Автоматика и телемеханика, № 2, 2011

© 2011 г. **А.В. ПАНТЕЛЕЕВ, д-р физ.-мат. наук,**
К.А. РЫБАКОВ, канд. физ.-мат. наук
(Московский авиационный институт)

АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ В КЛАССЕ ОБОБЩЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Решается задача анализа выходных процессов нелинейных стохастических систем управления с непрерывным временем. Предлагаемый метод основан на спектральной форме математического описания, составляющей единый подход к решению линейных операторных уравнений. Разработанная методика позволяет свести задачу нахождения плотности вероятности вектора состояния к решению системы линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения искомой плотности в ряд по функциям некоторой полной ортонормированной системы как при отсутствии ограничений на значения координат вектора состояния, так и в задачах с ограничениями.

1. Введение

В работе рассматривается задача анализа нелинейных систем управления, математические модели которых описываются стохастическими дифференциальными уравнениями.

Изложен метод анализа систем управления, структура которых остается неизменной с течением времени. При этом предполагается, что при заданном законе управления и при случайных начальных условиях, определяемых некоторой плотностью вероятности, система подвержена случайному внешнему воздействию. Требуется решить задачу анализа выходных процессов, т.е. найти закон изменения плотности вероятности вектора состояния, эволюция которой описывается уравнением Фоккера–Планка–Колмогорова [1–4].

Аналитическое решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова может быть найдено только в исключительных случаях, поэтому чаще используются приближенные методы, такие как метод гауссовской аппроксимации, метод моментов [1, 3, 5], методы, основанные на представлении плотности вероятности вектора состояния или элементов, входящих в структуру плотности, в виде функционального ряда. Широко известны методы, основанные на использовании семиинвариантов и квазимоментов [1, 5], метод эллипсоидальной аппроксимации [1, 7], методы с использованием степенных рядов [6]. Эти методы позволяют перейти от уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова к системе обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности, как правило, не имеющей аналитического решения. Другой подход основан на использовании численных методов [8, 9], однако их применимость, как правило, ограничена сравнительно небольшой размерностью вектора состояния. Приближенно найти плотность вероятности вектора состояния можно, не прибегая к непосредственному решению уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Для этого можно применить метод статистических испытаний [10].

Для решения задачи анализа выходных процессов можно искать не плотность вероятности вектора состояния, а ее производные характеристики, а именно: характеристическую функцию (построение теории стохастических систем на основе уравнений для характеристических функций предложено академиком В.С. Пугачевым [1]) или обобщенную характеристическую функцию (описание стохастических систем управления в спектральной форме было предложено профессором В.В. Семеновым [11]). Остановимся более подробно на спектральной форме математического описания систем управления, составляющей основу спектрального метода анализа, который рассматривается в данной работе.

Спектральный метод анализа и синтеза линейных детерминированных систем управления был разработан в конце 60-х гг. XX в., а затем обобщен на нелинейные системы. В основе спектрального метода лежит представление сигналов совокупностью коэффициентов разложения их в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций [12], заданной в общем случае на нестационарном отрезке времени [13]. Базовыми понятиями метода являются нестационарные спектральные характеристики (спектральные характеристики функций), нестационарные спектральные плотности (спектральные характеристики математического ожидания и ковариационной функции случайного процесса) и нестационарные передаточные функции (спектральные характеристики линейных операторов). Теория спектрального метода и ее приложения нашли свое отражение в монографиях [13–15] и в учебных пособиях [2, 16, 17].

Дальнейшее развитие спектрального метода связано с решением задачи анализа стохастических систем с фиксированной структурой. В [11] введено понятие обобщенной характеристической функции – нестационарной спектральной характеристики плотности вероятности вектора состояния стохастической системы, однако для получения уравнения обобщенной характеристической функции как спектрального аналога уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова спектральное преобразование применялось только по координатам вектора состояния, и, таким образом, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова сводилось к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. В данной работе для вывода уравнения обобщенной характеристической функции спектральное преобразование применяется и по координатам вектора состояния, и по переменной времени, что позволяет свести уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова к линейному матричному уравнению и получить его решение в явном виде.

Использование спектральной формы математического описания позволяет формализовать процесс решения задачи анализа при различных областях изменения времени и координат вектора состояния [13, 16–18]. Следует отметить, что спектральный метод является наиболее универсальным по сравнению с другими методами, основанными на ортогональных разложениях, поскольку соотношения для решения задачи при его применении представляют собой линейные алгебраические уравнения, инвариантные к выбору базисных систем и к их свойствам. Спектральный метод является эффективным инструментом при анализе более сложных стохастических систем: систем со случайным периодом квантования и систем со случайной структурой [1, 3, 16, 19, 20].

