ИНФОРМАТИКА И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЯ, 2011. Т. 5. Вып. 2. С. 69–81

СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

А. В. Пантелеев[1], К. А. Рыбаков[2]

Аннотация: Предложен новый метод нахождения оптимального в среднем управления при неполной информации о векторе состояния для многомерных нелинейных стохастических систем, основанный на спектральной форме математического описания. Получены соотношения для определения оптимального в среднем управления с использованием спектральной формы математического описания. Разработано методическое обеспечение синтеза оптимального в среднем управления при неполной информации о векторе состояния, его эффективность продемонстрирована на решении модельной задачи синтеза оптимальной двумерной стохастической системы при различных условиях информированности.

Ключевые слова: оптимальное управление; синтез при неполной информации; спектральный метод; спектральное преобразование; спектральная форма математического описания; стохастическая система; уравнение Беллмана; уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова

1 Введение

В работе рассматривается задача синтеза оптимального управления нелинейными стохастическими системами при неполной информации о векторе состояния [1, 2], математические модели которых описываются стохастическими дифференциальными уравнениями Ито [3].

Существующие методы решения задачи синтеза нелинейных стохастических систем применимы лишь в частных случаях [2]. В связи с этим для синтеза оптимального управления предлагается новый метод, основанный на спектральной форме математического описания систем управления [4].

В основе спектрального метода лежит представление сигналов совокупностью коэффициентов разложения их в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций (базисной системе), заданной в общем случае на нестационарном отрезке. Базовыми понятиями метода являются: спектральное преобразование, нестационарные спектральные характеристики (спектральные характеристики функций) и нестационарные передаточные функции (спектральные характеристики линейных операторов).

Спектральный метод анализа линейных детерминированных и стохастических систем управления был разработан в конце 1960-х гг. профессором В. В. Семеновым и затем обобщен для анализа нелинейных детерминированных систем. Дальнейшее развитие спектрального метода связано с решением задачи анализа нелинейных стохастических систем.

В [5] введено понятие обобщенной характеристической функции — спектральной характеристики плотности вероятности вектора состояния стохастической системы, однако для получения уравнения обобщенной характеристической функции как спектрального аналога уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова спектральное преобразование применялось только по координатам вектора состояния и, таким образом, уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова сводилось к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

В [6, 7] для вывода уравнения обобщенной характеристической функции спектральное преобразование применяется и по координатам вектора состояния, и по переменной времени, что позволяет свести уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова к линейному матричному уравнению и получить его решение в явном виде.

Следующий этап — это применение спектральной формы математического описания к решению задачи синтеза оптимальных нелинейных стохастических систем управления, что и является основной целью данной работы. Отметим, что полученные результаты базируются, с одной стороны, на использовании математического аппарата спектрального метода, а с другой стороны, на теории оптимального управления нелинейными стохастическими системами при неполной информации о векторе состояния [1, 2].

В [8] была предпринята первая попытка применения спектральной формы математического опи-

[1]Московский авиационный институт, кафедра математической кибернетики, avpanteleev@inbox.ru
[2]Московский авиационный институт, кафедра математической кибернетики, rkoffice@mail.ru

сания к задаче синтеза оптимальных нелинейных стохастических систем управления частного вида. Работа [8] являлась логическим продолжением [5], поэтому для вывода соотношений, необходимых при нахождении оптимального управления в спектральной форме, спектральное преобразование применялось только по координатам вектора состояния; в [8] так и не был сформирован эффективный алгоритм решения поставленной задачи, но, безусловно, эта работа была важным этапом в развитии спектральных методов синтеза.

В настоящей работе соотношения для определения оптимального управления [1, 2], а именно система уравнений Фоккера–Планка–Колмогорова и Беллмана, с помощью спектрального преобразования сводятся к системе нелинейных уравнений для коэффициентов разложения координат оптимального управления и оптимальной плотности вероятности вектора состояния в ряд по функциям базисной системы. Вид этой системы нелинейных уравнений не зависит от выбора базисной системы, а ее решение проще, нежели исходная задача. Оно осуществляется либо итерационными методами, либо методом сведения к эквивалентной задаче безусловной оптимизации с последующим применением методов нулевого порядка, в том числе метаэвристических методов поиска глобального экстремума [9, 10].

Применение метаэвристических алгоритмов совместно со спектральной формой математического описания может позволить решить ряд актуальных научно-технических задач проектирования современных образцов ракетно-космической и авиационной техники, поскольку показатели качества сравниваемых вариантов, как правило, описываются нелинейными зависимостями и оцениваются при помощи сложных моделирующих алгоритмов, что обуславливает высокую трудоемкость вычислений. Их использование позволит решить задачи поиска глобального экстремума многоэкстремальных функций, зависящих от достаточно большого числа переменных (нескольких сотен) со сложным рельефом поверхностей уровня, возникающие при применении соответствующих условий оптимальности в задачах оптимального управления нелинейными стохастическими системами.

Использование спектральной формы математического описания позволяет формализовать процесс решения задач анализа и синтеза систем управления различных классов.

Данная работа является развитием теории спектрального метода и методов приближенного решения задачи синтеза оптимального управления нелинейными стохастическими системами [4–8].

2 Постановка задачи

Рассмотрим систему управления, математическая модель которой описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито [1–3]:

$$\left.\begin{aligned} dX(t) &= f\left(t, X(t), u(t)\right) dt + \\ &\qquad + \sigma\left(t, X(t), u(t)\right) dW(t); \\ X(t_0) &= X_0\,, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния; $u \in U \subseteq \mathbb{R}^q$ — вектор управления; $t \in T$, $T = [t_0, t_1]$ — заданный отрезок времени функционирования системы; $W(t)$ — s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от X_0; $f(t,x,u)\colon T \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$ — вектор-функция размеров $n \times 1$, $\sigma(t,x,u)\colon T \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^{n \times s}$ — матричная функция размеров $n \times s$.

Начальное состояние X_0 определяется заданной плотностью вероятности $\phi_0(x)$. Функции $f(t,x,u)$ и $\sigma(t,x,u)$ задают структуру системы управления.

Предполагается, что при управлении используется информация о времени и величине первых m координат вектора состояния ($0 \le m \le n$), т. е. $X = [X_{(1)}\, X_{(2)}]^{\mathrm{T}}$, где о координатах вектора $X_{(1)} = [X_1\, X_2 \ldots X_m]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$ текущая информация известна, а о координатах вектора $X_{(2)} = [X_{m+1} \ldots X_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-m}$ отсутствует. Управление $u(t)$, применяемое в каждый момент времени $t \in T$, имеет вид управления с обратной связью по неполному вектору состояния (рис. 1): $u(t) = u(t, X_{(1)}(t))$.

Число m определяется условиями информированности. При $m = n$ имеется информация о всех координатах вектора X и система, представленная на рис. 1, будет системой с полной обратной связью, а при $m = 0$ — системой, разомкнутой по состоянию, где применяется программное управление $u(t)$.

