УДК 519.3

АЛГОРИТМИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

К.А. РЫБАКОВ, З.Р. ХАКИМОВ

Статья представлена доктором физико-математических наук, профессором Пантелеевым А.В.

В статье рассматривается метод решения линейных уравнений Фредгольма и Вольтерра с применением спектральной формы математического описания. В основе метода лежит представление искомого решения совокупностью коэффициентов разложения в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций (базисной системе), что позволяет свести задачу к решению системы линейных алгебраических уравнений, вид которой инвариантен к выбору базисной системы.

Ключевые слова: интегральное уравнение, базисные системы функций, спектральное преобразование.

Введение

Теория интегральных уравнений (и ее часть, посвященная линейным интегральным уравнениям) является важным разделом современной математики. Многие физические задачи, задачи обработки результатов измерений приводят к интегральным уравнениям, поэтому развитие методов их решения представляется актуальным [1, 2].

Стоит отметить, что для многих интегральных уравнений не удается найти точного аналитического решения, это приводит к необходимости использовать различные приближенные методы, например, методы, основанные на замене ядра уравнения, сведение интегрального уравнения к дифференциальному уравнению, метод квадратур, операционный метод и пр. При этом выбор метода зачастую зависит от типа самого уравнения.

В данной работе предлагается метод решения линейных интегральных уравнений, основанный на использовании спектральной формы математического описания, составляющей единый подход к решению линейных операторных уравнений (в том числе дифференциальных, разностных и др.).

1. Постановка задачи

Будем рассматривать линейные интегральные уравнения вида

$$x(t)-\int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad a \le t \le b \tag{1}$$

и

$$\int_a^b K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad a \le t \le b, \tag{2}$$

где $x(t)$ – искомая функция; $K(t,s)$ – ядро; $f(t)$ – свободный член. Функции $K(t,s)$ и $f(t)$ заданы. Эти уравнения называются уравнениями Фредгольма второго и первого рода соответственно.

Предполагается, что выполнены условия

$$\int_a^b\int_a^b |K(t,s)|^2\, dtds < \infty, \quad \int_a^b |f(t)|^2 dt < \infty. \tag{3}$$

В соотношениях (1), (2) и, следовательно, в (3) величины a и b могут принимать бесконечные значения, т.е. $a=-\infty$ и $b=+\infty$, поэтому далее будем обозначать промежуток изменения переменной t через T ($t \in T$). Таким образом, T может представлять собой отрезок $[a,b]$, полубесконечный интервал или все множество действительных чисел.

Уравнения (1) и (2) с учетом введенного обозначения будем записывать в операторной форме

$$\mathcal{K}x(t) = f(t), \tag{4}$$

где $\mathcal{K}$ – линейный оператор, определяемый соотношением

$$\mathcal{K}x(t) = x(t) - \int_T K(t,s)x(s)ds$$

для уравнения Фредгольма второго рода и

$$\mathcal{K}x(t) = \int_T K(t,s)x(s)ds$$

для уравнения Фредгольма первого рода. Задача решения интегрального уравнения заключается в нахождении функции $x(t)$, которая обращает его в тождество при заданных функциях $K(t,s)$ и $f(t)$.

В частном случае, если $K(t,s)=0$ при $s \geq t$, уравнения (1) и (2) записываются в форме

$$x(t) - \int_a^t K(t,s)x(s)ds = f(t) \text{ и } \int_a^t K(t,s)x(s)ds = f(t)$$

соответственно. Они называются уравнениями Вольтерра и аналогичным образом записываются в операторной форме.

Далее предполагается, что существует единственное решение $x(t)$ рассматриваемых уравнений, при этом

$$\int_a^b |x(t)|^2 dt < \infty .$$

2. Использование спектральной формы математического описания для решения линейных интегральных уравнений

Напомним [3, 4], что в основе спектрального метода лежит представление функций совокупностью коэффициентов разложения их в ряд Фурье по полной ортонормированной системе функций. Если $\{p(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ – полная ортонормированная система функций, образующая базис пространства $L_2(T)$ (базисная система), то функция $x(t) \in L_2(T)$ может быть представлена в виде ряда

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p(i,t)$$

на множестве T, где коэффициенты разложения x_i вычисляются по следующему правилу

$$x_i = \int_T p(i,t)x(t)dt, \quad i = 0,1,2,... \tag{5}$$

Упорядоченная совокупность коэффициентов разложения x_i, представленная в виде бесконечной матрицы-столбца [3–5], называется спектральной характеристикой функции $x(t)$, а отображение, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику, называется спектральным преобразованием и обозначается через S

$$X = S[x(t)]\,, \quad X = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Обратный переход от спектральной характеристики к исходной функции осуществляется с помощью обратного спектрального преобразования

$$x(t) = S^{-1}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} x_i\, p(i,t)\,, \quad t \in T\,. \tag{7}$$