2. Постановка задачи

Предполагается, что поведение модели системы управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито [1, 2]

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где X – вектор состояния, $X \in \Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots \times \Omega_n \subseteq \mathbb{R}^n$, $\Omega_i \subseteq \mathbb{R}$ – отрезок, бесконечный полуинтервал или все множество действительных чисел, $i = 1, 2, \ldots, n$; $t \in T$, $T = [t_0, t_1]$ – отрезок времени функционирования системы; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от X_0; $f(t, x)\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – вектор-функция размеров $n \times 1$, $\sigma(t, x)\colon T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n \times s}$ – матричная функция размеров $n \times s$.

Начальное состояние X_0 определяется заданной плотностью вероятности $\phi_0(x)$. Функции $f(t,x)$ и $\sigma(t,x)$ задают структуру системы управления. Предполагается, что эти функции удовлетворяют условиям существования и единственности [21] решения задачи (1), а плотность вероятности вектора состояния удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова:

$$\frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}\phi(t,x) \tag{2}$$

с начальным условием $\phi(t_0,x) = \phi_0(x)$, где $\mathcal{A}$ – линейный оператор, задаваемый выражением

$$\mathcal{A}\phi(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_i(t,x)\phi(t,x)\big] + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\phi(t,x)\big], \tag{3}$$

$$g_{ij}(t,x) = \sum_{r=1}^{s} \sigma_{ir}(t,x)\sigma_{jr}(t,x).$$

Другая форма записи уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова:

$$\frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} = -\mathrm{div}\pi(t,x), \tag{4}$$

где $\pi(t,x)$ – поток вероятности [3, 19], координаты которого определяются соотношением

$$\pi_i(t,x) = f_i(t,x)\phi(t,x) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\phi(t,x)\big], \quad i = 1,2,\ldots,n. \tag{5}$$

Решение уравнений (2) (или (4)) понимается в обобщенном смысле.

Если ограничения на значения координат вектора состояния не наложены, то $\Omega = \mathbb{R}^n$, а плотность вероятности вектора состояния удовлетворяет естественному условию:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi(t,x)dx = 1.$$

Каких-либо дополнительных условий на функцию $\phi(t,x)$ здесь вводить не требуется.

Если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, т.е. имеются ограничения на значения координат вектора состояния, то необходимо дополнительно задать условия поведения траекторий случайного процесса $X(t)$ и плотности вероятности $\phi(t,x)$ на границе множества Ω (краевые условия).

При условии поглощения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω функция $\phi(t,x)$ должна удовлетворять условию $\phi(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0$ (в этом случае решение $\phi(t,x)$ уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова не нормировано к единице). В случае отражения траекторий на границе $\partial\Omega$ выполняется условие $\pi(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0$ (в такой ситуации уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова удобно представлять в форме (4)) [3].

Задача анализа стохастических систем управления формулируется следующим образом: по заданным уравнению системы (1), плотности вероятности $\phi_0(x)$ начального состояния X_0 и условию поведения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω (если $\Omega \neq \mathbb{R}^n$) найти плотность вероятности вектора состояния $\phi(t,x)$, $(t,x) \in T \times \Omega$.

3. Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций

Необходимые для дальнейшего изложения краткие теоретические сведения, связанные с определением многомерных матриц и их свойствами, приведены в Приложении.

Будем искать решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова в виде ряда по функциям базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T \times \Omega)$ (полной ортонормированной системы функций [12]), т.е.

$$\phi(t, x) = \sum_{i_0, i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty} \phi_{i_0 i_1 \ldots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x), \tag{6}$$

где

$$\phi_{i_0 i_1 \ldots i_n} = \int\limits_{T \times \Omega} e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x) \phi(t, x) dt dx, \quad i_0, i_1, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots$$

Совокупность коэффициентов разложения $\phi_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ функции $\phi(t, x)$ по функциям базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty}$ представляется в виде бесконечной $(n+1)$-мерной гиперстолбцовой матрицы $\Phi(n+1, 0) = (\phi_{i_0 i_1 \ldots i_n})$, называемой обобщенной характеристической функцией (спектральной характеристикой функции $\phi(t, x)$, определенной относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty}$) [16, 22, 23]. При этом предполагается, что функции базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty}$ порождаются всевозможными произведениями функций $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty}$, которые, в свою очередь, образуют базисные системы пространств $L_2(T)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно [12]. Функции базисной системы $\{p(i_1, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty}$, например, могут порождаться всевозможными произведениями функций $\{p_k(i_k, x_k)\}_{i_k=0}^{\infty}$, образующих базисные системы пространств $L_2(\Omega_k)$ соответственно, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Аналогичным образом определяются спектральные характеристики других функций времени и вектора состояния, а также функций вектора состояния (последние представляются гиперстолбцовыми матрицами меньшей размерности и вычисляются относительно базисной системы $\{p(i_1, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty}$).

