $a_{11}(t, x) = x^2$ соответственно; $J(0,1)$ — спектральную характеристику функционала J , ставящего в соответствие заданной функции интеграл от этой функции; $V(1,2)$ — спектральную характеристику множительного звена.

6) Найти спектральные характеристики $M(1,0)$ и $D(1,0)$ функций $m(t)$ и $D(t)$ соответственно при помощи следующих соотношений [2]:

$$M(1,0) = (E(1,1) \otimes J(0,1)) \cdot (X_1(2,2) \cdot \Phi(2,0)); \quad (8)$$

$$D(1,0) = (E(1,1) \otimes J(0,1)) \cdot (X_{11}(2,2) \cdot \Phi(2,0)) - (V(1,2) \odot M(1,0)) \cdot M(1,0). \quad (9)$$

7) Найти моментные характеристики $m(t)$ и $D(t)$ по спектральным характеристикам $M(1,0)$ и $D(1,0)$, применяя формулы обращения:

$$m(t) = \sum_{i_0=0}^{\infty} m_{i_0} \cdot P(i_0, t), \quad D(t) = \sum_{i_0=0}^{\infty} d_{i_0} \cdot P(i_0, t), \quad t \in T, \quad (10)$$

где m_{i_0} — координаты спектральной характеристики $M(1,0)$; d_{i_0} — координаты спектральной характеристики $D(1,0)$.

8) Вычислить премию C с помощью формул Блэка—Шоулза (1) и (2).

Рассмотрим модель цены, в которой начальное состояние X_0 имеет усеченное нормальное распределение с математическим ожиданием 10 и дисперсией 1 (рассматриваются неотрицательные значения X_0), срок исполне-

ния опциона t_k равен 1,2, а процентная ставка μ и волатильность σ равны $-0,3$ и $0,2$ соответственно.

Для упрощения расчетов при представлении функции в виде ряда будем использовать первые тридцать функций базисных систем $\{P(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{\Psi(i_1, x)\}_{i_1=0}^{\infty}$.

Для сравнения и контроля точности воспользуемся методом Монте-Карло (число моделируемых траекторий — 100 000, численное интегрирование методом Эйлера с шагом 0,01 по времени t , шаг по состоянию x для построения гистограммы равен 0,5).

Применим разработанный алгоритм к рассматриваемой модели. Результаты представлены на рис. 1–5 (сплошной линией показаны графики функций, полученных спектральным методом, а пунктиром — при использовании метода Монте-Карло).

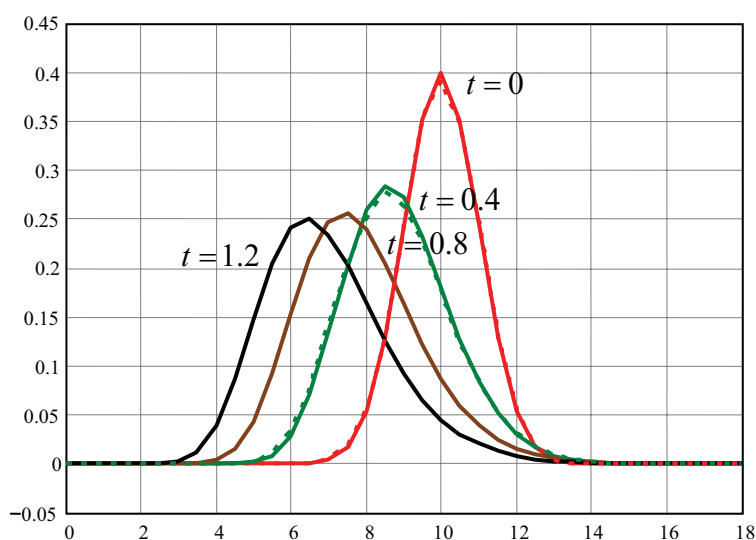


Рис. 1. Сечения плотности вероятности в различные моменты времени

Алгоритм решения с использованием спектральной формы математического описания также эффективно работает и при других параметрах модели.

