В. А. Романов, К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт (государственный технический университет)

О ПРИМЕНЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЭРМИТА В ЗАДАЧЕ СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫМИ СТОХАСТИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Введение. В работе рассматривается применение спектрального метода к решению задачи синтеза оптимального программного управления и оптимального управления с обратной связью для одномерной стохастической системы [1, 3].

Основной целью является изучение возможностей применения обобщенных функций Эрмита [5] в подобных задачах. Преимущество обобщенных функций Эрмита (полной ортонормированной системы функций) состоит в том, что ими можно аппроксимировать как функции, для которых выполнено условие квадратичной интегрируемости на множестве действительных чисел, так и функции, для которых это условие не выполняется, в том числе и неограниченные функции.

При решении рассматриваемой задачи базой послужила методика синтеза оптимальных стохастических систем спектральным методом [3], а также полученные в [5] соотношения для расчета спектральных характеристик операторов умножения и дифференцирования (двумерных нестационарных передаточных функций элементарных звеньев систем управления: усилительного и дифференцирующего), спектральной характеристики множительного звена относительно обобщенных функций Эрмита.

Постановка задачи. Для одномерной нелинейной стохастической системы, описываемой уравнением Ито

$$dX(t) = (-t\,\mathrm{e}^{-|X(t)|} + u(t))dt + dW(t), \quad X(0) = X_0,$$

где $t \in T = [0,1]$, $X \in R$ – состояние системы, $u \in R$ – управление, $W(t)$ – винеровский процесс, не зависящий от X_0, найти оптимальное управление при различных случаях информированности о векторе состояния:

а) $u(t)$ (программное управление);

б) $u(t) = u(t, X(t))$ (управление с обратной связью).

Начальное состояние X_0 имеет стандартное гауссовское распределение, задаваемое плотностью вероятности $\phi_0(x)$, а функционал качества управления определен следующим образом:

$$J = M\left[\frac{1}{2}\int_0^1 u^2(t)dt + \frac{1}{2}X^2(1)\right], \quad J^* = \min_{u(t),\,\phi(t,x)} J,$$

где $u(t)$ представляет собой функции $u(t)$ или $u(t, X(t))$ в зависимости от степени информированности о состоянии, $\phi(t,x)$ – плотность вероятности состояния системы, M – знак математического ожидания.

Соотношения для нахождения оптимального управления. Запишем соотношения для нахождения оптимального программного управления и управления с обратной связью в этой задаче [1]. В случае программного управления они имеют вид

$$\frac{\partial \phi^*(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[(-t\,\mathrm{e}^{-|x|} + u^*(t))\phi^*(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi^*(t,x)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x}(-t\,\mathrm{e}^{-|x|} + u^*(t)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi(t,x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(u^*(t))^2 = 0,$$

$$\phi^*(t,x)|_{t=0} = \phi_0(x), \quad \psi(t,x)|_{t=1} = -\frac{1}{2}x^2,$$

где $(t,x) \in Q = [0,1] \times R$,

$$u^*(t) = \arg\max_{u \in R} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x}(-t\,\mathrm{e}^{-|x|} + u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi(t,x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}u^2 \right\} \phi^*(t,x)dx.$$

Применяя необходимые и достаточные условия экстремума, получаем

$$u^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x}\phi^*(t,x)dx.$$

При управлении с обратной связью имеем

$$\max_{u \in R} \left\{ \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x}(-t\,\mathrm{e}^{-|x|} + u) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi(t,x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}u^2 \right\} = 0,$$

$$\psi(t,x)|_{t=1} = -\frac{1}{2}x^2,$$

следовательно, оптимальное управление с обратной связью и соответствующую плотность вероятности состояния можно найти из системы уравнений

$$\frac{\partial \phi^*(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[(-t\,\mathrm{e}^{-|x|} + u^*(t,x))\phi^*(t,x)\right] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \phi^*(t,x)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial \psi(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x}(-t\,\mathrm{e}^{-|x|} + u^*(t,x)) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \psi(t,x)}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(u^*(t,x))^2 = 0,$$

$$\phi^*(t,x)|_{t=0} = \phi_0(x), \quad \psi(t,x)|_{t=1} = -\frac{1}{2}x^2,$$

$$u^*(t,x) = \frac{\partial \psi(t,x)}{\partial x}.$$

В отличие от первого случая при наличии информации о состоянии системы уравнение для вспомогательной функции $\psi(t,x)$ с учетом последнего равенства решается независимо от уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (уравнения для плотности вероятности $\phi^*(t,x)$ состояния).