Множество допустимых управлений $\mathfrak{U}_m$ состоит из функций $u(t, x_{(1)})\colon T \times \mathbb{R}^m \to U$ таких, что выполняются условия существования и единственности [11, 12] решения задачи (1), а плотность вероятности вектора состояния удовлетворяет уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова

$$\frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}_{u(\cdot)} \phi(t,x) \tag{2}$$

с начальным условием $\phi(t_0,x) = \phi_0(x)$, где $\mathcal{A}_{u(\cdot)}$ — линейный оператор, задаваемый выражением

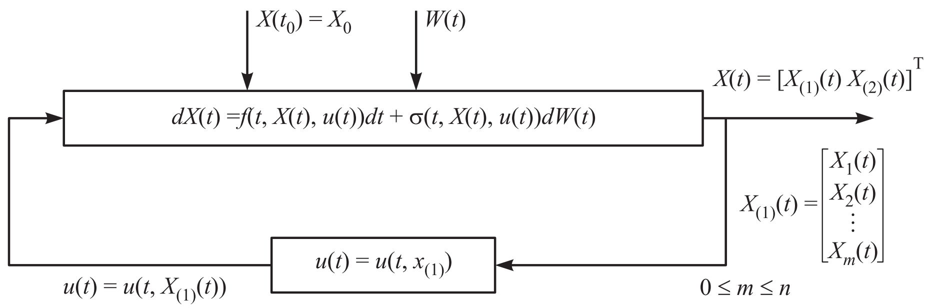

Рис. 1 Структура стохастической системы управления

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathcal{A}_{u(\cdot)}\phi(t,x) = \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i(t,x,u(t,x_{(1)}))\phi(t,x)\right] + \\
&+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[g_{ij}(t,x,u(t,x_{(1)}))\phi(t,x)\right]\ ; \\
&g_{ij}(t,x,u) = \sum_{r=1}^{s} \sigma_{ir}(t,x,u)\sigma_{jr}(t,x,u).
\end{aligned}
\right\} \quad (3)
$$

Обозначим через $\mathfrak{D}_m$ множество пар $d_m = (\phi(t,x), u(t,x_{(1)}))$, где функции $\phi(t,x)$ и $u(t,x_{(1)}) \in \mathfrak{U}_m$ удовлетворяют уравнению (2) с начальным условием $\phi(t_0,x) = \phi_0(x)$. Определим на множестве $\mathfrak{D}_m$ функционал качества управления:

$$
J(d_m) = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n} f_0(t,x,u(t,x_{(1)}))\phi(t,x)\,dtdx + \\
+ \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\phi(t_1,x)\,dx\,, \quad (4)
$$

где $f_0(t,x,u)\colon T \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$, $F(x)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — заданные непрерывные функции, удовлетворяющие условиям [12], которые гарантируют конечность величины (4).

Задача синтеза оптимальных стохастических систем управления состоит в следующем: по заданным уравнению системы (1), плотности вероятности $\phi_0(x)$ начального состояния X_0, условиям информированности (величине m) и функционалу (4) требуется найти такой элемент $d_m^* = (\phi^*(t,x), u^*(t,x_{(1)})) \in \mathfrak{D}_m$, что

$$
J(d_m^*) = \min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J(d_m)\,.
$$

Таким образом, проведена редукция исходной стохастической задачи к детерминированной проблеме управления решением уравнения в частных производных (2).

Для решения задачи синтеза оптимальных стохастических систем будем использовать спектральную форму математического описания, но прежде приведем основные соотношения для определения оптимального управления.

Известно [1, 2], что задача нахождения оптимальной пары $d_m^* = (\phi^*(t,x), u^*(t,x_{(1)}))$ (точнее пары, «подозрительной на оптимальность») сводится к решению системы дифференциальных уравнений:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial \phi^*(t,x)}{\partial t} &= \mathcal{A}_{u^*(\cdot)}\phi^*(t,x); \\
\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} &= -\mathcal{A}^*_{u^*(\cdot)}\psi(t,x) + f_0(t,x,u^*(t,x_{(1)})),
\end{aligned}
\right\} \quad (5)
$$

где $\psi(t,x)$ — вспомогательная функция, при условии

$$
\phi^*(t_0,x) = \phi_0(x)\,;\;\; \psi(t_1,x) = -F(x)\,. \quad (6)
$$

Структура оптимального управления имеет вид:

$$
u^*(t,x_{(1)}) = \arg\max_{u \in U} \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u) + \right. \\
\left. + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} g_{ij}(t,x,u) - f_0(t,x,u) \right\} \times \\
\times \phi^*(t,x_{(2)}|x_{(1)})\,dx_{(2)}\,, \quad (7)
$$

где

$$
\left.
\begin{aligned}
\phi^*(t,x_{(2)}|x_{(1)}) &= \frac{\phi^*(t,x)}{\phi^*(t,x_{(1)})}\,; \\
\phi^*(t,x_{(1)}) &= \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \phi^*(t,x)\,dx_{(2)}\,.
\end{aligned}
\right\} \quad (8)
$$

Во втором уравнении системы (5) $\mathcal{A}^*_{u(\cdot)}$ — сопряженный оператор по отношению к оператору $\mathcal{A}_{u(\cdot)}$:

$$
\mathcal{A}^*_{u(\cdot)}\psi(t,x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x_i} f_i(t,x,u(t,x_{(1)})) + \\
+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 \psi(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} g_{ij}(t,x,u(t,x_{(1)}))\,,
$$

а в выражении (8) $\phi(t, x_{(1)})$ — маргинальная плотность вероятности, характеризующая распределение вектора $X_{(1)}$, $\phi(t, x_{(2)}|x_{(1)})$ — условная плотность вероятности, характеризующая распределение вектора $X_{(2)}$ при условии $X_{(1)} = x_{(1)}$.

Следовательно, искомое оптимальное в среднем управление $u^*(t, x_{(1)})$ и оптимальную плотность вероятности $\phi^*(t, x)$ можно найти в результате решения системы уравнений (5) с условием (6) совместно с (7), (8), при этом минимум функционала (4) можно подсчитать по формуле [2]:

$$\min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J(d_m) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(t_0, x)\phi_0(x)\, dx\,. \qquad (9)$$

Заметим, что решение уравнений (5) понимается в обобщенном смысле [13].

3 Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом

Необходимые для дальнейшего изложения краткие теоретические сведения, связанные с определением многомерных матриц и их свойствами, приведены в приложении 1.

Будем искать решение уравнений (5) в виде рядов по функциям некоторой базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T \times \mathbb{R}^n; \rho(x))$ (полной ортонормированной системы функций [14]), т. е.

$$\phi(t, x) = \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty} \phi_{i_0 i_1 \ldots i_n} e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x); \quad (10)$$

$$\psi(t, x) = \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty} \psi_{i_0 i_1 \ldots i_n} e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x), \quad (11)$$

где

$$\phi_{i_0 i_1 \ldots i_n} = \int\limits_{T\times\mathbb{R}^n} \rho(x) e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\phi(t, x)\, dt dx,$$

$$\psi_{i_0 i_1 \ldots i_n} = \int\limits_{T\times\mathbb{R}^n} \rho(x) e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\psi(t, x)\, dt dx,$$

$$i_0, i_1, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots$$

Совокупности коэффициентов разложения $\phi_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ и $\psi_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ функций $\phi(t, x)$ и $\psi(t, x)$ по функциям базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ представляются в виде бесконечных $(n+1)$-мерных гиперстолбцовых матриц $\Phi(n+1, 0) = (\phi_{i_0 i_1 \ldots i_n})$ и $\Psi(n+1, 0) = (\psi_{i_0 i_1 \ldots i_n})$, т. е. спектральных характеристик функций $\phi(t, x)$ и $\psi(t, x)$ соответственно, определенных относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ [6, 7]. При этом предполагается, что функции базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ порождаются всевозможными произведениями функций $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1, \ldots, i_n, x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, которые, в свою очередь, образуют базисные системы пространств $L_2(T)$ и $L_2(\mathbb{R}^n; \rho(x))$ соответственно [14].

