РАСЧЕТ БУДУЩЕЙ ЦЕНЫ АКТИВА В МОДЕЛИ БЛЭКА-ШОУЛЗА С ПОМОЩЬЮ СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА АНАЛИЗА СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.С. Кожевников, К.А. Рыбаков

Введение. В работе рассматривается задача нахождения закона распределения цены актива, ожидаемого значения цены и дисперсии в модели Блэка-Шоулза [1,2] с использованием спектральной формы математического описания (спектрального метода), в основе которой лежит представление сигналов совокупностью коэффициентов разложения их в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций. Следует отметить, что спектральный метод является наиболее универсальным по сравнению с другими методами, основанными на ортогональных разложениях, поскольку соотношения для решения задачи при его применении представляют собой линейные алгебраические уравнения, инвариантные к выбору базисных систем и их свойствам [3,4].

В работе [2], в которой приведено решение этой задачи с использованием спектральной формы математического описания, предполагалось, что начальная цена актива имеет усеченное нормальное распределение (рассматривались только положительные значения цены). Для нахождения вероятностных оценок цены актива в данной работе воспользуемся не нормальным, а логарифмически нормальным распределением. Во-первых, использование логарифмически нормального распределения обуславливается тем, что нормальное распределение симметрично, то есть говорит о равной вероятности цены актива увеличиться или уменьшиться, хотя на практике, например, имеет место инфляция, которая оказывает давление на цены в сторону их повышения. Также при этом учитывается временная стоимость денег: стоимость денег сегодня меньше, чем стоимость денег вчера, но больше, чем стоимость денег завтра. Логарифмически нормальное распределение, в отличие от нормального, несимметрично (имеет «ограниченный» левый и «тяжелый» правый хвосты), то есть указывает на большую вероятность цены повыситься, и исключает отрицательные значения цены. Также принято считать, что логарифмически нормальное распределение является достаточно хорошим первым приближением в случае активов, которыми торгуют на рынках аукционного типа для длинных рассматриваемых периодов времени. Во-вторых, данный подход с учетом замены переменных упростит уравнение динамики цены и уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова и повысит эффективность применения алгоритма решения задачи спектральным методом не только в рассматриваемой модели, но и в моделях стохастической волатильности [5,6], со скачками [7], со скачками и стохастической волатильностью [8].

Постановка задачи. Рассмотрим модель Блэка-Шоулза [1], в которой динамика цены актива X описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито [1,2,9]:

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t), \quad X(0) = X_0, \tag{1}$$

где $t \in T = [0, t_k]$, $X \in \Omega = (0, +\infty)$, X_0 – начальная цена актива, которая имеет логарифмически нормальное распределение $\left(X_0 \sim Ln\left(\alpha, \beta^2\right)\right)$, $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0, μ – процентная ставка, σ – волатильность.

Запишем уравнение для величины $S(t)=\ln\left(X(t)\right)$. Для этого проведем замену переменных в уравнении (1), используя формулу Ито [9]:

$$dS(t)=d\left(\ln X(t)\right)=0\cdot dt+\frac{1}{X(t)}dX(t)-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(X(t)\right)^2}\left(dX(t)\right)^2=$$

$$=\frac{1}{X(t)}\left(\mu X(t)dt+\sigma X(t)dW(t)\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{\left(X(t)\right)^2}\left(\mu X(t)dt+\sigma X(t)dW(t)\right)^2=$$

$$=\left(\mu dt+\sigma dW(t)\right)-\frac{1}{2}\sigma^2 dt=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt+\sigma dW(t).$$

Таким образом, стохастическое дифференциальное уравнение для логарифма цены актива имеет вид

$$dS(t)=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)dt+\sigma dW(t),\quad S(0)=S_0, \tag{2}$$

где S_0 – начальное состояние, имеющее нормальное распределение $\left(S_0\sim \mathrm{N}\left(\alpha,\beta^2\right)\right)$.