Применение спектральной формы математического описания систем управления. Для перехода в спектральную область [3, 4] выберем в качестве базисной системы пространства $L_2(Q;\rho(x))$ систему функций

$$\{\hat{P}(i_0,t)\hat{E}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty},$$

где $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ – система полиномов Лежандра, определенная на отрезке $T=[0,1]$ и представляющая собой базис пространства $L_2(T)$; $\{\hat{E}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ – система обобщенных функций Эрмита [5], образующая базис пространства $L_2(R;\rho(x))$; $\rho(x)$ – весовая функция.

Перечислим обозначения спектральных характеристик (СХ), которые будут далее использоваться (будем придерживаться терминологии и обозначений, принятых в [3, 4]): $P(2,2)$ – СХ оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, $P_1(2,2)$ и $P_{11}(2,2)$ – СХ операторов дифференцирования по переменной x первого и второго порядков соответственно, $\Phi^*(2,0)$ и $\Psi(2,0)$ – СХ функций $\phi^*(t,x)$ и $\psi(t,x)$, $U^*(2,0)$ – СХ оптимального управления с обратной связью, $V(2,4)$ – СХ множительного звена (эти СХ определены относительно базисной системы $\{\hat{P}(i_0,t)\hat{E}(i_1,x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$).

Далее, $q(1,0;t_0)$ и $q(1,0;t_1)$ – матрицы-столбцы значений функций $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точках t_0 и t_1 соответственно, $U^*(1,0)$ – СХ оптимального программного управления, $A_0(1,1)$ – СХ оператора умножения на функцию $-t$, $V_0(1,2)$ – СХ множительного звена (перечисленные СХ определены относительно $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$).

Наконец, $J(0,1)$ – СХ линейного функционала, ставящего в соответствие функции переменной x интеграл от этой функций по всему множеству действительных чисел, $R(1,1)$ – СХ оператора умножения на весовую функцию $\rho(x)$, $\Phi_0(1,0)$ – СХ плотности вероятности $\phi_0(x)$ начального состояния X_0, $F(1,0)$ – СХ функции $\frac{1}{2}x^2$, $\tilde{A}(1,1)$ – СХ оператора умножения на функцию $\mathrm{e}^{-|x|}$, $I(1,0)$ – СХ функции $h(x)=1$ (перечисленные СХ определены относительно $\{\hat{E}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$).

Соотношения для нахождения оптимального программного управления в спектральной форме математического описания для общего случая приведены в [3]. В рассматриваемой задаче, они преобразуются к виду

$$P(2,2)\cdot\Phi^*(2,0)-B_0(2,0)=A(2,2;U^*(1,0))\cdot\Phi^*(2,0),$$

$$P^{\mathrm{T}}(2,2)\cdot\Psi(2,0)+B_1(2,0)=A^*(2,2;U^*(1,0))\cdot\Psi(2,0)-F_0(2,0;U^*(1,0)),$$

$$U^*(1,0)=(E(1,1)\otimes J(0,1))\cdot(E(1,1)\otimes R^{-1}(1,1))\cdot(V(2,4)\odot\Phi^*(2,0))\cdot(P_1(2,2)\cdot\Psi(2,0)),$$

где

$$A(2,2;U(1,0))=-P_1(2,2)\cdot F(2,2;U(1,0))+\tfrac{1}{2}\cdot P_{11}(2,2),$$

$$A^*(2,2;U(1,0))=F(2,2;U(1,0))\cdot P_1(2,2)+\tfrac{1}{2}\cdot P_{11}(2,2),$$

$$B_0(2,0) = q(1,0;t_0) \otimes \Phi_0(1,0), \quad B_1(2,0) = q(1,0;t_1) \otimes F(1,0).$$

Здесь учтено, что коэффициент диффузии не зависит от управления и тождественно равен единице, следовательно, СХ оператора умножения на эту функцию равна четырехмерной единичной матрице $E(2,2)$. Коэффициент сноса выражается следующим образом ($E(1,1)$ – двумерная единичная матрица):

$$F(2,2;U(1,0)) = A_0(1,1) \otimes \tilde{A}(1,1) + (V_0(1,2) \odot U(1,0)) \otimes E(1,1),$$

кроме того

$$F_0(2,0;U(1,0)) = \tfrac{1}{2} \cdot ((V_0(1,2) \odot U(1,0)) \cdot U(1,0)) \otimes I(1,0).$$

Эквивалентная задача безусловной минимизации имеет вид

$$\tilde{J}(\Phi^*(2,0), \Psi(2,0)) = \left\| \Delta_{\Phi^*}(2,0;\Phi^*(2,0), \Psi(2,0)) \right\| +$$
$$+ \left\| \Delta_\Psi(2,0;\Phi^*(2,0), \Psi(2,0)) \right\| \to \min_{\Phi^*(2,0),\, \Psi(2,0)},$$