Функции базисной системы $\{p(i_1, \ldots, i_n, x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ порождаются всевозможными произведениями функций $\{p_k(i_k, x_k)\}_{i_k=0}^{\infty}$, образующих базисные системы пространств $L_2(\mathbb{R}; \rho_k(x_k))$ соответственно, $k = 1, \ldots, n$, $\rho(x) = \rho_1(x_1) \cdots \rho_n(x_n)$; или

$$p(i_1, \ldots, i_n, x) = \\ = p_{(1)}(i_1, \ldots, i_m, x_{(1)}) p_{(2)}(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)})\,.$$

Здесь функции $p_{(1)}(i_1, \ldots, i_m, x_{(1)})$ и $p_{(2)}(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)})$ образуют базисные системы пространств $L_2(\mathbb{R}^m; \rho_{(1)}(x_{(1)}))$ и $L_2(\mathbb{R}^{n-m}; \rho_{(2)}(x_{(2)}))$ соответственно, при этом $\rho(x) = \rho_{(1)}(x_{(1)})\rho_{(2)}(x_{(2)})$.

Введение весовой функции $\rho(x)$ (и порождающих ее $\rho_k(x_k)$, $k = 1, \ldots, n$, или $\rho_{(1)}(x_{(1)})$ и $\rho_{(2)}(x_{(2)})$) обусловлено тем, что функции $\phi(t, x)$ и $\psi(t, x)$ обладают разными свойствами, а именно: $\phi(t, x)$ удовлетворяет условию нормировки и, следовательно, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \phi(t, x) = 0$, в то время как $\psi(t, x)$ может быть неограниченной (например, в простейшей задаче синтеза оптимальных линейных стохастических систем с квадратичным по координатам вектора состояния функционалом качества (4) эта функция является полиномом относительно переменных x_i, $i = 1, \ldots, n$). В общем случае весовая функция, относительно которой ортогональны функции базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, может зависеть и от переменной t, однако такая зависимость не носит принципиального характера, поэтому здесь не рассматривается.

Аналогичным образом определяются спектральные характеристики функций вектора состояния. Они представляются гиперстолбцовыми матрицами меньшей размерности и вычисляются относительно базисной системы $\{p(i_1, \ldots, i_n, x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Наряду с $\Phi(n+1, 0)$ введем следующие обозначения: $\Phi_0(n, 0)$ — спектральная характеристика плотности вероятности $\phi_0(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, т. е. $\Phi_0(n,0)$ — n-мерная гиперстолбцовая матрица, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения функции $\phi_0(x)$ по функциям базисной системы $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$; $F(n,0)$ — спектральная характеристика функции $F(x)$, определенная относительно той же базисной системы; $q(1,0;t_0)$ и $q(1,0;t_1)$ — матрицы-столбцы значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t=t_0$ и $t=t_1$ соответственно.

Получим сначала спектральный аналог уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова. Пусть $A(n+1,n+1)$ — спектральная характеристика линейного оператора $\mathcal{A}_{u(\cdot)}$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ [6, 7], т. е. $2(n+1)$-мерная гиперквадратная матрица, элементы которой определяются выражением:

$$A_{i_0 i_1\ldots i_n j_0 j_1\ldots j_n} = \int\limits_{T\times\mathbb{R}^n} \rho(x)e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\times \mathcal{A}_{u(\cdot)}e(j_0,j_1,\ldots,j_n,t,x)\,dtdx,$$
$$i_0,i_1,\ldots,i_n,j_0,j_1,\ldots,j_n = 0,1,2,\ldots \quad (12)$$

По этой формуле определяются элементы спектральной характеристики $A(n+1,n+1)$ линейного оператора $\mathcal{A}_{u(\cdot)}$ в случае, когда функция $u(t,x_{(1)})$ известна, но поскольку она подлежит нахождению наряду с плотностью вероятности $\phi(t,x)$, будем использовать обозначение $A(n+1,n+1;U(m+2,0))$, в котором отражена зависимость элементов этой матрицы от коэффициентов разложения координат вектор-функции $u(t,x_{(1)})$ по функциям базисной системы $\{e_{(1)}(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)})\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T\times\mathbb{R}^m;\rho_{(1)}(x_{(1)}))$:

$$e_{(1)}(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}) = q(i_0,t)\cdot p_1(i_1,x_1)\cdots p_m(i_m,x_m),$$
$$i_0,i_1,\ldots,i_m = 0,1,2,\ldots,$$
$$\rho_{(1)}(x_{(1)}) = \rho_1(x_1)\cdots\rho_m(x_m),$$

или

$$e_{(1)}(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}) = q(i_0,t)\cdot p_{(1)}(i_1,\ldots,i_m,x_{(1)}),$$
$$i_0,i_1,\ldots,i_m = 0,1,2,\ldots$$

Здесь $U(m+2,0)$ — $(m+2)$-мерная гиперстолбцовая матрица, образованная с помощью операции агрегатирования [6] спектральных характеристик $U_l(m+1,0)=(u_{li_0i_1\ldots i_m})$ координат $u_l(t,x_{(1)})$ функции $u(t,x_{(1)})$, т. е.

$$U(m+2,0) = \begin{bmatrix} U_1(m+1,0) \\ \vdots \\ U_q(m+1,0) \end{bmatrix}; \quad (13)$$

$$u_{li_0i_1\ldots i_m} = \int\limits_{T\times\mathbb{R}^m} \rho_{(1)}(x_{(1)})e_{(1)}(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)})\times u_l(t,x_{(1)})\,dtdx_{(1)},$$
$$l=1,\ldots,q,\ \ i_0,i_1,\ldots,i_m = 0,1,2,\ldots,$$

следовательно,

$$u_l(t,x_{(1)}) = \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty} u_{li_0i_1\ldots i_m} e_{(1)}(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}),$$
$$l=1,\ldots,q. \quad (14)$$

Видно, что при $m=0$ функции $e_{(1)}(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)})$ совпадают с $q(i_0,t)$, а при $m=n$ — с $e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)$. Отметим также, что определение спектральной характеристики оператора можно применять к широкому классу линейных операторов (операторов умножения, дифференцирования, интегрирования, сдвига, Фредгольма и др., а также для их композиций), а не только к оператору $\mathcal{A}_{u(\cdot)}$, определенному выражением (3). Так, например, будем обозначать через $\mathcal{P}(n+1,n+1)$ спектральную характеристику оператора дифференцирования по переменной t, определенную относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Для нахождения коэффициентов разложения $\phi_{i_0i_1\ldots i_n}$ функции $\phi(t,x)$ следует приравнять спектральные характеристики левой и правой частей уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, получив таким образом систему линейных алгебраических уравнений (при заданном управлении $u(t,x_{(1)})$).