Линейному оператору $\mathcal{A}$, заданному на пространстве $L_2(T)$, ставится в соответствие бесконечная матрица (спектральная характеристика оператора $\mathcal{A}$) [3–5], элементы a_{ij} которой определяются соотношением

$$a_{ij} = \int_T p(i,t)\mathcal{A}p(j,t)dt\,, \quad i,\, j = 0,1,2,... \tag{8}$$

Отображение, ставящее в соответствие линейному оператору его спектральную характеристику, также называется спектральным преобразованием

$$A = S[\mathcal{A}], \quad A = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения (4)

$$S[\mathcal{K}x(t)] = S[f(t)]\,.$$

Согласно свойствам спектрального преобразования [4], $S[\mathcal{K}x(t)]$ можно представить в виде произведения $S[\mathcal{K}]\cdot S[x(t)]$. Таким образом, получаем уравнение

$$K \cdot X = F\,,$$

в котором X и F – спектральные характеристики функций $x(t)$ и $f(t)$ соответственно (5), (6), а K – спектральная характеристика линейного оператора $\mathcal{K}$ (8), (9).

Это линейное уравнение относительно спектральной характеристики X искомой функции $x(t)$ (система линейных уравнений относительно коэффициентов разложения x_i), его решение имеет вид

$$X = K^{-1} \cdot F\,,$$

где K^{-1} – обратная матрица по отношению к матрице K [5].

3. Алгоритм решения интегрального уравнения спектральным методом

1. Выбрать базисную систему $\{p(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T)$.

2. Вычислить:

а) спектральную характеристику K линейного оператора $\mathcal{K}$ (8), (9).

В случае решения уравнения Фредгольма второго рода $K = S[\mathcal{K}]$,

$$k_{ij} = \int_T p(i,t)\left[p(j,t) - \int_T K(t,s)p(j,s)ds \right]dt = \delta_{ij} - \int_T p(i,t)\left[\int_T K(t,s)p(j,s)ds \right]dt\,, \tag{10}$$

$$i,\, j = 0,1,2,\dots\,,$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Для уравнения Фредгольма первого рода эти соотношения проще, а именно

$$K = S[\mathcal{K}], \quad k_{ij} = \int_T p(i,t)\left[\int_T K(t,s)p(j,s)ds\right]dt, \quad i,j = 0,1,2,\ldots; \tag{11}$$

б) спектральную характеристику F функции $f(t)$ (5), (6)

$$F = S[f(t)], \quad f_i = \int_T p(i,t)f(t)dt, \quad i = 0,1,2,\ldots \tag{12}$$

3. Найти спектральную характеристику X функции $x(t)$, используя соотношение

$$X = K^{-1}\cdot F. \tag{13}$$

4. По формуле обращения (7) найти искомую функцию

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p(i,t). \tag{14}$$

Замечания.

1. Для уравнения Вольтерра формулы (10) и (11) будут иметь аналогичный вид

$$K = S[\mathcal{K}], \quad k_{ij} = \delta_{ij} - \int_T p(i,t)\left[\int_a^t K(t,s)p(j,s)ds\right]dt, \quad i,j = 0,1,2,\ldots \tag{15}$$

или

$$K = S[\mathcal{K}], \quad k_{ij} = \int_T p(i,t)\left[\int_a^t K(t,s)p(j,s)ds\right]dt, \quad i,j = 0,1,2,\ldots \tag{16}$$

2. Операции над бесконечными матрицами (сложение, умножение, возведение в степень и т.п.) аналогичны соответствующим операциям над матрицами с конечным числом элементов [5]. Тем не менее, при практических расчетах бесконечные матрицы «усекаются» и, таким образом, решение интегрального уравнения приближенно ищется в виде

$$x(t) = \sum_{i=0}^{L-1} x_i p(i,t),$$

т.е. в виде линейной комбинации первых L функций базисной системы. Число L называется порядком усечения спектральных характеристик. При этом в формулах (5), (8), (10)–(12) и (14)–(16) индексы i и j принимают значения $0,1,\ldots,L-1$. При усечении спектральных характеристик K представляет собой квадратную матрицу размеров $L\times L$, а X и F – матрицы-столбцы размеров $L\times 1$.

