СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МАЛЫМ ИСКУССТВЕННЫМ СПУТНИКОМ С УЧЕТОМ ВОЗМОЖНОГО ОТКАЗА УПРАВЛЯЮЩЕГО УСТРОЙСТВА

Рыбаков К.А., Сотскова И.Л., Юдин М.А.

Введение

В работе рассматривается задача оптимальной стабилизации малого искусственного спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов, с учетом возможного отказа управляющего устройства.

Искусственные спутники малых размеров (весом до 100 кг) давно и с успехом создавались во многих технических университетах, научно-исследовательских институтах и конструкторских бюро. В последнее время активно ведутся исследования и разработка малых спутников стандарта CubeSat [1], называемых нано-спутниками (весом до 10 кг) или пико-спутниками (весом до 1 кг). Подобные спутники сравнительно недороги в разработке и производстве, вместе с тем способны выполнять значительный объем работ. Так, спутники международной системы Disaster Monitoring Constellation позволяют производить мониторинг катастроф по всему земному шару, норвежская разработка nCube способна отслеживать перемещение кораблей по территориальным водам Норвегии. Датский проект AAUSAT предназначен для получения детальных изображений Земли. Задача разработанного Вюрцбургским университетом спутника UWE-1 состоит в анализе использования технологий TCP/IP для телеметрических и телекомандных данных с учетом проблем задержек и помех, целью японского проекта XI является демонстрация и тестирование систем спутниковой платформы с использованием готовых элементов, включая проверку аппаратуры спутника в условиях реального орбитального полета [2].

Специфика малых спутников порождает ряд интересных исследовательских задач. Так, ввиду ограничений на размеры и вес таких спутников ограничена надежность системы управления, поэтому задача обеспечения эффективного функционирования спутника в условиях возможного отказа управляющего устройства в случайный момент времени приобретает особое значение.

Постановка задачи

Известно [3], что возмущенное движение спутника, находящегося под действием гравитационного и управляющего моментов, в плоскости орбиты описывается уравнениями

$$\frac{d\theta(\tau)}{d\tau}=q(\tau),\quad \frac{dq(\tau)}{d\tau}=-3\Omega^2\beta\sin\theta(\tau)\cos\theta(\tau)+L\mathbf{u}(\tau),$$

где θ – угол отклонения оси спутника по отношению к радиус-вектору центра масс, q – угловая скорость вращения вокруг центра масс, Ω – угловая скорость обращения спутника по круговой орбите, L и β – константы, зависящие от конструкции спутника, $\mathbf{u}$ – управление.

Линеаризуем уравнения движения в предположении, что колебания спутника малы, т.е. $\sin\theta\approx\theta$, $\cos\theta\approx 1$, и произведем замену переменных. Пусть $\tau=\alpha t$, $\theta=\gamma X_1$ и $q=\delta X_2$, где числа α, γ и δ выбраны таким образом, что $\alpha\delta/\gamma=1$, $3\Omega^2\beta\alpha\gamma/\delta=1$, $\alpha L/\delta=1$. Тогда уравнения движения примут вид

$$\frac{dX_1(t)}{dt}=X_2(t),\quad \frac{dX_2(t)}{dt}=-X_1(t)+\mathbf{U}(t).$$

Будем предполагать, что $t\in[0,1]$, начальные условия $X_{10}=X_1(0)$ и $X_{20}=X_2(0)$ представляют собой случайные величины, которые характеризуются плотностью вероятности $\varphi_0(x_1,x_2)$. Кроме того, в случайный момент времени возможен отказ управляющего устройства с последующим восстановлением режима нормального функционирования. Интенсивности отказа и восстановления в общем случае зависят от времени и задаются функциями $\lambda_{12}(t)$ и $\lambda_{21}(t)$ соответственно [4]. В начальный момент времени система функционирует нормально с вероятностью $\mathrm{P}_0^{\langle 1\rangle}<1$.

При сделанных предположениях $X_1(t)$ и $X_2(t)$ являются случайными процессами. Таким образом, данную систему можно рассматривать как систему управления со случайной структурой [4], имеющую два режима функционирования и описываемую уравнениями

$$\frac{dX_1(t)}{dt}=X_2(t),\quad \frac{dX_2(t)}{dt}=-X_1(t)+\mathbf{U}(t)$$

(режим нормального функционирования),

$$\frac{dX_1(t)}{dt}=X_2(t),\quad \frac{dX_2(t)}{dt}=-X_1(t)$$

(режим отказа управляющего устройства).

Задача оптимальной стабилизации заключается в определении оптимальной пары $d^*=\left(\left[\varphi^{*<1>}(t,x_1,x_2)\ \varphi^{*<2>}(t,x_1,x_2)\right]^{\mathrm{T}},\ u^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)$, доставляющей минимум функционалу качества

$$J=\int_0^1\int_{R^2}u^2\left(t,x_{(1)}\right)\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)dx_1dx_2dt+\sum_{i,k=1}^{2}\int_{R^2}x_i^2\varphi^{<k>}(1,x_1,x_2)dx_1dx_2,$$

где $\varphi^{<1>}(t,x_1,x_2)$ и $\varphi^{<2>}(t,x_1,x_2)$ – ненормированные плотности вероятности [4] вектора состояния $x=\left[x_1\ \ x_2\right]^{\mathrm{T}}$ для обеих структур системы (режимов нормального функционирования и отказа управляющего устройства). Под обозначением $u\left(t,x_{(1)}\right)$ понимается функция $u(t)$, $u(t,x_1)$ или $u(t,x_1,x_2)$ в зависимости от степени информированности о векторе состояния [5]. Таким образом, управление $\mathbf{U}(t)$ зависит не только от времени, но и от результатов точного измерения координат вектора состояния, т.е. $\mathbf{U}(t)=u\left(t,X_{(1)}(t)\right)$.