Спектральная характеристика левой части уравнения (2) с учетом условия $\phi(t_0,x)=\phi_0(x)$, свойств спектральных характеристик линейных операторов (в частности, операторов дифференцирования) и введенных обозначений представляется в форме

$$P(n+1,n+1)\Phi(n+1,0) - q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0),$$

где

$$P(n+1,n+1) = \mathcal{P}(n+1,n+1) + \left(q(1,0;t_0)q^{\mathrm{T}}(1,0;t_0)\right)\otimes E(n,n), \quad (15)$$

а $E(n,n)$ — $2n$-мерная единичная матрица.

Спектральная характеристика правой части уравнения (2), согласно свойствам спектральных характеристик функций и линейных операторов, представляется произведением $A(n+1, n+1; U(m+2,0))\Phi(n+1,0)$.

Таким образом, уравнение для нахождения спектральной характеристики $\Phi(n+1,0)$ плотности вероятности $\phi(t,x)$ вектора состояния (спектральный аналог уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова) записывается в виде

$$P(n+1,n+1)\Phi(n+1,0) - q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(n,0) = \\ = A(n+1,n+1;U(m+2,0))\Phi(n+1,0) \quad (16)$$

и называется уравнением обобщенной характеристической функции (фактически это система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения $\phi_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ функции $\phi(t,x)$ относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$, записанная в матричной форме).

Найденная из уравнения (16) спектральная характеристика

$$\Phi(n+1,0) = (P(n+1,n+1) - \\ - A(n+1,n+1;U(m+2,0)))^{-1} \times \\ \times (q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(n,0)) \quad (17)$$

определяет решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова и, следовательно, решение задачи анализа стохастической системы (1) в спектральной форме математического описания [6, 7]. Это решение выражается формулой (10).

Спектральную характеристику $A(n+1,n+1; U(m+2,0))$ оператора $\mathcal{A}_{u(\cdot)}$ не обязательно находить по определению (12). Для этого можно использовать свойство линейности спектральных характеристик функций и свойство спектральных характеристик композиции линейных операторов. Введем новые обозначения: $F_i(n+1,n+1; U(m+2,0))$ и $G_{ij}(n+1,n+1;U(m+2,0))$ — спектральные характеристики операторов умножения на функции $f_i(t,x,u(t,x_{(1)}))$ и $g_{ij}(t,x,u(t,x_{(1)}))$ соответственно (здесь, как и в случае со спектральной характеристикой $A(n+1,n+1; U(m+2,0))$, в обозначениях отражен факт зависимости коэффициентов уравнения (1) от $u(t,x_{(1)})$ и, следовательно, зависимости соответствующих спектральных характеристик операторов умножения от спектральных характеристик координат функции $u(t,x_{(1)})$). Далее, $\mathcal{P}_i(n+1,n+1)$ и $\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)$ — спектральные характеристики операторов дифференцирования первого порядка по координатам x_i и спектральные характеристики операторов дифференцирования второго порядка по координатам x_i, x_j соответственно, $i,j = 1,\ldots,n$. Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. Тогда [6, 7]

$$A(n+1,n+1;U(m+2,0)) = \\ = -\sum_{i=1}^{n} \mathcal{P}_i(n+1,n+1) F_i(n+1,n+1;U(m+2,0)) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1) \times \\ \times G_{ij}(n+1,n+1;U(m+2,0)) \,. \quad (18)$$

Несмотря на то что подобное представление достаточно громоздко, его использование обладает преимуществами, поскольку для операторов дифференцирования и операторов умножения на некоторые элементарные функции получены аналитические выражения для вычисления их спектральных характеристик относительно ряда базисных систем [4, 6, 7, 15–17]: полиномов Лежандра, тригонометрических функций, функций Уолша, функций Хаара, полиномов и функций Лагерра, полиномов и функций Эрмита и др.

Далее получим спектральный аналог уравнения для нахождения вспомогательной функции $\psi(t,x)$. Как и в случае уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, чтобы найти коэффициенты разложения $\psi_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ функции $\psi(t,x)$, следует приравнять спектральные характеристики левой и правой частей уравнения:

$$\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} = -\mathcal{A}^*_{u(\cdot)}\psi(t,x) + f_0(t,x,u(t,x_{(1)}))\,. \quad (19)$$

Спектральная характеристика левой части этого уравнения с учетом условия $\psi(t_1,x) = -F(x)$ записывается в виде:

$$-P^{\mathrm{T}}(n+1,n+1)\Psi(n+1,0) - q(1,0;t_1) \otimes F(n,0)\,,$$

так как

$$\mathcal{P}(n+1,n+1) = -\mathcal{P}^{\mathrm{T}}(n+1,n+1) + (q(1,0;t_1) \times \\ \times q^{\mathrm{T}}(1,0;t_1) - q(1,0;t_0)q^{\mathrm{T}}(1,0;t_0)\big) \otimes E(n,n) = \\ = -P^{\mathrm{T}}(n+1,n+1) + \\ + \big(q(1,0;t_1)q^{\mathrm{T}}(1,0;t_1)\big) \otimes E(n,n)\,,$$

а спектральная характеристика правой части уравнения (19), согласно свойствам спектральных характеристик функций и линейных операторов, представляется выражением

$$-A^*(n+1,n+1;U(m+2,0))\Psi(n+1,0) + \\ + F_0(n+1,0;U(m+2,0))\,,$$

в котором $A^*(n+1,n+1;U(m+2,0))$ — спектральная характеристика сопряженного оператора $\mathcal{A}^*_{u(\cdot)}$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$; $F_0(n+1,0;U(m+2,0))$ — спектральная характеристика функции $f_0(t,x,u(t,x_{(1)}))$, определенная относительно той же базисной системы. Эти спектральные характеристики зависят от коэффициентов разложения координат функции $u(t,x_{(1)})$ по функциям базисной системы $\{e_{(1)}(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)})\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}$.

Спектральная характеристика $A^*(n+1,n+1;U(m+2,0))$ сопряженного оператора $\mathcal{A}^*_{u(\cdot)}$ выражается через введенные ранее спектральные характеристики операторов дифференцирования и умножения следующим образом:

$$A^*(n+1,n+1;U(m+2,0)) = \\ = \sum_{i=1}^{n} F_i(n+1,n+1;U(m+2,0)) \times \\ \times \mathcal{P}_i(n+1,n+1) + \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} G_{ij}(n+1,n+1;U(m+2,0)) \times \\ \times \mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)\,. \quad (20)$$

Таким образом, уравнение, которому удовлетворяет спектральная характеристика $\Psi(n+1,0)$ вспомогательной функции $\psi(t,x)$ (при заданном управлении $u(t,x_{(1)})$ это система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения $\psi_{i_0i_1\ldots i_n}$ функции $\psi(t,x)$ относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, записанная в матричной форме), имеет вид:

$$P^{\mathrm{T}}(n+1,n+1)\Psi(n+1,0)+q(1,0;t_1)\otimes F(n,0) = \\ = A^*(n+1,n+1;U(m+2,0))\Psi(n+1,0) - \\ - F_0(n+1,0;U(m+2,0))\,.$$

