В.А. Романов, К.А. Рыбаков

АНАЛИЗ ЛИНЕЙНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ В БАЗИСЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭРМИТА

Введение

Для представления функций рядами по ортогональным функциям на всем множестве действительных чисел широкое распространение получили полиномы и функции Эрмита [2, 3]. Функции Эрмита удобны для представления квадратично интегрируемых функций $f(x)$, хотя при некоторых допущениях, возможно представление функций, которые этому условию не удовлетворяют; допустимо представление и обобщенных функций [8]. В случае, когда $f(x) \not\to 0$ при $x \to \infty$, обычно применяются полиномы Эрмита. Существуют также базисные системы, порожденные вейвлетами, но их использование осложнено отсутствием явных формул, задающих базисные функции, за редким исключением, например, системы функций, порожденных вейвлетом Хаара [7].

В данной работе предлагается рассмотреть систему обобщенных функций Эрмита, которые ортогональны с весовой функцией, аналогичной по структуре весовой функции полиномов Эрмита, при этом они являются квадратично интегрируемыми на всем множестве действительных чисел. Стоит отметить, что полиномы Эрмита и функции Эрмита являются частным случаем рассматриваемых обобщенных функций Эрмита.

Эта работа важна в плане развития спектральной формы математического описания систем управления [3, 7, 8]. Несмотря на то, что в первую очередь система обобщенных функций Эрмита предназначена для решения задач анализа и синтеза нелинейных стохастических систем управления, здесь затрагивается более простая задача, а именно задача анализа линейных детерминированных систем управления.

В работе дано определение обобщенных функций Эрмита и получены формулы для расчета спектральных характеристик операторов умножения, дифференцирования и интегрирования (двумерных нестационарных передаточных функций элементарных звеньев систем управления: усилительного, дифференцирующего и интегрирующего). Приведен пример применения спектральной формы математического описания с использованием обобщенных функций Эрмита к задаче анализа линейной детерминированной системы управления.

Обобщенные функции Эрмита

Как и в работе [5], будем рассматривать полиномы Эрмита второго рода [2], задаваемые выражением

$$G_j^{m,D}(x) = (-1)^j D^j \, \mathrm{e}^{\frac{(x-m)^2}{2D}} \frac{d^j}{dx^j}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2D}}\right), \tag{1}$$

которые ортогональны с весом $\omega(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi D}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2D}}$ на всей числовой оси:

$$\left(G_i^{m,D}(x),G_j^{m,D}(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right)}=\begin{cases} j!D^j, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases} \tag{2}$$

где m и D – числовые параметры ($D>0$), $\left(\,\cdot\,,\,\cdot\,\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right)}$ – скалярное произведение в пространстве $L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right)$:

$$\left(f(x),h(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega(x)f(x)h(x)dx,\quad f(x),h(x)\in L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right). \tag{3}$$

Функции Эрмита определяются следующим образом:

$$\Phi_j^{m,D}(x)=\omega^{\frac{1}{2}}(x)G_j^{m,D}(x),\quad j=0,1,2,... \tag{4}$$

Они ортогональны на всей числовой оси с единичным весом, так как

$$\left(\Phi_i^{m,D}(x),\Phi_j^{m,D}(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty)\right)}=\left(G_i^{m,D}(x),G_j^{m,D}(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right)}, \tag{5}$$

где $\left(\,\cdot\,,\,\cdot\,\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty)\right)}$ – скалярное произведение в пространстве $L_2\left((-\infty,+\infty)\right)$:

$$\left(f(x),h(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty)\right)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)h(x)dx,\quad f(x),h(x)\in L_2\left((-\infty,+\infty)\right). \tag{6}$$

Для представления функций рядами, как правило, удобнее использовать ортонормированные системы, поэтому обозначим через $g_j^{m,D}(x)$ нормированные полиномы Эрмита, а через $\varphi_j^{m,D}(x)$ – нормированные функции Эрмита [5]:

$$g_j^{m,D}(x)=\frac{G_j^{m,D}(x)}{\sqrt{h_j}},\quad \varphi_j^{m,D}(x)=\frac{\Phi_j^{m,D}(x)}{\sqrt{h_j}},\quad j=0,1,2,..., \tag{7}$$

где $h_j=j!D^j$.