Наряду с $\Phi(n+1, 0)$ введем следующие обозначения: $\Phi_0(n, 0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\phi_0(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty}$, т.е. $\Phi_0(n, 0)$ – n-мерная гиперстолбцовая матрица, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения функции $\phi_0(x)$ по функциям базисной системы $\{p(i_1, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty}$; $q(1, 0; t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t = t_0$.

Рассмотрим сначала случай, когда не наложено ограничений на значения координат вектора состояния. Пусть $A(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика линейного оператора $\mathcal{A}$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n=0}^{\infty}$ [16], т.е. $2(n+1)$-мерная гиперквадратная матрица, элементы которой определяются выражением

$$A_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n} = \int\limits_{T \times \Omega} e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x) \, \mathcal{A} e(j_0, j_1, \ldots, j_n, t, x) dt dx, \tag{7}$$

$$i_0, i_1, \ldots, i_n, j_0, j_1, \ldots, j_n = 0, 1, 2, \ldots$$

Отметим, что определение спектральной характеристики оператора можно применять к широкому классу линейных операторов (операторов умножения, дифференцирования, интегрирования, сдвига, Фредгольма и др., а также для их композиций), а не только к оператору $\mathcal{A}$, определяемому выражением (3). Так, например, будем обозначать через $\mathcal{P}(n+1,n+1)$ спектральную характеристику оператора дифференцирования по переменной t, определенную относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Для нахождения коэффициентов разложения $\phi_{i_0i_1\ldots i_n}$ функции $\phi(t,x)$ следует приравнять спектральные характеристики левой и правой частей уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, получив, таким образом, систему линейных алгебраических уравнений.

Спектральная характеристика левой части уравнения (2) с учетом свойств спектральных характеристик линейных операторов (в частности, операторов дифференцирования) и введенных обозначений представляется в форме $P(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)-q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)$, где

$$P(n+1,n+1)=\mathcal{P}(n+1,n+1)+\big(q(1,0;t_0)\cdot q^{\mathrm{T}}(1,0;t_0)\big)\otimes E(n,n), \tag{8}$$

$E(n,n)$ – $2n$-мерная единичная матрица.

Спектральная характеристика правой части уравнения (2), согласно свойствам спектральных характеристик функций и линейных операторов, представляется произведением $A(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)$.

Таким образом, уравнение для нахождения спектральной характеристики $\Phi(n+1,0)$ искомой функции $\phi(t,x)$ (спектральный аналог уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова) записывается в виде

$$\begin{aligned} &P(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)-q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)=\\ &=\ A(n+1,n+1)\cdot\Phi(n+1,0)\end{aligned} \tag{9}$$

и называется уравнением обобщенной характеристической функции (фактически, это система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения $\phi_{i_0i_1\ldots i_n}$ функции $\phi(t,x)$ относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$).

Найденная из уравнения (9) спектральная характеристика

$$\Phi(n+1,0)=\big(P(n+1,n+1)-A(n+1,n+1)\big)^{-1}\cdot\big(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\big) \tag{10}$$

определяет решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова и, следовательно, решение задачи анализа стохастической системы (1) в спектральной форме математического описания. Это решение выражается формулой (6).

Спектральную характеристику $A(n+1,n+1)$ оператора $\mathcal{A}$ не обязательно находить по определению (7) – можно использовать свойство линейности спектральных характеристик функций и свойство спектральных характеристик композиции линейных операторов [16]. Для этого введем новые обозначения: $F_i(n+1,n+1)$ и $G_{ij}(n+1,n+1)$ – спектральные характеристики операторов умножения на функции $f_i(t,x)$ и $g_{ij}(t,x)$ соответственно, $\mathcal{P}_i(n+1,n+1)$ и $\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования первого порядка по координатам x_i и спектральные характеристики операторов дифференцирования второго порядка по координатам x_i, x_j соответственно, $i,j=1,2,\ldots,n$. Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы

$\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. Тогда

$$A(n+1,n+1) = -\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i(n+1,n+1) \cdot F_i(n+1,n+1) + \\ +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1) \cdot G_{ij}(n+1,n+1), \tag{11}$$

или с учетом равенства $\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1) = \mathcal{P}_i(n+1,n+1) \cdot \mathcal{P}_j(n+1,n+1)$

$$A(n+1,n+1) = -\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i(n+1,n+1) \cdot \Big(F_i(n+1,n+1) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_j(n+1,n+1) \cdot G_{ij}(n+1,n+1)\Big). \tag{12}$$

Последняя формула удобнее для формирования спектрального аналога уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, представленного в форме (4), а выражение в скобках – это спектральная характеристика линейного оператора, ставящего в соответствие плотности вероятности $\phi(t, x)$ i-ю координату потока вероятности (5), так как

$$\Pi_i(n+1,0) = \Big(F_i(n+1,n+1) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_j(n+1,n+1) \cdot G_{ij}(n+1,n+1)\Big) \cdot \Phi(n+1,0), \tag{13}$$

где $\Pi_i(n+1,0)$ – спектральная характеристика функции $\pi_i(t, x)$.

Несмотря на то, что подобное представление достаточно громоздко, его использование обладает преимуществами, поскольку для операторов дифференцирования и операторов умножения на некоторые элементарные функции получены аналитические выражения для вычисления их спектральных характеристик относительно ряда базисных систем: полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функций Уолша, функций Хаара, полиномов и функций Лагерра, полиномов и функций Эрмита и др.

Далее рассмотрим случай, когда $\Omega \neq \mathbb{R}^n$ и, следовательно, заданы краевые условия. При такой постановке задачи соотношения для нахождения обобщенной характеристической функции $\Phi(n+1,0)$ будут аналогичны приведенным выше. Изменения состоят в следующем: при условии поглощения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω ($\phi(t, x)|_{x\in\partial\Omega} = 0$) в соотношениях (9) и (10) вместо спектральной характеристики $A(n+1,n+1)$ линейного оператора $\mathcal{A}$ требуется подставить $2(n+1)$-мерную гиперквадратную матрицу $A^{\text{п}}(n+1,n+1)$, определяемую выражением

$$A^{\text{п}}(n+1,n+1) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i^{\mathrm{T}}(n+1,n+1) \cdot F_i(n+1,n+1) - \\ -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{P}_i(n+1,n+1) \cdot \mathcal{P}_j^{\mathrm{T}}(n+1,n+1) \cdot G_{ij}(n+1,n+1), \tag{14}$$

а при условии отражения траекторий на границе $\partial\Omega$ ($\pi(t, x)|_{x\in\partial\Omega} = 0$) вместо $A(n+1,n+1)$ используется $2(n+1)$-мерная гиперквадратная матрица

$A^{\circ}(n+1,n+1)$:

$$A^{\circ}(n+1,n+1) = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i^{\mathrm{T}}(n+1,n+1) \cdot \Bigg(F_i(n+1,n+1) - \tag{15}$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \mathcal{P}_j(n+1,n+1) \cdot G_{ij}(n+1,n+1) \Bigg).$$

Фактически, учет краевых условий сводится к транспонированию спектральных характеристик операторов дифференцирования первого порядка и умножению их на -1, что следует из свойств спектральных характеристик производных первого порядка при заданных краевых условиях (в данном случае нулевых) [16]. Согласно этим свойствам при $\phi(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{P}_i(n+1,n+1) \cdot F_i(n+1,n+1) \cdot \Phi(n+1,0) = \\
&= -\mathcal{P}_i^{\mathrm{T}}(n+1,n+1) \cdot F_i(n+1,n+1) \cdot \Phi(n+1,0), \\
&\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1) \cdot G_{ij}(n+1,n+1) \cdot \Phi(n+1,0) = \\
&= \mathcal{P}_i(n+1,n+1) \cdot \mathcal{P}_j(n+1,n+1) \cdot G_{ij}(n+1,n+1) \cdot \Phi(n+1,0) = \\
&= -\mathcal{P}_i(n+1,n+1) \cdot \mathcal{P}_j^{\mathrm{T}}(n+1,n+1) \cdot G_{ij}(n+1,n+1) \cdot \Phi(n+1,0),
\end{aligned}$$

откуда следует (14).