Далее, учитывая полученные выше результаты, запишем спектральные аналоги уравнений (5):

$$P(n+1,n+1)\Phi^*(n+1,0)-q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0) = \\ = A(n+1,n+1;U^*(m+2,0))\Phi^*(n+1,0)\,, \quad (21)$$

$$P^{\mathrm{T}}(n+1,n+1)\Psi(n+1,0)+q(1,0;t_1)\otimes F(n,0) = \\ = A^*(n+1,n+1;U^*(m+2,0))\Psi(n+1,0) - \\ - F_0(n+1,0;U^*(m+2,0))\,. \quad (22)$$

Они связаны между собой через матрицу $U^*(m+2,0)$, образованную спектральными характеристиками $U_l^*(m+1,0)$ координат $u_l^*(t,x_{(1)})$ функции $u^*(t,x_{(1)})$ (см. (13)), которые, в свою очередь, выражаются через спектральные характеристики $\Phi^*(n+1,0)$ и $\Psi(n+1,0)$, поскольку $u^*(t,x_{(1)})$ выражается через $\phi^*(t,x)$ и $\psi(t,x)$ (см. (7) и (8)):

$$U^*(m+2,0) = \\ = U^*(m+2,0;\Phi^*(n+1,0),\Psi(n+1,0))\,. \quad (23)$$

В результате получается замкнутая система в общем случае нелинейных уравнений (21)–(23), которую необходимо решить для нахождения оптимальной или «подозрительной на оптимальность» пары $d_m^* = (\phi^*(t,x),u^*(t,x_{(1)}))$, используя (10) и (14).

Следует отметить, что при наличии информации о всех координатах вектора состояния, т. е. при $m=n$, управление $u^*(t,x_{(1)})$ выражается только через $\psi(t,x)$, поэтому

$$U^*(n+2,0) = U^*(n+2,0;\Psi(n+1,0))$$

и уравнение (21) можно решать после решения (22), а не совместно с (22) (см. (17)).

Указать правило, согласно которому вычисляются спектральные характеристики

$$F_i(n+1,n+1;U^*(m+2,0))\,; \\ G_{ij}(n+1,n+1;U^*(m+2,0))$$

и, следовательно,

$$A(n+1,n+1;U^*(m+2,0))\,; \\ A^*(n+1,n+1;U^*(m+2,0))\,,$$

а также $F_0(n+1,0;U^*(m+2,0))$ в зависимости от $U^*(m+2,0)$, в общем случае не представляется возможным. Такое же замечание справедливо и для зависимости $U^*(m+2,0)$ от спектральных характеристик $\Phi^*(n+1,0)$ и $\Psi(n+1,0)$. Необходимые соотношения формируются для каждой конкретной задачи синтеза оптимальных стохастических систем управления, они могут быть как линейными, так и нелинейными (например, с использованием спектральных характеристик множительного звена [4, 6]). Кроме того, для записи подобных соотношений используются, как правило, спектральные характеристики линейных функционалов [6, 18].

Основной сложностью при решении задачи синтеза оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом является то, что все входящие в соотношения (21)–(23) матрицы — это матрицы с бесконечным числом элементов, поэтому при расчетах, как правило, эти матрицы усекаются. При этом решения (10), (11) уравнений (5) следует искать в виде частичных сумм

$$\phi^*(t,x) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{L_n-1}\phi^*_{i_0 i_1\ldots i_n}\times \\ \times e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\,, \quad (24)$$

$$\psi(t,x) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\cdots\sum_{i_n=0}^{L_n-1}\psi_{i_0 i_1\ldots i_n}\times \\ \times e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\,, \quad (25)$$

где заданные числа L_0, L_1, ..., L_n называются порядками усечения спектральных характеристик, а $\phi^*_{i_0 i_1\ldots i_n}$ и $\psi_{i_0 i_1\ldots i_n}$ — элементы усеченных спектральных характеристик $\Phi^*(n+1,0)$ и $\Psi(n+1,0)$. Оптимальное управление в этом случае задается соотношением:

$$u_l^*(t,x_{(1)}) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\cdots\sum_{i_m=0}^{L_m-1}u^*_{l i_0 i_1\ldots i_m}\times \\ \times e_{(1)}(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)})\,, \\ l=1,\ldots,q\,, \quad (26)$$

где $u^*_{l i_0 i_1\ldots i_m}$ — элементы усеченных спектральных характеристик $U_l^*(m+1,0)$, полученных из $U^*(m+2,0)$ в результате декомпозиции [6] (фактически в результате выделения подблоков матрицы). Выбор порядков усечения, а также выбор базисной системы определяют точность приближенного решения задачи синтеза оптимальных стохастических систем управления.

Для решения системы уравнений (21)–(23) представляется эффективным перейти к эквивалентной задаче безусловной оптимизации, а именно минимизировать нормы разностей левых и правых частей соотношений (21), (22) с учетом зависимости (23), используя для этого методы нулевого порядка [9] и метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума [10].

Не приводя подробного вывода, запишем соотношение для подсчета минимального значения функционала (4):

$$J(d_m^*) = -\left(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\right)^{\mathrm{T}}\times \\ \times\left(E(1,1)\otimes R^{-1}(n,n)\right)\Psi(n+1,0)\,, \quad (27)$$

в котором $R(n,n)$ — спектральная характеристика оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{R}^n;\rho(x))$. Это выражение получено с использованием свойств спектральных характеристик линейных функционалов и начальных значений функций времени [6, 18] при применении спектрального преобразования к правой части (9).

4 Методическое обеспечение приближенного решения задачи синтеза оптимальных нелинейных стохастических систем управления

Приведем алгоритм приближенного решения задачи синтеза.

1. Выбрать базисные системы

$$\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}\,; \\ \{p_{(1)}(i_1,\ldots,i_m,x_{(1)})\}_{i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}\,; \\ \{p_{(2)}(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)})\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

пространств

$$L_2(T);\ L_2(\mathbb{R}^m;\ \rho_{(1)}(x_{(1)}));\ \ L_2(\mathbb{R}^{n-m};\ \rho_{(2)}(x_{(2)}))$$

соответственно. Сформировать базисную систему

$$\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

пространства $L_2(\mathbb{R}^n;\rho(x)=\rho_{(1)}(x_{(1)})\rho_{(2)}(x_{(2)}))$:

$$p(i_1,\ldots,i_n,x) = p_{(1)}(i_1,\ldots,i_m,x_{(1)})\times \\ \times p_{(2)}(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}),\ \ i_1,\ldots,i_n=0,1,2,\ldots,$$

базисную систему

$$\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$$

пространства $L_2(T\times\mathbb{R}^n;\rho(x))$:

$$e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x) = q(i_0,t)p(i_1,\ldots,i_n,x), \\ i_0,i_1,\ldots,i_n=0,1,2,\ldots,$$

и базисную систему

$$\{e_{(1)}(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)})\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}$$

пространства $L_2(T\times\mathbb{R}^m;\rho_{(1)}(x_{(1)}))$:

$$e_{(1)}(i_0,i_1,\ldots,i_m,t,x_{(1)}) = \\ = q(i_0,t)p_{(1)}(i_1,\ldots,i_m,x_{(1)}), \\ i_0,i_1,\ldots,i_m=0,1,2,\ldots$$

Выбрать порядки усечения L_0, L_1, ..., L_n спектральных характеристик.