Стоит отметить, что спектральный метод может быть использован в качестве альтернативы методу Монте-Карло для поиска будущей цены актива, особенно при увеличении размерности задачи или расширении модели динамики цены акции.

В качестве направления дальнейших исследований необходимо расширить модель динамики цены акции, учитывая, что в реальной жизни волатильность σ зависит от времени и цены исполнения (страйка) рассматриваемых европейских опционов; безрисковая процентная ставка r и процентная ставка μ зависят от времени; обычно выплачиваются дивиденды.

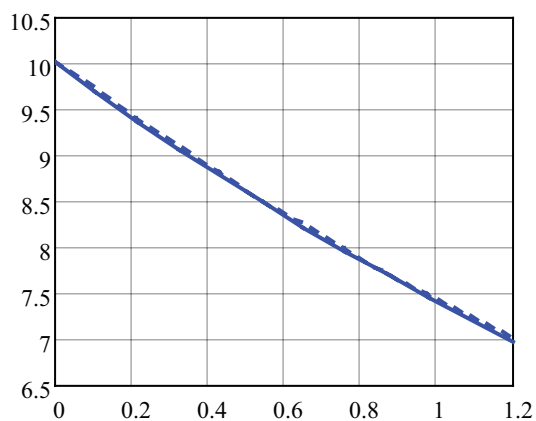


Рис. 2. Математическое ожидание $m(t)$

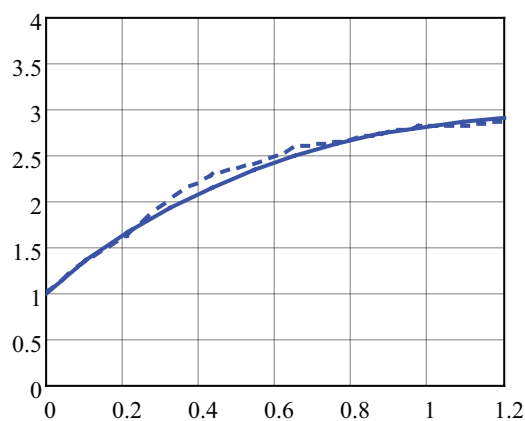


Рис. 3. Риск $D(t)$

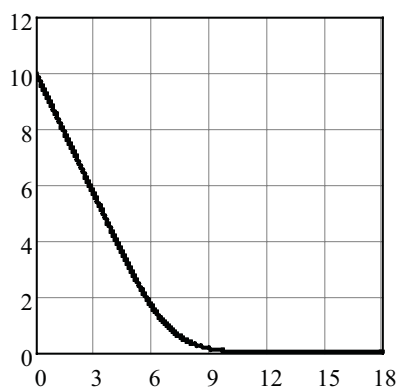


Рис. 4. Зависимость стоимости call-опциона от цены исполнения в конечный момент времени

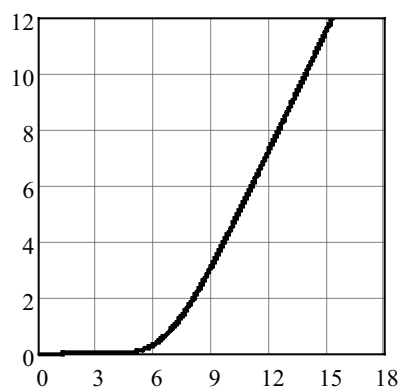


Рис. 5. Зависимость стоимости put-опциона от цены исполнения в конечный момент времени

Библиографический список

1. Артемьев С. С., Якунин М. А. Математическое и статистическое моделирования в финансах. — Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2008.
2. Пантелеев А. В., Рыбаков К. А., Сотскова И. Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2006.
3. Рыбаков К. А., Сотскова И. Л. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал “Труды МАИ”. № 16. <http://www.mai.ru>, 2004.

А. А. Маховер, А. С. Мурашев, Н. П. Яшина

Московский авиационный институт (государственный технический университет)

СИСТЕМА ПОДДЕРЖКИ ГРУППОВОГО ВЫБОРА

Рассматривается задача выбора наилучших альтернатив из заданного множества альтернативных вариантов решений. Выбор осуществляется на