Плотность вероятности состояния $\varphi(t,s)$ в случае, когда математическая модель описывается уравнением (2), удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова [3]:

$$\frac{\partial\varphi(t,s)}{\partial t}=-\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{\partial\varphi(t,s)}{\partial s}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2\varphi(t,s)}{\partial s^2},\quad \varphi(t,s)\big|_{t=0}=\varphi_0(s), \tag{3}$$

где $\varphi_0(s)$ – плотность вероятности начального состояния S_0, $t\in T=\left[0,t_k\right]$, $s\in(-\infty,\infty)$.

Будем рассматривать следующую задачу: по заданной процентной ставке μ, волатильности σ, моменту времени t_k и закону распределения $\varphi_0(s)$ начального состояния требуется найти плотность вероятности $\varphi(t,s)$, математическое ожидание $m_s(t)$ и дисперсию $D_s(t)$ состояния $S(t)=\ln\left(X(t)\right)$. По этим характеристикам определяется плотность вероятности $\tilde{\varphi}(t,x)$ цены актива, а также её среднее значение $m_x(t)$ и дисперсия $D_x(t)$.

Для решения уравнения (3) и нахождения моментов $m_s(t)$ и $D_s(t)$ будем использовать спектральный метод, опираясь на алгоритм, приведенный в [2,3].

Примеры расчета будущей цены актива.

Пример 1. Рассмотрим задачу на промежутке $t\in T=[0,1]$ при процентной ставке $\mu=0.4$ и волатильности $\sigma=0.4$. Логарифм цены имеет нормальное распределение $\left(S_0=\ln(X_0)\sim \mathrm{N}(2.297,0.01)\right)$, а начальная цена – логарифмически нормальное $\left(X_0\sim Ln(2.297,0.01)\right)$ с математическим ожиданием 10 и дисперсией 1. Для расчетов при представлении искомой плотности вероятности в виде ряда будем использовать первые тридцать функций базисных систем $\{P(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (полиномы Лежандра) по времени и $\{\Psi(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (функции Эрмита с параметрами $m=2.297$ и $D=0.01$) по состоянию [3,4]. Результаты расчетов представлены в табл. 1.

Проведенные расчеты показывают, что при большом значении волатильности плотность вероятности логарифма цены достаточно точно аппроксимируется, что позволяет хорошо оценить плотность распределения цены актива. Следовательно, использование логарифма цены в качестве состояния системы в данном примере является вполне обоснованным.

Пример 2. Рассмотрим задачу на промежутке $t \in T = [0,3]$ при процентной ставке $\mu = -0.4$ и волатильности $\sigma = 0.1$. Логарифм цены имеет нормальное распределение $\left(S_0 = \ln(X_0) \sim \mathrm{N}(0.582, 0.223)\right)$, а начальная цена – логарифмически нормальное $\left(X_0 \sim Ln(0.582, 0.223)\right)$ с математическим ожиданием 2 и дисперсией 1. Для расчетов при представлении плотности вероятности в виде ряда будем использовать первые тридцать функций базисной системы $\{P(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ (полиномы Лежандра) по времени и шестьдесят функций базисной системы $\{\Psi(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ (функции Эрмита с параметрами $m = 0.582$ и $D = 0.223$) по состоянию [3,4]. Результаты расчетов представлены в таблице 2.

В рассматриваемом примере дисперсия цены актива уменьшается из-за заданных параметров (процентной ставки μ, волатильности σ и закона распределения начальной цены $\tilde{\varphi}_0(x)$).