Выражение (15) в случае $\pi(t,x)|_{x\in\partial\Omega} = 0$ получается аналогично с учетом (12) и (13) на основании тех же свойств, а именно:

$$\mathcal{P}_i(n+1,n+1) \cdot \Pi_i(n+1,0) = -\mathcal{P}_i^{\mathrm{T}}(n+1,n+1) \cdot \Pi_i(n+1,0).$$

Основной сложностью при решении задачи анализа выходных процессов в классе обобщенных характеристических функций является то, что все входящие в уравнение (9) матрицы – это матрицы с бесконечным числом элементов, поэтому при расчетах, как правило, эти матрицы усекаются. При этом решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова ищется в виде частичной суммы функционального ряда (6):

$$\phi(t,x) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \phi_{i_0 i_1 \ldots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x), \tag{16}$$

где заданные числа L_0, L_1, …, L_n называются порядками усечения спектральных характеристик. Их выбор, а также выбор базисной системы определяет точность приближенного решения задачи анализа.

4. Методика приближенного решения задачи анализа выходных процессов нелинейных стохастических систем управления

Приведем методику приближенного решения задачи анализа.

1. Выбрать базисные системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространств $L_2(T)$ и $L_2(\Omega)$ соответственно. Сформировать базисную систему $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T\times\Omega)$:

$$e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x) = q(i_0,t) \cdot p(i_1,\ldots,i_n,x), \quad i_0,i_1,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots$$

Выбрать порядки усечения L_0, L_1, …, L_n спектральных характеристик.

2. Вычислить матрицу-столбец $q(1,0;t_0)$ значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке t_0.

3. Вычислить спектральные характеристики $\mathcal{P}(n+1,n+1)$ и $\mathcal{P}_i(n+1,n+1)$ операторов дифференцирования первого порядка по переменным t и x_i соответственно, $i=1,2,\ldots,n$. Найти матрицу $P(n+1,n+1)$, используя (8). Вычислить спектральные характеристики $F_i(n+1,n+1)$ и $G_{ij}(n+1,n+1)$ операторов умножения на функции $f_i(t,x)$ и $g_{ij}(t,x)$ соответственно, $i,j=1,2,\ldots,n$.

4. Найти спектральную характеристику $A(n+1,n+1)$ по формуле (12), если не наложено ограничений на значения координат вектора состояния ($\Omega=\mathbb{R}^n$). Найти матрицы $A^{\text{п}}(n+1,n+1)$ или $A^{\text{о}}(n+1,n+1)$ при условии поглощения или отражения траекторий случайного процесса $X(t)$ на границе множества Ω соответственно (используются соотношения (14) или (15)).

5. Вычислить спектральную характеристику $\Phi_0(n,0)$ плотности вероятности $\phi_0(x)$ начального состояния X_0.

6. Найти решение $\Phi(n+1,0)$ уравнения обобщенной характеристической функции, используя (10) (при условии поглощения траекторий вместо спектральной характеристики $A(n+1,n+1)$ требуется подставить матрицу $A^{\text{п}}(n+1,n+1)$, при условии отражения – матрицу $A^{\text{о}}(n+1,n+1)$).

7. Найти решение $\phi(t,x)$ уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, применяя (16). Если решается задача анализа при условии поглощения траекторий, то плотность вероятности вектора состояния определяется выражением

$$\frac{\phi(t,x)}{\int\limits_{\Omega}\phi(t,x)dx}.$$

Пример. Рассмотрим задачу анализа выходных процессов одномерной ($n=1$) стохастической релейной системы управления, заданной уравнением Ито

$$dX(t)=F(X(t))dt+dW(t),$$

где $t\in T=[0,1]$, $X\in\Omega=\mathbb{R}$; $F(x)$ – характеристика релейного элемента с зоной нечувствительности [2]:

$$F(x)=\begin{cases}1, \ x>0{,}5,\\ 0, \ |x|\le 0{,}5,\\ -1, \ x<-0{,}5;\end{cases}$$

$X(0)=X_0$ – случайная величина, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием $m_0=0{,}5$ и дисперсией $D_0=1$; $W(t)$ – одномерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от X_0.

Воспользуемся приведенной выше методикой приближенного решения задачи анализа выходных процессов стохастических систем.

1. Выберем в качестве базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ полиномы Лежандра $\hat{P}(i_0,t)$, ортонормированные на отрезке $[0,1]$, а в качестве базисной системы $\{p(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – функции Эрмита $\hat{\Phi}(i_1,x)$, ортонормированные на множестве действительных чисел [12, 16, 18].

Сформируем базисную систему $\{e(i_0,i_1,t,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$ пространства $L_2([0,1]\times\mathbb{R})$:

$$e(i_0,i_1,t,x)=\hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x),\quad i_0,i_1=0,1,2,\ldots$$

Зададим порядки усечения спектральных характеристик: $L_0=16$, $L_1=32$.