3. В качестве базисных систем, заданных на различных отрезках, могут быть использованы полиномы Лежандра, тригонометрические функции, функции Уолша и Хаара, для полубесконечного интервала $[0,+\infty)$ – функции Лагерра, а для множества действительных чисел $(-\infty,+\infty)$ – функции Эрмита [4, 6, 7]. Приведем соотношения, задающие наиболее часто используемые базисные системы (для отрезка $[0,\tau]$):

а) полиномы Лежандра

$$\hat{P}(i,t) = \sqrt{\frac{2i+1}{\tau}}\sum_{\nu=0}^{i}(-1)^{i-\nu}\frac{t^\nu}{\tau^\nu}\frac{(i+\nu)!}{(\nu!)^2(i-\nu)!}, \quad i = 0,1,2,\ldots; \tag{17}$$

б) косинусоиды

$$\hat{C}(i,t) = \begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{\tau}}, & i = 0,\\[2mm] \sqrt{\dfrac{2}{\tau}}\cos\dfrac{i\pi t}{\tau}, & i = 1,2,3,\ldots;\end{cases} \tag{18}$$

в) функции Уолша

$$\hat{\Omega}(i,t)=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{\tau}}, & i=0,\\ \sqrt{\dfrac{1}{\tau}}\prod\limits_{\{k:\,a_k=1\}} r(k,t), & i=1,2,3,...,\end{cases} \tag{19}$$

где функции

$$r(k,t)=\operatorname{sign}\left(\sin\left(\frac{2^k\pi t}{\tau}\right)\right)$$

называются функциями Радемахера, a_k – коэффициенты в двоичном представлении числа i.

Пример. Решить интегральное уравнение

$$x(t)+\int_0^t (t-s)x(s)ds=1-e^{-t}.$$

В данном случае рассматривается уравнение Вольтерра второго рода

$$a=0,\ K(t,s)=-(t-s),\ f(t)=1-e^{-t}.$$

Оператор $\mathcal{K}$ задается в виде

$$\mathcal{K}x(t)=x(t)+\int_0^t (t-s)x(s)ds.$$

Будем искать решение задачи на отрезке $T=[0,1]$, используя различные базисные системы.

1. Выберем в качестве базиса пространства $L_2([0,1])$ систему $\{\hat{P}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ полиномов Лежандра (17) при $\tau=1$.

2. Вычислим спектральные характеристики оператора $\mathcal{K}$ и свободного члена интегрального уравнения (функции $f(t)$) относительно системы полиномов Лежандра.

Элементы k_{ij} спектральной характеристики K линейного оператора $\mathcal{K}$ определяются выражением (15)

$$k_{ij}=\delta_{ij}+\int_0^1 \hat{P}(i,t)\left[\int_0^t (t-s)\hat{P}(j,s)ds\right]dt,\quad i,j=0,1,2,...,$$

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j,\end{cases}$$

а для вычисления координат f_i спектральной характеристики F функции $f(t)=1-e^{-t}$ используется соотношение (12)

$$f_i=\int_0^1 \hat{P}(i,t)(1-e^{-t})dt,\quad i=0,1,2,...$$

3. Найдем спектральную характеристику X функции $x(t)$: $X=K^{-1}\cdot F$.

4. По формуле обращения (14) найдем искомую функцию

$$x(t)=\sum_{i=0}^{\infty} x_i\hat{P}(i,t).$$

Для других базисных систем, а именно косинусоид $\{\hat{C}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ и функций Уолша $\{\hat{\Omega}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$ (18) и (19) следует применить ту же последовательность действий.

В явном виде получить выражения для коэффициентов x_i достаточно сложно, поэтому воспользуемся процедурой «усечения» спектральных характеристик (п. 2 замечания) и получим приближенные решения при различных порядках усечения. Так, на рис. 1 изображены графики приближенных решений, найденных спектральным методом при $L = 8$ с использованием различных базисных систем (цифрой 1 обозначен график приближенного решения, полученного с помощью полиномов Лежандра, цифрами 2 и 3 – с использованием косинусоид и функций Уолша соответственно), и график точного решения [8]

$$x(t) = 1 - e^{-t} - \int_0^t \sin(t-s)(1-e^{-s})ds$$

(он совпадает с графиком приближенного решения, полученного с помощью полиномов Лежандра).