2. Вычислить матрицы-столбцы $q(1,0;t_0)$ и $q(1,0;t_1)$ значений функций базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точках t_0 и t_1 соответственно.

3. Вычислить спектральную характеристику $\Phi_0(n,0)$ плотности вероятности $\phi_0(x)$ начального состояния X_0 и спектральную характеристику $F(n,0)$ функции $F(x)$.

4. Вычислить спектральные характеристики $\mathcal{P}(n+1,n+1)$ и $\mathcal{P}_i(n+1,n+1)$ операторов дифференцирования первого порядка по переменным t и x_i соответственно, $i=1,\ldots,n$; спектральные характеристики $\mathcal{P}_{ij}(n+1,n+1)$ операторов дифференцирования второго порядка по переменным x_i и x_j, $i,j=1,\ldots,n$. Найти матрицу $P(n+1,n+1)$, используя (15).

5. Представить спектральные характеристики

$$F_i(n+1,n+1;U(m+2,0))\,;$$
$$G_{ij}(n+1,n+1;U(m+2,0))$$

операторов умножения на функции $f_i(t,x,u(t,x_{(1)}))$ и $g_{ij}(t,x,u(t,x_{(1)}))$ соответственно как функции матрицы $U(m+2,0)$, $i,j=1,\ldots,n$.

6. Найти спектральные характеристики $A(n+1,n+1;U(m+2,0))$ и $A^*(n+1,n+1;U(m+2,0))$ по формулам (18) и (20) соответственно.

7. Представить спектральную характеристику $F_0(n+1,0;U(m+2,0))$ функции $f_0(t,x,u(t,x_{(1)}))$ как функцию матрицы $U(m+2,0)$.

8. Представить матрицу $U(m+2,0)$ (спектральные характеристики $U_l^*(m+1,0)$ координат $u_l^*(t,x_{(1)})$, $l=1,\ldots,q$, оптимального управления $u^*(t,x_{(1)})$) как функцию спектральных характеристик $\Phi^*(n+1,0)$ и $\Psi(n+1,0)$ (при $m=n$ представить $U(n+2,0)$ как функцию спектральной характеристики $\Psi(n+1,0)$).

9. Найти спектральные характеристики $\Phi^*(n+1,0)$ и $\Psi(n+1,0)$, а также спектральные характеристики $U_l^*(m+1,0)$, $l=1,\ldots,q$, образующие матрицу $U^*(m+2,0)$, решая уравнения (21)–(23) (или эквивалентную задачу безусловной оптимизации).

10. Применяя формулы обращения (24)–(26), найти плотность вероятности $\phi^*(t,x)$ и координаты $u_l^*(t,x_{(1)})$ оптимального управления $u^*(t,x_{(1)})$, $l=1,\ldots,q$, и, следовательно, получить пару $d_m^*=(\phi^*(t,x),u^*(t,x_{(1)}))$.

11. Подсчитать минимальное значение функционала качества управления, используя (27).

Пример. Найти оптимальное управление для двумерной системы ($n=2$), описываемой уравнениями:

$$dX_1(t)=(X_2(t)+u(t))\,dt+dW(t)\,,\ \ X_1(0)=X_{10}\,;$$
$$dX_2(t)=0\,;\ \ X_2(0)=X_{20}\,,$$

где $T=[0,1]$, X_{10} и X_{20} — независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение. Ограничения на управление отсутствуют ($u\in U=\mathbb{R}$), $W(t)$ — одномерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $X_0=[X_{10}\ \ X_{20}]^{\mathrm{T}}$.

Функционал (4) задан следующим образом:

$$J(d_m)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\int\limits_{\mathbb{R}^2}u^2(t,x_{(1)})\phi(t,x)\,dtdx+{}$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^2}x_1^2\phi(1,x)dx\,.$$

Требуется найти оптимальное программное управление $u^*(t)$, оптимальное управление с неполной обратной связью $u^*(t,x_1)$, оптимальное управление с полной обратной связью $u^*(t,x_1,x_2)$ ($m=0,1,2$) и соответствующие значения функционалов.

Выберем в качестве базисной системы пространства $L_2(T)$ полиномы Лежандра $\{P(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, определенные на отрезке T, а для пространств $L_2(\mathbb{R};\rho_1(x_1))$ и $L_2(\mathbb{R};\rho_2(x_2))$ — полиномы Эрмита $\{G(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{G(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ [4, 6, 7, 14, 15, 17], т. е.

$$p(i_1,i_2,x_1,x_2)=G(i_1,x_1)G(i_2,x_2)\,,$$
$$i_1,i_2=0,1,2,\ldots;$$
$$e(i_0,i_1,i_2,t,x_1,x_2)=P(i_0,t)G(i_1,x_1)G(i_2,x_2)\,,$$
$$i_0,i_1,i_2=0,1,2,\ldots$$

Базисная система $\{e_{(1)}(i_0,\ldots,t,x_{(1)})\}_{i_0,\ldots=0}^{\infty}$ для представления оптимального управления зависит от степени информированности, а именно при $m=0$ она совпадает с $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, т. е. с $\{P(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$; при $m=1$ определяется выражением

$$e_{(1)}(i_0,i_1,t,x_1)=P(i_0,t)G(i_1,x_1)\,,$$
$$i_0,i_1=0,1,2,\ldots;$$

при $m=2$ совпадает с системой

$$\{e(i_0,i_1,i_2,t,x_1,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}\,.$$

Порядки усечения спектральных характеристик выбраны следующим образом: $L_0=6$, $L_1=L_2=3$.

Небольшой объем статьи не позволяет привести соотношения для определения оптимального управления в этой задаче, поэтому ограничимся результатами. При решении использовался метод сведения к эквивалентной задаче безусловной минимизации с последующим применением методов конфигураций (Хука–Дживса) [9] и имитации отжига [10]. Все численные расчеты были выполнены с помощью специализированного программного обеспечения *Spectrum* (см. приложение 2 и [19]),

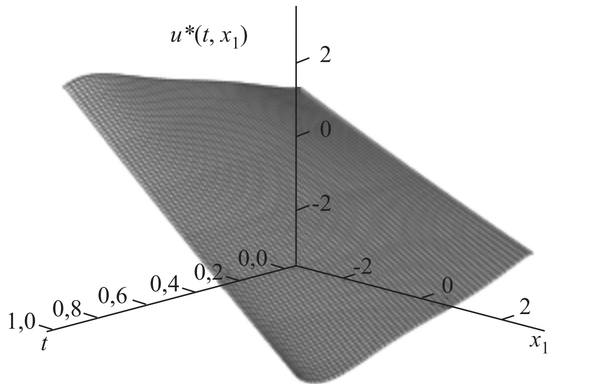

Рис. 2 График оптимального управления с неполной обратной связью

предназначенного для решения задач анализа и синтеза систем управления различных классов с использованием спектральной формы математического описания.