Заключение. В данной работе приведены лишь два примера, анализ которых позволяет сформулировать некоторые достоинства и недостатки использования логарифма цены в качестве состояния стохастической системы, однако были рассчитаны примеры и при других возможных вариантах поведения цены. В результате анализа были сделаны выводы о достоинствах и недостатках рассматриваемого подхода при расчетах. В качестве плюсов стоит отметить следующие:

- Рассмотрение логарифма цены упрощает стохастическое дифференциальное уравнение, следовательно, и уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, так как коэффициенты сноса и диффузии становятся постоянными величинами.
- Алгоритм позволяет получить более точные вероятностные оценки при аналогичных параметрах модели и спектрального метода (это связано с упрощением уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова). Особенно это наблюдается для моделей с большой волатильностью. Если использовать алгоритм, описанный в работе [2], при больших значениях волатильности, то в отличие от рассматриваемого подхода при представлении плотности вероятности в виде ряда для повышения точности конечных результатов требуется использовать большее число функций базисной системы по состоянию.
- Учитываются положительные значения цены актива.

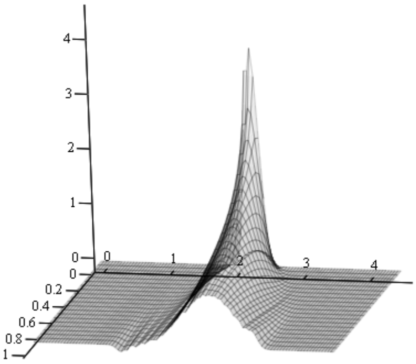
В качестве недостатка данного подхода отметим, что при больших значениях начальной цены и малых значениях дисперсии не удается достигнуть приемлемой точности из-за неудачной аппроксимации во времени плотности распределения цены актива.

Таблица 1.

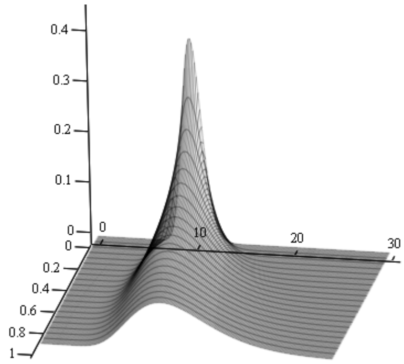
Параметры модели: $S_0 \sim \mathrm{N}(2.297, 0.01)$, $\mu = 0.4$, $\sigma = 0.4$.

- - - - точное решение, ——— решение, полученное спектральным методом

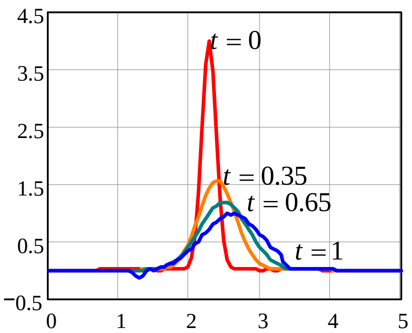
Плотность вероятности $\varphi(t,s)$



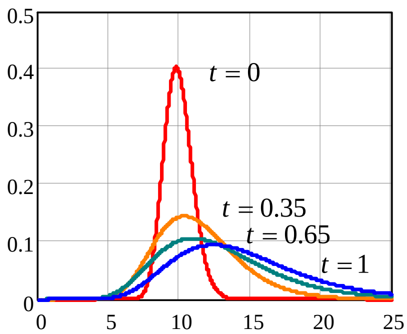
Плотность вероятности $\tilde{\varphi}(t,x)$



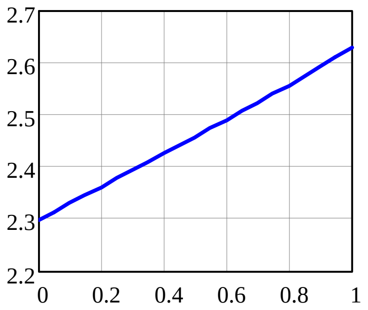
Сечения $\varphi(t,s)$ по времени



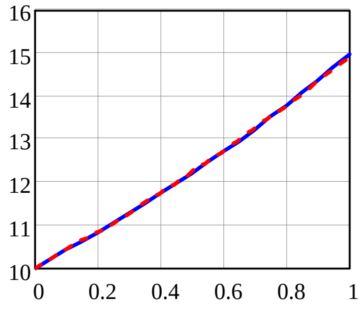
Сечения $\tilde{\varphi}(t,x)$ по времени