Далее рассмотрим функции

$$E_j^{m,D,\alpha}(x)=\omega^{\frac{1-\alpha}{2}}(x)G_j^{m,D}(x),\quad j=0,1,2,..., \tag{8}$$

где числовой параметр α может принимать любые значения из отрезка $[0,1]$.

Нетрудно видеть, что при $\alpha=1$ функции $E_j^{m,D,\alpha}(x)$ совпадают с полиномами Эрмита $G_j^{m,D}(x)$, а при $\alpha=0$ – с функциями Эрмита $\Phi_j^{m,D}(x)$. Функции $E_j^{m,D,\alpha}(x)$ будем называть *обобщенными функциями Эрмита*. Они ортогональны на всей числовой оси с весом $\omega^\alpha(x)$, при этом

$$\left(E_i^{m,D,\alpha}(x),E_j^{m,D,\alpha}(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^\alpha(x)\right)}=\left(G_i^{m,D}(x),G_j^{m,D}(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right)}. \tag{9}$$

В приведенном соотношении $\left(\,\cdot\,,\,\cdot\,\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^\alpha(x)\right)}$ – скалярное произведение в пространстве $L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^\alpha(x)\right)$:

$$\left(f(x),h(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^{\alpha}(x)\right)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^{\alpha}(x)f(x)h(x)dx,$$
$$f(x),h(x)\in L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^{\alpha}(x)\right). \qquad (10)$$

Функции

$$e_j^{m,D,\alpha}(x)=\frac{E_j^{m,D,\alpha}(x)}{\sqrt{h_j}},\quad j=0,1,2,..., \qquad (11)$$

будем называть *нормированными обобщенными функциями Эрмита* (при $\alpha=1$ они совпадают с нормированными полиномами Эрмита $g_j^{m,D}(x)$, а при $\alpha=0$ – с нормированными функциями Эрмита $\varphi_j^{m,D}(x)$).

Для упрощения обозначений в случае полиномов $G_j^{m,D}(x)$ и $g_j^{m,D}(x)$, а также функций $\Phi_j^{m,D}(x)$ и $\varphi_j^{m,D}(x)$ будем опускать параметры m и D, а для функций $E_j^{m,D,\alpha}(x)$ и $e_j^{m,D,\alpha}(x)$ не будем указывать параметры m, D и α.

Для полиномов Эрмита $G_j(x)$ справедлива рекуррентная формула [2, 5]

$$G_{j+1}(x)=(x-m)G_j(x)-jDG_{j-1}(x),\quad G_0(x)=1,\quad j=0,1,2,..., \qquad (12)$$

а так как обобщенные функции Эрмита $E_j(x)$ (и функции Эрмита $\Phi_j(x)$, которые являются их частным случаем), от полиномов $G_j(x)$ отличаются множителем, не зависящим от номера функции, то аналогичные рекуррентные формулы с точностью до обозначений справедливы и для функций $E_j(x)$ и $\Phi_j(x)$, в частности,

$$E_{j+1}(x)=(x-m)E_j(x)-jDE_{j-1}(x),\quad E_0(x)=\omega^{\frac{1-\alpha}{2}}(x),\quad j=0,1,2,... \qquad (13)$$

Спектральные характеристики линейных операторов

С использованием определения обобщенных функций Эрмита и рекуррентных формул (8) и (13), получены соотношения для вычисления спектральных характеристик линейных операторов: умножения, дифференцирования и интегрирования. Эти соотношения требуются для решения задачи анализа выходных процессов линейных детерминированных нестационарных систем управления (как при детерминированных, так и при случайных воздействиях) с помощью спектральной формы математического описания [1, 7, 8].

Важно отметить, что приведенные далее соотношения могут быть полезными и для более сложных задач: анализа и синтеза нелинейных детерминированных и стохастических систем управления [3, 4, 6].