2. Матрица-столбец $q(1,0;0)$ значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке $t_0=0$ имеет вид

$$\left[\,\hat{P}(0,0)\ \ \hat{P}(1,0)\ \ \ldots\ \ \hat{P}(L_0-1,0)\,\right]^{\mathrm{T}}.$$

3. Спектральные характеристики $\mathcal{P}(2,2)$ и $\mathcal{P}_1(2,2)$ операторов дифференцирования первого порядка по переменным t и x соответственно, а также спектральная характеристика $F(2,2)$ оператора умножения на функцию $f(t,x)=F(x)$ вычисляются по определению (см. (7)). Так, элементы $p_{i_0i_1j_0j_1}$ и $p_{1\,i_0i_1j_0j_1}$ матриц $\mathcal{P}(2,2)$ и $\mathcal{P}_1(2,2)$ соответственно определяются следующим образом:

$$p_{i_0i_1j_0j_1}=\int\limits_0^1 \hat{P}(i_0,t)\hat{P}'(j_0,t)dt\cdot\delta_{i_1j_1},\quad p_{1\,i_0i_1j_0j_1}=\delta_{i_0j_0}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\hat{\Phi}(i_1,x)\hat{\Phi}'(j_1,x)dx,$$

где $\delta_{i_0j_0}$, $\delta_{i_1j_1}$ – символы Кронекера, $i_0,j_0=0,1,\ldots,L_0-1$, $i_1,j_1=0,1,\ldots,L_1-1$. Элементы $f_{i_0i_1j_0j_1}$ матрицы $F(2,2)$ вычисляются по формуле

$$p_{i_0i_1j_0j_1}=\delta_{i_0j_0}\cdot\int\limits_{-\infty}^{+\infty}F(x)\hat{\Phi}(i_1,x)\hat{\Phi}(j_1,x)dx.$$

Спектральная характеристика $G(2,2)$ оператора умножения на функцию $g(t,x)=1$ представляет собой четырехмерную единичную матрицу $E(2,2)$.

Матрица $P(2,2)$ задается в виде

$$P(2,2)=\mathcal{P}(2,2)+\big(q(1,0;0)\cdot q^{\mathrm{T}}(1,0;0)\big)\otimes E(1,1),$$

где $E(1,1)$ – двумерная единичная матрица ($E(2,2)=E(1,1)\otimes E(1,1)$).

4. Спектральная характеристика $A(2,2)$ с учетом равенства $G(2,2)=E(2,2)$ определяется соотношением

$$A(2,2)=-\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F(2,2)+\frac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_1^2(2,2).$$

5. Вычислим спектральную характеристику $\Phi_0(1,0)$ плотности вероятности $\phi_0(x)$ начального состояния X_0 относительно системы функций Эрмита:

$$\Phi_0(1,0)=(\phi_{0\,i_1}),$$

где $\phi_{0\,i_1}=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\dfrac{(x-0,5)^2}{2}}\hat{\Phi}(i_1,x)dx,\ \ i_1=0,1,\ldots,L_1-1.$

6. Найдем решение уравнения обобщенной характеристической функции:

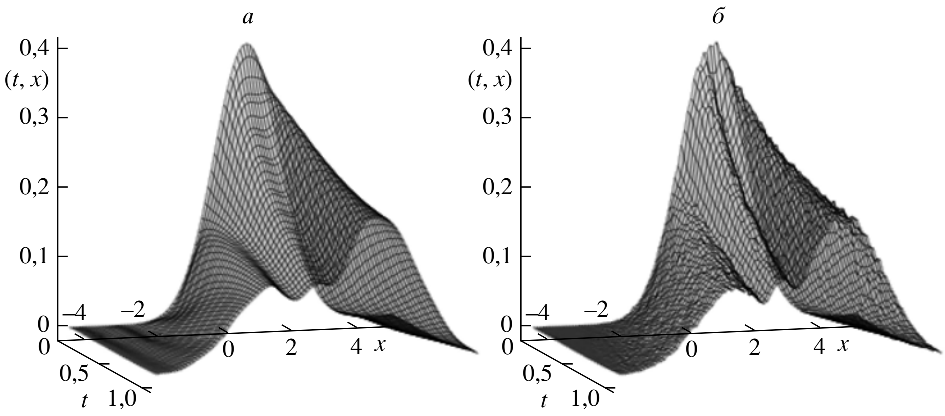
$$\Phi(2,0)=\big(P(2,2)-A(2,2)\big)^{-1}\cdot\big(q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0)\big),$$