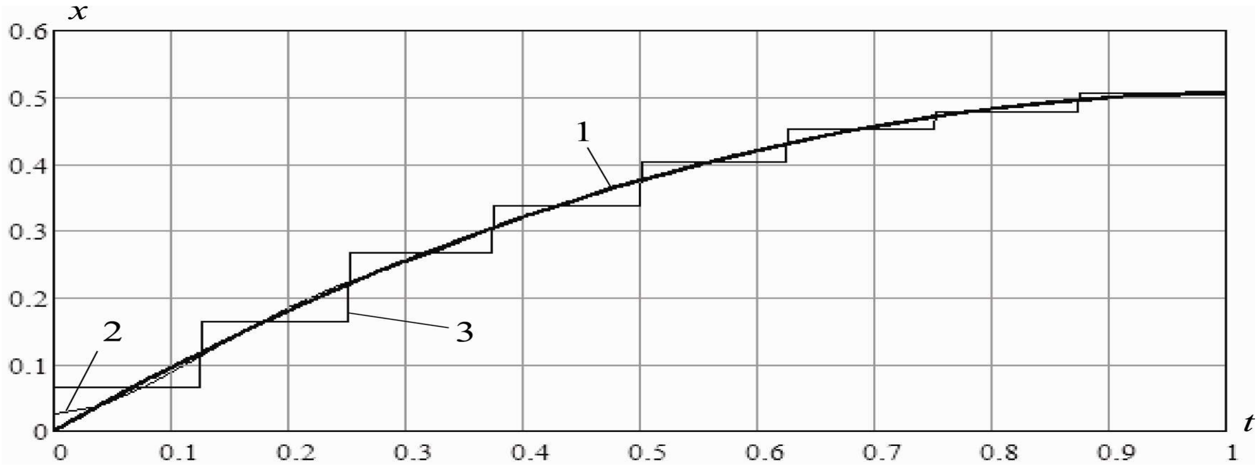

Рис. 1. Графики точного и приближенного решений интегрального уравнения

Далее, в табл. 1 приведены погрешности вычисления приближенных решений в сравнении с точным (норма разности точного и приближенного решений в пространстве $L_2([0,1])$) для выбранных базисных систем и различных порядков усечения.

Для данного примера наилучшая точность достигается при использовании полиномов Лежандра, однако использование косинусоид и функций Уолша тоже дает приемлемый результат особенно с учетом того, что с увеличением порядка усечения спектральных характеристик погрешность уменьшается.

Таблица 1

Базисная система \ Порядок усечения L	4	8	16
Полиномы Лежандра $\{\hat{P}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$	$7.2\cdot10^{-5}$	$1.7\cdot10^{-10}$	$3.5\cdot10^{-7}$
Косинусоиды $\{\hat{C}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$	$1.2\cdot10^{-2}$	$4.0\cdot10^{-3}$	$1.4\cdot10^{-3}$
Функции Уолша $\{\hat{\Omega}(i,t)\}_{i=0}^{\infty}$	$4.3\cdot10^{-2}$	$2.2\cdot10^{-2}$	$1.3\cdot10^{-2}$

Заключение

Предложенный метод, основанный на спектральной форме математического описания, является достаточно универсальным, он удобен для реализации на ЭВМ, поскольку решение интегрального уравнения сводится к системе линейных алгебраических уравнений. При приближенном решении точность метода зависит от выбора базисной системы и порядка усечения спектральных характеристик.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цлаф Л.Я.** Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1966.
2. **Васильева А.Б., Тихонов Н.А.** Интегральные уравнения. – М.: Физматлит, 2002.
3. **Солодовников В.В., Семенов В.В.** Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974.
4. **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006.
5. **Кук Р.** Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: Физматгиз, 1960.
6. **Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004. - № 16. – http://www.mai.ru.
7. **Колмогоров А.Н., Фомин С.В.** Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976.
8. **Полянин А.Д., Манжиров А.В.** Справочник по интегральным уравнениям. – М.: Физматлит, 2003.

APPLICATION OF THE SPECTRAL METHOD TO LINEAR INTEGRAL EQUATIONS

Rybakov K.A., Khakimov Z.R.

We suggest the new approach to solve linear integral equations (Fredholm and Volterra equations) with using the spectral form of mathematical description. The proposed method allows to transform linear integral equation into the linear algebraic equations, and to arrive at a solution in an explicit form.

Key words: integral equations, basic systems of functions, spectral transformation.

Сведения об авторах

Рыбаков Константин Александрович, 1979 г.р., окончил МАИ (2002), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики факультета прикладной математики и физики МАИ, автор более 40 научных работ, область научных интересов – анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания систем управления.

Хакимов Зуфар Радикович, 1986 г.р., окончил МАИ (2009), сотрудник ООО «Яндекс», автор 2 научных работ, область научных интересов – анализ стохастических систем управления, моделирование и прогнозирование катастроф в сложных динамических системах и управление развитием информационных продуктов.