где

$$\Delta_{\Phi^*}(2,0;\Phi^*(2,0), \Psi(2,0)) = P(2,2) \cdot \Phi^*(2,0) - B_0(2,0) -$$
$$- A(2,2;U^*(1,0;\Phi^*(2,0), \Psi(2,0))) \cdot \Phi^*(2,0),$$
$$\Delta_\Psi(2,0;\Phi^*(2,0), \Psi(2,0)) = P^{\mathrm{T}}(2,2) \cdot \Psi(2,0) + B_1(2,0) -$$
$$- A^*(2,2;U^*(1,0;\Phi^*(2,0), \Psi(2,0))) \cdot \Psi(2,0) + F_0(2,0;U^*(1,0;\Phi^*(2,0), \Psi(2,0))).$$

Для нахождения оптимального управления с обратной связью используются следующие соотношения [3]:

$$P(2,2) \cdot \Phi^*(2,0) - B_0(2,0) = A(2,2;U^*(2,0)) \cdot \Phi^*(2,0),$$
$$P^{\mathrm{T}}(2,2) \cdot \Psi(2,0) + B_1(2,0) = A^*(2,2;U^*(2,0)) \cdot \Psi(2,0) - F_0(2,0;U^*(2,0)),$$
$$U^*(2,0) = P_1(2,2) \cdot \Psi(2,0),$$

в которых

$$A(2,2;U(2,0)) = -P_1(2,2) \cdot F(2,2;U(2,0)) + \tfrac{1}{2} \cdot P_{11}(2,2),$$
$$A^*(2,2;U(2,0)) = F(2,2;U(2,0)) \cdot P_1(2,2) + \tfrac{1}{2} \cdot P_{11}(2,2)$$

с учетом того, что

$$F(2,2;U(2,0)) = A_0(1,1) \otimes \tilde{A}(1,1) + V(2,4) \odot U(2,0),$$
$$F_0(2,0;U(2,0)) = \tfrac{1}{2} \cdot (V(2,4) \odot U(2,0)) \cdot U(2,0).$$

Запишем эквивалентную задачу безусловной минимизации:

$$\tilde{J}(\Psi(2,0)) = \left\| \Delta_\Psi(2,0;\Psi(2,0)) \right\| \to \min_{\Psi(2,0)},$$

где

$$\Delta_\Psi(2,0;\Psi(2,0)) = P^{\mathrm{T}}(2,2) \cdot \Psi(2,0) + B_1(2,0) -$$
$$- A^*(2,2;P_1(2,2) \cdot \Psi(2,0)) \cdot \Psi(2,0) + F_0(2,0;P_1(2,2) \cdot \Psi(2,0)),$$

после решения которой и нахождения СХ $\Psi(2,0)$ и $U^*(2,0)$ СХ $\Phi^*(2,0)$ определяется из соотношения

$$\Phi^*(2,0) = (P(2,2) - A(2,2;P_1(2,2) \cdot \Psi(2,0)))^{-1} \cdot B_0(2,0).$$

Минимальное значение функционала J вычисляется следующим образом:

$$J^* = -(q^{\mathrm{T}}(1,0;t_0) \otimes \Phi_0^{\mathrm{T}}(1,0)) \cdot (E(1,1) \otimes R^{-1}(1,1)) \cdot \Psi(2,0),$$
а оптимальное управление определяется с помощью обратного спектрального преобразования [3, 4]: $u^*(t) = S^{-1}[U^*(1,0)]$, $u^*(t,x) = S^{-1}[U^*(2,0)]$.

Для приближенного решения приведенных выше задач безусловной минимизации были выбраны порядки усечения спектральных характеристик [3, 4]: $L_0 = L_1 = 8$ (число функций базисных систем $\{\hat{P}(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{\hat{E}(i_1,x)\}_{i_1=0}^{\infty}$, используемых для представления $\phi^*(t,x)$, $\psi(t,x)$ и оптимального управления); параметры обобщенных функций Эрмита: $m=0$, $D=1$, $\alpha=\frac{3}{4}$; поиск минимального значения функционала $\tilde{J}$ осуществлялся методом конфигураций [2]. В результате вычислений получены следующие данные: $J^* \approx 1.053$ для оптимального программного управления и $J^* \approx 0.611$ для оптимального управления с обратной связью. Дополнительные расчеты (параметры обобщенных функций Эрмита: $m=0$, $D=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$) привели к схожему результату: $J^* \approx 1.013$ для оптимального программного управления и $J^* \approx 0.602$ для оптимального управления с обратной связью.

Проведенные расчеты свидетельствуют о возможности применения обобщенных функций Эрмита для приближенного решения задач синтеза оптимального управления нелинейными стохастическими системами спектральным методом.

Библиографический список

1. Пантелеев А.В. Оптимальные нелинейные системы управления: синтез при неполной информации. – М.: Вузовская книга, 2008.
2. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2005.
3. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом // Информатика и ее применения. – 2011. Т. 5, вып. 2.
4. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006.
5. Романов В.А., Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2010, № 39.