т.е. $\Phi(2,0)=\left(P(2,2)+\mathcal{P}_1(2,2)\cdot F(2,2)-\dfrac{1}{2}\cdot\mathcal{P}_1^2(2,2)\right)^{-1}\cdot\big(q(1,0;0)\otimes\Phi_0(1,0)\big).$

7. Определим приближенное решение задачи анализа рассматриваемой системы:

$$\phi(t,x)=\sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\phi_{i_0i_1}\cdot\hat{P}(i_0,t)\cdot\hat{\Phi}(i_1,x),\quad (t,x)\in[0,1]\times\mathbb{R},$$

где $\phi_{i_0i_1}$ – элементы матрицы $\Phi(2,0)$.



Плотность вероятности состояния системы.

График найденной функции $\phi(t,x)$ изображен на рисунке слева, а справа приведен график плотности вероятности, полученной методом статистических испытаний для сравнения (число моделируемых траекторий – 200000, численное интегрирование методом Эйлера с шагом 0,01 по переменной t, шаг по состоянию x для построения гистограммы – 0,1).

Численные расчеты при использовании спектрального метода выполнены с помощью специализированного программного обеспечения Spectrum [24], предназначенного для решения задач анализа и синтеза систем управления различных классов с использованием спектральной формы математического описания.

5. Заключение

Основным результатом является единая методика решения задачи анализа нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций как при отсутствии ограничений на значения координат вектора состояния, так и в задачах с ограничениями. Практическая применимость разработанной методики базируется на развитом алгоритмическом и программном обеспечении спектрального метода [13, 16–18, 24]. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на решении задачи анализа стохастической релейной системы управления.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Пусть m_1 и m_2 – заданные натуральные числа, $M = m_1 + m_2$. Многомерной матрицей $A(m_1, m_2)$ размерности M называется упорядоченная совокупность чисел $a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}}$, $i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots$ Первые m_1 индексов называются строчными $(i_1, i_2, \ldots, i_{m_1})$, а остальные – столбцовыми $(j_1, j_2, \ldots, j_{m_2})$. Разделение множества индексов на строчные и столбцовые позволяет задать структуру многомерной матрицы: обычно выделяют гиперквадратные матрицы, у которых число строчных и столбцовых индексов совпадает, гиперстолбцовые матрицы, все индексы которых строчные, и гиперстрочные матрицы, все индексы которых столбцовые.

Матрицы $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ и $B(m_1, m_2) = (b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ называются равными, если соответствующие элементы этих матриц равны:

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} = b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}},$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots$$

Суммой $A(m_1, m_2) + B(m_1, m_2)$ матриц $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ и $B(m_1, m_2) = (b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ называется матрица $C(m_1, m_2) = (c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$, если

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} + b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}},$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots$$

Матрица $B(m_1, m_2) = (b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ называется произведением матрицы $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ на число α $(B(m_1, m_2) = \alpha A(m_1, m_2))$, если

$$b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} = \alpha \cdot a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}},$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots$$

Произведением $A(m_1, m_3) \cdot B(m_3, m_2)$ матриц $A(m_1, m_3) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} k_1 k_2 \ldots k_{m_3}})$ и $B(m_3, m_2) = (b_{k_1 k_2 \ldots k_{m_3} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ называется матрица $C(m_1, m_2) = (c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$, если

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_{m_3} = 0}^{\infty} a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} k_1 k_2 \ldots k_{m_3}} \cdot b_{k_1 k_2 \ldots k_{m_3} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} < \infty,$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots$$

Тензорным произведением $A(m_1, m_2) \otimes B(m_3, m_4)$ матриц $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ и $B(m_3, m_4) = (b_{k_1 k_2 \ldots k_{m_3} l_1 l_2 \ldots l_{m_4}})$ называется матрица $C(m_1 + m_3, m_2 + m_4) = (c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} k_1 k_2 \ldots k_{m_3} j_1 j_2 \ldots j_{m_2} l_1 l_2 \ldots l_{m_4}})$, если

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} k_1 k_2 \ldots k_{m_3} j_1 j_2 \ldots j_{m_2} l_1 l_2 \ldots l_{m_4}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} \cdot b_{k_1 k_2 \ldots k_{m_3} l_1 l_2 \ldots l_{m_4}},$$
$$i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, k_1, k_2, \ldots, k_{m_3}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2}, l_1, l_2, \ldots, l_{m_4} = 0, 1, 2, \ldots$$

Для матрицы $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ транспонированной матрицей называется матрица $A^{\mathrm{T}}(m_2, m_1) = (a_{j_1 j_2 \ldots j_{m_2} i_1 i_2 \ldots i_{m_1}})$.