В результате вычислений при отсутствии информации о координатах вектора состояния получено оптимальное программное управление $u^*(t) \approx 0$, минимальное значение функционала качества управления $J(d_0^*) \approx 1{,}5$. При управлении по неполному вектору состояния получено оптимальное управление $u^*(t, x_1)$ (рис. 2), $J(d_1^*) \approx 0{,}901$. Графики оптимального управления с полной обратной связью (сечения при $x_2 = 0$ и $x_1 = 0$) изображены на рис. 3, $J(d_2^*) \approx 0{,}846$.

Таким образом, справедливо неравенство $J(d_2^*) < J(d_1^*) < J(d_0^*)$, т. е. оптимальное управление с полной обратной связью обеспечивает наилучшее качество, а оптимальное программное управление — наихудшее.

Эти результаты хорошо согласуются с расчетами, приведенными в [2]: для значений $J(d_0^*)$ и $J(d_2^*)$ погрешность не превосходит величины $5 \cdot 10^{-4}$. Для значения $J(d_1^*)$ погрешность составила менее $3{,}0 \cdot 10^{-3}$, однако приведенное в [2] значение $J(d_1^*)$ тоже получено приближенно с некоторой погрешностью.

Были проведены дополнительные расчеты с использованием базисной системы обобщенных функций Эрмита вместо полиномов Эрмита [17]. В этом случае погрешность расчета критерия и оптимального управления была больше, что обусловлено свойствами обобщенных функций Эрмита, для ее уменьшения требуется увеличивать порядки усечения спектральных характеристик (расчеты проводились при $L_0 = 6$, $L_1 = L_2 = 3$ и $L_1 = L_2 = 5$).

5 Заключение

Основным результатом является методическое обеспечение синтеза оптимального в среднем управления нелинейными стохастическими системами, основанное на спектральной форме математического описания. Найдены спектральные аналоги соотношений для определения оптимального управления и вычисления минимального значения функционала. Практическая применимость разработанного методического обеспечения базируется на развитом алгоритмическом и программном обеспечении спектрального метода [4, 6, 7, 15–19]. Эффективность предложенного подхода продемонстрирована на решении модельной задачи синтеза при различной информированности о векторе состояния.

Спектральный метод синтеза может быть применен и для более сложных нелинейных стохасти-

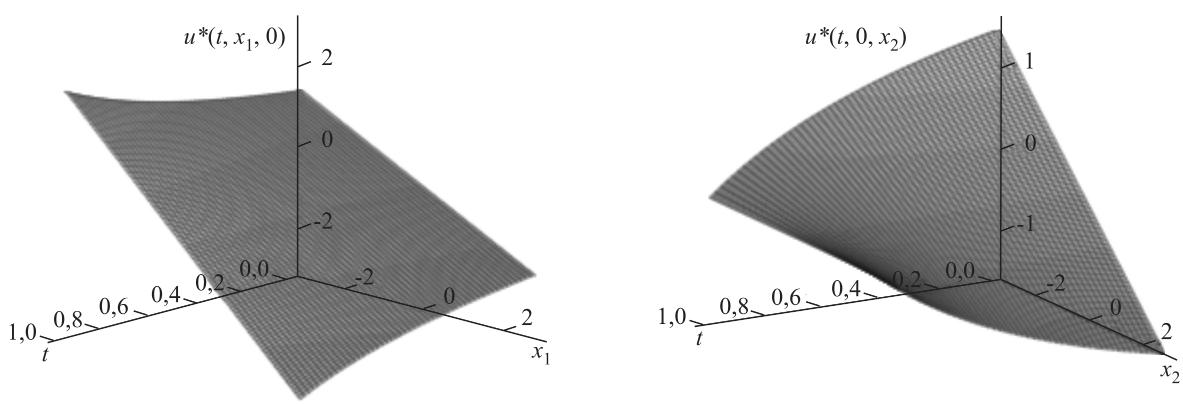

Рис. 3 Графики сечений оптимального управления с полной обратной связью

ческих систем: со случайным периодом квантования и со случайной структурой [6, 20].

Приложение 1

Пусть m_1 и m_2 — заданные натуральные числа, $M = m_1 + m_2$. Многомерной матрицей $A(m_1, m_2)$ размерности M называется упорядоченная совокупность чисел $a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}}$, $i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots$ Первые m_1 индексов называются строчными $(i_1, i_2, \ldots, i_{m_1})$, а остальные — столбцовыми $(j_1, j_2, \ldots, j_{m_2})$. Разделение множества индексов на строчные и столбцовые позволяет задать структуру многомерной матрицы: обычно выделяют гиперквадратные матрицы, у которых число строчных и столбцовых индексов совпадает, гиперстолбцовые матрицы, все индексы которых строчные, и гиперстрочные матрицы, все индексы которых столбцовые.

Матрицы $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ и $B(m_1, m_2) = (b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ называются равными, если соответствующие элементы этих матриц равны:

$$a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} = b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}}\,,\quad i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots$$

Суммой $A(m_1, m_2) + B(m_1, m_2)$ матриц

$$A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})\,;$$
$$B(m_1, m_2) = (b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$$

называется матрица

$$C(m_1, m_2) = (c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})\,,$$

если

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} + b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}}\,,\quad i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots$$

Матрица $B(m_1, m_2) = (b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ называется произведением матрицы $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ на число α ($B(m_1, m_2) = \alpha A(m_1, m_2)$), если

$$b_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} = \alpha a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}}\,,\quad i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots$$

Произведением $A(m_1, m_3) B(m_3, m_2)$ матриц $A(m_1, m_3) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} k_1 k_2 \ldots k_{m_3}})$ и $B(m_3, m_2) = (b_{k_1 k_2 \ldots k_{m_3} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ называется матрица $C(m_1, m_2) = (c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$, если

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} = \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_{m_3} = 0}^{\infty} a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} k_1 k_2 \ldots k_{m_3}} b_{k_1 k_2 \ldots k_{m_3} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} < \infty,\quad i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{m_2} = 0, 1, 2, \ldots$$

Тензорным произведением $A(m_1, m_2) \otimes B(m_3, m_4)$ матриц $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ и $B(m_3, m_4) = (b_{k_1 k_2 \ldots k_{m_3} l_1 l_2 \ldots l_{m_4}})$ называется матрица

$$C(m_1 + m_3, m_2 + m_4) = (c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} k_1 k_2 \ldots k_{m_3} j_1 j_2 \ldots j_{m_2} l_1 l_2 \ldots l_{m_4}})\,,$$

если

$$c_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} k_1 k_2 \ldots k_{m_3} j_1 j_2 \ldots j_{m_2} l_1 l_2 \ldots l_{m_4}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}} b_{k_1 k_2 \ldots k_{m_3} l_1 l_2 \ldots l_{m_4}}\,,\quad i_1, i_2, \ldots, i_{m_1}, k_1, k_2, \ldots, k_{m_3},\ j_1, j_2, \ldots, j_{m_2}, l_1, l_2, \ldots, l_{m_4} = 0, 1, 2, \ldots$$

Для матрицы $A(m_1, m_2) = (a_{i_1 i_2 \ldots i_{m_1} j_1 j_2 \ldots j_{m_2}})$ транспонированной матрицей называется матрица $A^{\mathrm{T}}(m_2, m_1) = (a_{j_1 j_2 \ldots j_{m_2} i_1 i_2 \ldots i_{m_1}})$.