1. Спектральная характеристика $A=(A_{ij})$ оператора умножения:

$$A_{ij}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^{\alpha}(x)a(x)e_i(x)e_j(x)dx=\frac{\tilde{A}_{ij}}{\sqrt{h_ih_j}},\quad i,j=0,1,2,..., \qquad (14)$$

где

$$\tilde{A}_{ij+1} = \tilde{A}_{i+1j} + iD\tilde{A}_{i-1j} - jD\tilde{A}_{ij-1}, \quad \tilde{A}_{i0} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) a(x) E_i(x) E_0(x) dx, \quad \tilde{A}_{ij} = \tilde{A}_{ji}. \tag{15}$$

2. Спектральная характеристика $\mathcal{P}^n = (\mathcal{P}_{ij}^n)$ оператора дифференцирования порядка n:

$$\mathcal{P}_{ij}^n = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) e_i(x) \frac{d^n e_j(x)}{dx^n} dx = \frac{\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0,1,2,..., \tag{16}$$

где

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n = \begin{cases} \Delta_{ij}, \quad n = 0, \\ j\dfrac{1+\alpha}{2}\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{n-1} - \dfrac{1-\alpha}{2D}\tilde{\mathcal{P}}_{ij+1}^{n-1}, \quad n > 0, \end{cases} \qquad \Delta_{ij} = \begin{cases} h_j, \quad i = j, \\ 0, \quad i \neq j. \end{cases} \tag{17}$$

3. Спектральная характеристика $P^{-n} = (P_{ij}^{-n})$ оператора интегрирования порядка n:

$$P_{ij}^{-n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) e_i(x) \int_0^x \int_0^{\xi_1} ... \int_0^{\xi_{n-1}} e_j(\xi_n) d\xi_n ... d\xi_1 dx = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-n}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0,1,2,..., \tag{18}$$

где

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-n} = \begin{cases} \Delta_{ij}, \quad n = 0, \\ jD\dfrac{1+\alpha}{1-\alpha}\tilde{P}_{ij-1}^{-n} + \dfrac{2D}{1-\alpha}\dfrac{\tilde{X}_i^{n-1}}{(n-1)!}E_j(0) - \dfrac{2D}{1-\alpha}\tilde{P}_{ij}^{n-1}, \quad n > 0, \end{cases} \tag{19}$$

$$\tilde{X}_i^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k m^{n-k} \hat{X}_i^k, \qquad \hat{X}_i^n = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{4\pi D}{1+\alpha}}(2\pi D)^{-\frac{1+\alpha}{4}}, \quad n = 0, \quad i = 0, \\ \hat{X}_{i+1}^{n-1} + iD\hat{X}_{i-1}^{n-1}, \quad n > 0, \\ (i-1)D\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}\hat{X}_{i-2}^n, \quad n = 0, \quad i > 0. \end{cases} \tag{20}$$

При $\alpha = 1$ для расчета элементов спектральных характеристик операторов интегрирования необходимо использовать соотношения, полученные в [5] для полиномов Эрмита.

Применение обобщенных функций Эрмита для анализа линейных детерминированных систем управления

Предположим, что линейная детерминированная система управления описывается укороченным дифференциальным уравнением [1]

$$a_n(x)u^{(n)}(x) + ... + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = f(x). \tag{21}$$

Здесь $f(x)$ – входной сигнал, $u(x)$ – выходной сигнал, $a_n(x)$, ..., $a_1(x)$, $a_0(x)$ – заданные функции, x – независимая переменная (время).

Задача анализа состоит в нахождении выходного сигнала $u(x)$ по уравнению системы, заданным входному сигналу $f(x)$ и начальным условиям

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_0', \quad ..., \quad u^{(n-1)}(0) = u_0^{(n-1)}. \tag{22}$$

Рассмотрим случай нулевых начальных условий: $u_0 = u_0' = \ldots = u_0^{(n-1)} = 0$. Согласно алгоритму анализа систем рассматриваемого класса с использованием спектральной формы математического описания [1, 7, 8], спектральная характеристика U выходного сигнала $u(x)$ определяется выражением

$$U = W \cdot F = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{23}$$

в котором F – спектральная характеристика входного сигнала $f(x)$, а W – двумерная нестационарная передаточная функция линейной системы (21):

$$W = P^{-n}(A_n + \ldots + A_1 P^{-n+1} + A_0 P^{-n})^{-1}, \tag{24}$$

где P^{-1}, ..., P^{-n+1}, P^{-n} – спектральные характеристики операторов интегрирования, а A_n, ..., A_1, A_0 – спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_n(x)$, ..., $a_1(x)$, $a_0(x)$ соответственно. Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно одной и той же базисной системы.