Гиперквадратная матрица $A^{-1}(m, m)$ называется обратной для гиперквадратной матрицы $A(m, m)$, если справедливо равенство

$$A^{-1}(m, m) \cdot A(m, m) = A(m, m) \cdot A^{-1}(m, m) = E(m, m), \tag{П.1}$$

где $E(m, m)$ – единичная матрица, т.е. такая гиперквадратная матрица, что

$$B(m, m) \cdot E(m, m) = E(m, m) \cdot B(m, m) = B(m, m)$$

для любой гиперквадратной матрицы $B(m, m)$.

Обращение многомерных матриц, как правило, сводится к решению системы линейных уравнений относительно элементов матрицы $A^{-1}(m, m)$ (выражение (П.1) – матричная запись этой системы).

Для многомерных матриц с конечным числом элементов, т.е. при условии, что значения индексов ограничены, определены такие же понятия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Пугачев В.С.*, *Синицын И.Н.* Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004.
2. *Пантелеев А.В.*, *Бортаковский А.С.* Теория управления в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2003.

3. *Тихонов В.И.*, *Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977.
4. *Risken H.* The Fokker–Planck equation: Methods of solution and applications. N.Y.: Springer-Verlag, 1996.
5. *Казаков И.Е.*, *Мальчиков С.В.* Анализ стохастических систем в пространстве состояний. М.: Наука, 1983.
6. *Красовский А.А.* Фазовое пространство и статистическая теория динамических систем. М.: Наука, 1974.
7. *Синицын В.И.* Нахождение многомерных распределений процесса, определяемого стохастическим дифференциальным уравнением методом эллипсоидальной аппроксимации // Докл. АН СССР. 1991. Т. 320. № 2. С. 280–283.
8. *Di Paola M.*, *Sofi A.* Approximate solution of the Fokker–Planck–Kolmogorov equation // Probab. Enging. Mech. 2002. V. 17. No. 4. P. 369–384.
9. *Wei G.W.* A unified approach for the solution of the Fokker–Planck equation // J. Phys. A: Math. Gen. 2000. V. 33. P. 4935–4953.
10. *Кузнецов Д.Ф.* Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2009.
11. *Семенов В.В.* Уравнение обобщенной характеристической функции вектора состояния систем автоматического управления // Аналитические методы синтеза регуляторов. Межвуз. науч. сб. Саратов: Изд-во СПИ, 1977. Вып. 2. С. 3–36.
12. *Пугачев В.С.* Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во МАИ, 1996.
13. *Солодовников В.В.*, *Семенов В.В.* Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974.
14. *Солодовников В.В.*, *Дмитриев А.Н.*, *Егупов Н.Д.* Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. М.: Машиностроение, 1986.
15. *Лапин С.В.*, *Егупов Н.Д.* Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
16. *Пантелеев А.В.*, *Рыбаков К.А.*, *Сотскова И.Л.* Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. М.: Вуз. книга, 2006.
17. *Рыбин В.В.* Описание сигналов и линейных нестационарных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах. М.: Изд-во МАИ, 2003.
18. *Романов В.А.*, *Рыбаков К.А.* Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Тр. МАИ. 2010. № 39 (http://www.mai.ru).
19. *Казаков И.Е.*, *Артемьев В.М.*, *Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993.
20. *Rybakov K.A.*, *Sotskova I.L.* Spectral method for analysis of switching diffusions // IEEE TAC. 2007. V. 52. No. 7. P. 1320–1325.
21. *Анулова С.В.*, *Веретенников А.Ю.*, *Крылов Н.В.*, *Липцер Р.Ш.* и др. Стохастическое исчисление // Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундамент. направления. Т. 45. М.: ВИНИТИ, 1989.
22. *Сотскова И.Л.* Применение аппарата обобщенной характеристической функции к анализу стохастических систем управления ЛА // Задачи стохастического управления. Темат. сб. науч. тр. М.: МАИ, 1986. С. 71–78.
23. *Semenov V.V.*, *Sotskova I.L.* The spectral method for solving Fokker–Planck–Kolmogorov equation for stochastic control system analysis // Second IFAC Sympos. Stochast. Control. Preprints, Part 1. 1986. P. 131–136.
24. *Рыбаков К.А.* Программное обеспечение спектрального метода Spectrum // Тр. МАИ. 2003. № 14 (http://www.mai.ru).

Статья представлена к публикации членом редколлегии А.И. Кибзуном.

Поступила в редакцию 15.06.2010