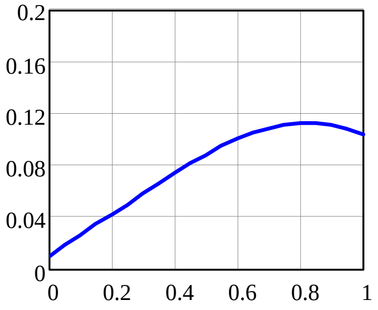
Математическое ожидание $m_s(t)$



Математическое ожидание $m_x(t)$



Дисперсия $D_s(t)$



Дисперсия $D_x(t)$

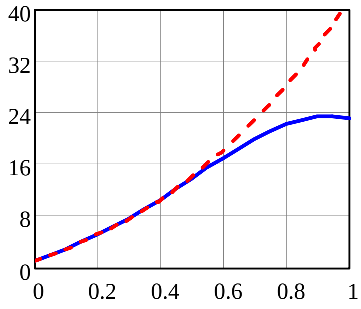
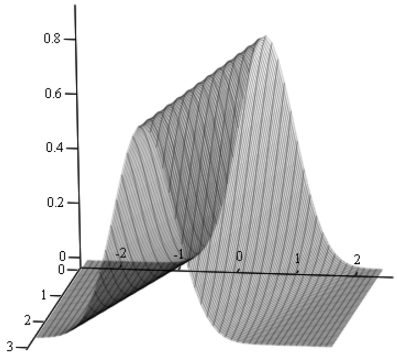
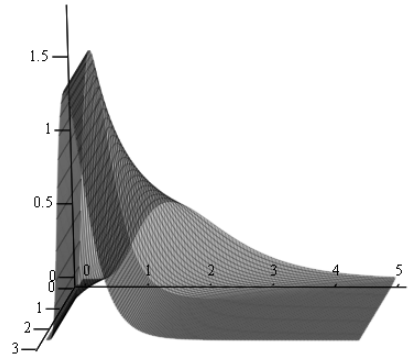
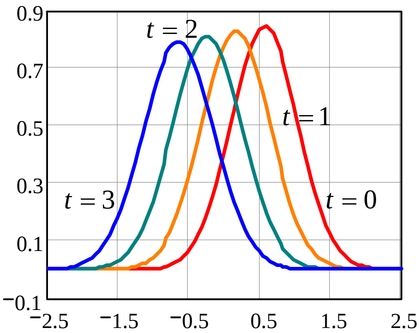
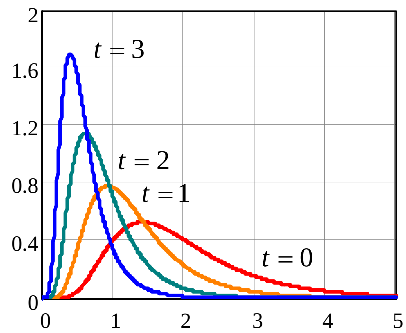
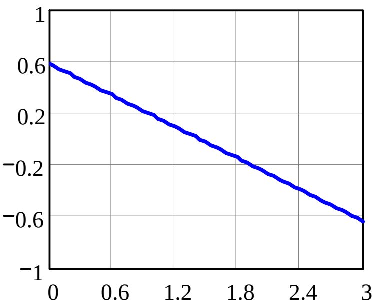
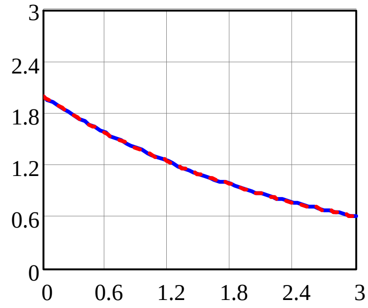
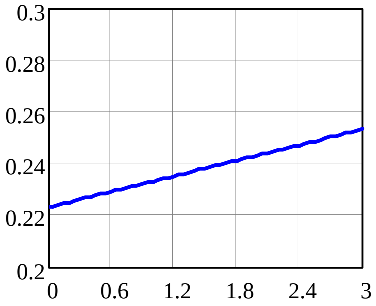
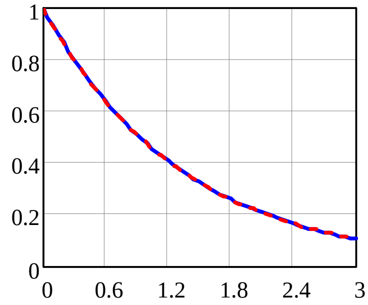