В более общем случае при ненулевых условиях и правой части уравнения (21) вида $b_m(x) f^{(m)}(x) + \ldots + b_1(x) f'(x) + b_0(x) f(x)$, где $b_m(x)$, ..., $b_1(x)$, $b_0(x)$ – заданные функции, алгоритм решения задачи анализа незначительно модифицируется [1]. Кроме того, выражение (24) для матрицы W можно записать с использованием спектральных характеристик операторов дифференцирования $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^2$, ..., $\mathcal{P}^n$.

Выходной сигнал определяется коэффициентами разложения u_j (при усечении спектральных характеристик выходной сигнал определяется приближенно).

Пример. Рассмотрим задачу анализа линейной системы, которая описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$u''(x) + 5u'(x) + x^2 u(x) = f(x) \tag{25}$$

при нулевых начальных условиях и входном сигнале

$$f(x) = (2 + 34x + 56x^2 - 34x^3 + 5x^4)\,\mathrm{e}^{-(x-3)^2}. \tag{26}$$

Спектральная характеристика F входного сигнала имеет вид

$$F = \begin{bmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{27}$$

где

$$f_j = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^{\alpha}(x) e_j(x) f(x) dx, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{28}$$

Двумерная нестационарная передаточная функция линейной системы (25) выражается следующим образом:

$$W = P^{-2}(A_2 + A_1 P^{-1} + A_0 P^{-2})^{-1}, \tag{29}$$

где P^{-1} и P^{-2} – спектральные характеристики операторов интегрирования, а A_2, A_1 и A_0 – спектральные характеристики операторов умножения на функции $a_2(x) = 1$, $a_1(x) = 5$ и $a_0(x) = x^2$ соответственно. Тогда спектральная характеристика U выходного сигнала $u(x)$ определяется формулой (23), а приближенное решение задачи анализа – формулой

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} u_j e_j(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{i=0}^{N-1} W_{ji} f_i \right) e_j(x). \qquad (30)$$

Для численных расчетов положим $m=0$ и $D=\frac{1}{2}$ и найдем функцию $u_N(x)$ при различных N и α. Для сравнения точного решения $u(x) = x^2\, \mathrm{e}^{-(x-3)^2}$ с приближенным $u_N(x)$ найдем погрешность как норму разности $u(x)-u_N(x)$ в пространстве $L_2\big((-\infty,+\infty);\omega^{\alpha}(x)\big)$. Результаты расчетов приведены в таблице 1, эти расчеты показывают, что значение погрешности убывает с ростом порядка усечения N спектральных характеристик (кроме случая $\alpha=1$ и $N=16$).

Таблица 1. Погрешности аппроксимации функции $u(x)$ при различных α и N

	$\alpha=0$	$\alpha=\frac{1}{3}$	$\alpha=\frac{1}{2}$	$\alpha=1$
$N=4$	11.433	1.773	0.801	0.102
$N=8$	4.778	0.214	0.131	0.050
$N=16$	0.679	0.024	0.018	0.051

Список литературы

1. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003.
2. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. – М.: Вузовская книга, 2008.
3. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006.
4. Рыбаков К.А. Спектральный метод синтеза оптимальных систем управления со случайной структурой // Математическое моделирование и краевые задачи. II Всероссийская научная конференция, Самара. 2005: Тез. докл. Ч. 2. – Самара: СамГТУ, 2005. – С. 219–221.
5. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004. № 16. – http://www.mai.ru.
6. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. Анализ систем управления со случайным периодом квантования в классе обобщенных характеристических функций // Тез. докл. 8-й Межд. конф. «Авиация и космонавтика – 2009». – М.: МАИ-ПРИНТ, 2009. – С. 72.
7. Рыбин В.В. Описание сигналов и линейных нестационарных систем управления в базисах вейвлетов и их анализ в вычислительных средах. – М.: Изд-во МАИ, 2003.
8. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974.