Гиперквадратная матрица $A^{-1}(m, m)$ называется обратной для гиперквадратной матрицы $A(m, m)$, если справедливо равенство:

$$A^{-1}(m, m) A(m, m) = A(m, m) A^{-1}(m, m) = E(m, m)\,, \quad (28)$$

где $E(m, m)$ — единичная матрица, т. е. такая гиперквадратная матрица, что

$$B(m, m) E(m, m) = E(m, m) B(m, m) = B(m, m)$$

для любой гиперквадратной матрицы $B(m, m)$.

Обращение многомерных матриц, как правило, сводится к решению системы линейных уравнений относительно элементов матрицы $A^{-1}(m, m)$ (выражение (28) — матричная запись этой системы).

Для многомерных матриц с конечным числом элементов, т. е. при условии, что значения индексов ограничены, определены такие же понятия.

Приложение 2

Программное обеспечение *Spectrum* предназначено для решения различных задач теории управления спектральным методом [1, 4, 6, 7, 15], позволяющим свести исходную задачу, математическая модель которой содержит дифференциальные, интегро-дифференциальные, интегральные и разностные уравнения, в том числе с отклоняющимися аргументами, к системе уравнений для коэффициентов разложения искомой характеристики по функциям некоторой базисной системы. Ядро *Spectrum* образуют модуль спектральных преобразований и матричный калькулятор.

Модуль спектральных преобразований позволяет:

– рассчитывать спектральные характеристики непрерывных и дискретных типовых воздействий (линейной, показательной и тригонометрических функций, единичной ступенчатой функции, импульсной δ-функции и др.), плотностей вероятности типовых распределений;

– рассчитывать спектральные характеристики функций многих переменных, задаваемых как суперпозиции элементарных функций;
– рассчитывать первую и вторую спектральные плотности непрерывных и дискретных типовых случайных воздействий (например, белого шума);
– рассчитывать спектральные характеристики дифференциальных и разностных операторов, операторов интегрирования и суммирования, операторов умножения и сдвига (опережения и запаздывания), спектральные характеристики множительного звена;
– рассчитывать спектральные характеристики непрерывно-дискретных звеньев: дискретного элемента с бесконечно малым временем замыкания (звено с непрерывным входом и дискретным выходом), экстраполятора нулевого порядка (дискретный вход, непрерывный выход);
– вычислять значения базисных функций;
– проводить обратное спектральное преобразование спектральных характеристик.

При решении задач спектральным методом можно использовать следующие системы ортонормированных функций: полиномы Лежандра и Чебышева, тригонометрические функции, функции Уолша и Хаара, полиномы и функции Лагерра, полиномы и функции Эрмита, обобщенные функции Эрмита.

Для решения задач требуется задать алгоритм вычислений в спектральной области в виде последовательности формул, для ряда задач возможно автоматизированное составление такой последовательности с помощью диалогового формирователя. При его применении пользователю нужно указать необходимые параметры, такие как порядок системы, коэффициенты уравнения, начальные и краевые условия и т. п., по этим данным рассчитываются спектральные характеристики и формируется последовательность формул, которая затем обрабатывается матричным калькулятором.

При использовании диалогового формирователя можно создавать проекты для следующих классов задач теории управления: анализ линейных одномерных систем управления при детерминированных и случайных воздействиях [1, 4, 15]; анализ многомерных стохастических систем [6, 7]; анализ многомерных непрерывно-дискретных стохастических систем (многошаговых стохастических систем); анализ многомерных стохастических систем со случайной структурой [6]. Для других задач, при решении которых может быть использован спектральный метод, алгоритм вычислений можно ввести с помощью редактора формул.

Матричный калькулятор поддерживает различные операции алгебры многомерных матриц: сложение, вычитание, умножение на действительное число, умножение, тензорное умножение, транспонирование, нахождение обратной или псевдообратной матрицы, возведение в степень с натуральным показателем. Возможно вычисление нормы матрицы и построение сечений. Предусмотрена возможность агрегатирования и декомпозиции многомерных матриц.

При решении задач синтеза оптимального управления (или любых других задач, соотношения для решения которых в спектральной области представляют собой систему нелинейных уравнений) могут быть использованы методы безусловной оптимизации: метод конфигураций, адаптивный случайный поиск, метод наилучшей пробы, метод сопряженных направлений, метод деформируемого многогранника [9], метод имитации отжига и метод частиц в стае [10].

Для семантического контроля корректности производимых матричным калькулятором операций введена классификация матриц и векторов (спектральные характеристики функций, спектральные характеристики линейных операторов, матрицы-столбцы значений базисных функций и т. д.), что позволяет избежать смысловых ошибок в ходе решения задач. Например, результат умножения спектральных характеристик линейных операторов будет отнесен к этому же классу, напротив, сложение спектральной характеристики линейного оператора и матрицы значений базисных функций будет воспринято как семантическая ошибка.

Литература

1. *Пантелеев А. В., Бортаковский А. С.* Теория управления в примерах и задачах. —М.: Высшая школа, 2003.
2. *Пантелеев А. В.* Оптимальные нелинейные системы управления: синтез при неполной информации. — М.: Вузовская книга, 2008.
3. *Пугачев В. С., Синицын И. Н.* Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2004.
4. *Солодовников В. В., Семенов В. В.* Спектральная теория нестационарных систем управления. — М.: Наука, 1974.
5. *Семенов В. В.* Уравнение обобщенной характеристической функции вектора состояния систем автоматического управления // Аналитические методы синтеза регуляторов. Вып. 2. — Саратов: СПИ, 1977. С. 3–36.
6. *Пантелеев А. В., Рыбаков К. А., Сотскова И. Л.* Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2006.
7. *Пантелеев А. В., Рыбаков К. А.* Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. — М.: МАИ-ПРИНТ, 2010.
8. *Семенов В. В.* Синтез алгоритмов управления нелинейными системами при случайных воздействиях с ограниченным составом точных измерений // Аналитические методы синтеза регуляторов. Вып. 3. — Саратов: СПИ, 1978. С. 3–20.
9. *Пантелеев А. В., Летова Т. А.* Методы оптимизации в примерах и задачах. — М.: Высшая школа, 2008.
10. *Пантелеев А. В.* Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. — М.: МАИ-ПРИНТ, 2009.

11. *Анулова С. В., Веретенников А. Ю., Крылов Н. В., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Стохастическое исчисление // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. Т. 45. — М.: ВИНИТИ, 1989.
12. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. — М.: Мир, 1978.
13. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1966.
14. *Пугачев В. С.* Лекции по функциональному анализу. — М.: МАИ, 1996.
15. *Семенов В. В., Рыбин В. В.* Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. — М.: МАИ, 1984.
16. *Рыбин В. В.* Описание сигналов и линейных нестационарных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах. — М.: МАИ, 2003.
17. *Романов В. А., Рыбаков К. А.* Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Труды МАИ, 2010. № 39 (http://www.mai.ru).
18. *Рыбаков К. А.* Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Труды МАИ, 2005. № 18 (http://www.mai.ru).
19. *Рыбаков К. А.* Программное обеспечение спектрального метода Spectrum // Труды МАИ, 2003. № 14 (http://www.mai.ru).
20. *Казаков И. Е., Артемьев В. М., Бухалев В. А.* Анализ систем случайной структуры. — М.: Физматлит, 1993.