Таблица 2.

<table>
<tr><td colspan="2">Параметры модели: $S_0 \sim \mathrm{N}(0.582, 0.223)$, $\mu = -0.4$, $\sigma = 0.1$.
- - - - точное решение, ——— решение, полученное спектральным методом</td></tr>
<tr><td>Плотность вероятности $\varphi(t,s)$
</td><td>Плотность вероятности $\tilde{\varphi}(t,x)$
</td></tr>
<tr><td>Сечения $\varphi(t,s)$ по времени
</td><td>Сечения $\tilde{\varphi}(t,x)$ по времени
</td></tr>
<tr><td>Математическое ожидание $m_s(t)$
</td><td>Математическое ожидание $m_x(t)$
</td></tr>
<tr><td>Дисперсия $D_s(t)$
</td><td>Дисперсия $D_x(t)$
</td></tr>
</table>

При рассмотрении логарифмически нормального распределения использование в процессе анализа только математического ожидания и дисперсии может приводить к неверным выводам, так как дисперсия неадекватно характеризует риск при несимметричных распределениях. Поэтому при анализе таких распределений используют также коэффициент асимметрии, экономический смысл которого заключается в следующем: если коэффициент имеет положительное значение, то высокие цены считаются более вероятными, чем низкие и наоборот.

Использование логарифма цены актива в качестве состояния упрощает исходные модели, позволяет сделать процесс вычисления с помощью спектрального метода более устойчивым и при представлении искомой функции в виде ряда допускает использование меньшего числа функций базисных систем без потери точности самого решения. Поэтому планируется применить данную методику расчета в более сложных моделях, которые обобщают уравнение (1). В качестве таких моделей можно выделить следующие: модель стохастической волатильности (модель Хестона) [5,6], которая описывается системой стохастических уравнений; модель Мертона со скачками [7]; модель Бейтса [8], объединяющая модели Хестона и Мертона. Применение предлагаемого подхода расчета цены с использованием спектральной формы математического описания упростит уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова в случае модели Хестона, интегродифференциальные уравнения Колмогорова-Феллера [10] в случае применения моделей Мертона и Бейтса.

Библиографический список

1. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities // The Journal of Political Economy. – 1973. V. 81. № 3. – P. 637–654.
2. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Спектральный метод анализа стохастических систем в приложении к задачам финансовой математики на примере модели Блэка-Шоулза // Вестник Московского авиационного института. – 2009. Т. 16. № 4. – С. 113–125.
3. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006.
4. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004. № 16. – http://www.mai.ru.
5. Heston S.L. A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options // Review of Financial Studies. – 1993. V. 6. – P. 327–343.
6. Кожевников А.С., Рыбаков К.А. Применение спектрального метода анализа стохастических систем в задачах финансовой математики. Модель Хестона // Тез. докл. 8-й Межд. конф. «Авиация и космонавтика – 2009». – М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. – С. 77.
7. Merton R. Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous // Journal of Financial Economics. – 1976. V. 3. – P. 125–144.
8. Bates D. Jump and Stochastic Volatility: Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options // Review of Financial Studies. – 1996. V. 9. – P. 69–107.
9. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
10. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. Анализ систем управления со случайным периодом квантования в классе обобщенных характеристических функций // Тез. докл. 8-й Межд. конф. «Авиация и космонавтика – 2009». – М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. – С. 72.