Заметим, что первое слагаемое в выражении, задающем функционал качества, характеризует средний расход энергии, а остальные – среднеквадратическое отклонение координат вектора состояния от положения равновесия в конечный момент времени.

Соотношения для определения оптимального управления

В общем случае соотношения для определения оптимального управления системами со случайной структурой получены в [6, 7]. Для рассматриваемой задачи они записываются в виде

$$\frac{\partial\varphi^{*<1>}(t,x_1,x_2)}{\partial t}=-x_2\frac{\partial\varphi^{*<1>}(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}-\frac{\partial\left(\left(-x_1+u^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)\varphi^{*<1>}(t,x_1,x_2)\right)}{\partial x_2}-$$

$$-\lambda_{12}(t)\varphi^{*<1>}(t,x_1,x_2)+\lambda_{21}(t)\varphi^{*<2>}(t,x_1,x_2),$$

$$\frac{\partial\varphi^{*<2>}(t,x_1,x_2)}{\partial t}=-x_2\frac{\partial\varphi^{*<2>}(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}+x_1\frac{\partial\varphi^{*<2>}(t,x_1,x_2)}{\partial x_2}-$$

$$-\lambda_{21}(t)\varphi^{*<2>}(t,x_1,x_2)+\lambda_{12}(t)\varphi^{*<1>}(t,x_1,x_2),$$

$$\varphi^{*<1>}\left(0,x_1,x_2\right)=\mathrm{P}_0^{<1>}\,\varphi_0\left(x_1,x_2\right),\quad \varphi^{*<2>}\left(0,x_1,x_2\right)=\mathrm{P}_0^{<2>}\,\varphi_0\left(x_1,x_2\right);$$

$$\frac{\partial\psi^{<1>}\left(t,x_1,x_2\right)}{\partial t}+x_2\frac{\partial\psi^{<1>}\left(t,x_1,x_2\right)}{\partial x_1}+\left(-x_1+u^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)\frac{\partial\psi^{<1>}\left(t,x_1,x_2\right)}{\partial x_2}-$$

$$-\left(u^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)^2-\lambda_{12}\left(t\right)\psi^{<1>}\left(t,x_1,x_2\right)+\lambda_{12}\left(t\right)\psi^{<2>}\left(t,x_1,x_2\right)=0,$$

$$\frac{\partial\psi^{<2>}\left(t,x_1,x_2\right)}{\partial t}+x_2\frac{\partial\psi^{<2>}\left(t,x_1,x_2\right)}{\partial x_1}-x_1\frac{\partial\psi^{<2>}\left(t,x_1,x_2\right)}{\partial x_2}-$$

$$-\lambda_{21}\left(t\right)\psi^{<2>}\left(t,x_1,x_2\right)+\lambda_{21}\left(t\right)\psi^{<1>}\left(t,x_1,x_2\right)=0,$$

$$\psi^{<1>}\left(1,x_1,x_2\right)=-x_1^2-x_2^2,\quad \psi^{<2>}\left(1,x_1,x_2\right)=-x_1^2-x_2^2,$$

где $\mathrm{P}_0^{<2>}=1-\mathrm{P}_0^{<1>}$, $u^*\left(t,x_{(1)}\right)$ представляет собой функцию $u^*\left(t\right)$, $u^*\left(t,x_1\right)$ или $u^*\left(t,x_1,x_2\right)$ в зависимости от степени информированности о векторе состояния:

$$u^*\left(t\right)=\frac{1}{2\int\limits_{R^2}\varphi^{*<1>}\left(t,x_1,x_2\right)dx_1dx_2}\int\limits_{R^2}\frac{\partial\psi^{<1>}\left(t,x_1,x_2\right)}{\partial x_2}\varphi^{*<1>}\left(t,x_1,x_2\right)dx_1dx_2,$$

$$u^*\left(t,x_1\right)=\frac{1}{2\int\limits_{R}\varphi^{*<1>}\left(t,x_1,x_2\right)dx_2}\int\limits_{R}\frac{\partial\psi^{<1>}\left(t,x_1,x_2\right)}{\partial x_1}\varphi^{*<1>}\left(t,x_1,x_2\right)dx_2,$$

$$u^*\left(t,x_1,x_2\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial\psi^{<1>}\left(t,x_1,x_2\right)}{\partial x_2}.$$

Остановимся на предельных случаях информированности о векторе состояния, т.е. рассмотрим задачи нахождения оптимального программного управления $u^*\left(t\right)$ и оптимального управления $u^*\left(t,x_1,x_2\right)$ с полной обратной связью.

Будем искать функции $\psi^{<1>}\left(t,x_1,x_2\right)$ и $\psi^{<2>}\left(t,x_1,x_2\right)$ в виде

$$\psi^{<k>}\left(t,x_1,x_2\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\xi^{<k>}\left(t\right)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\eta^{<k>}\left(t\right)+\zeta^{<k>}\left(t\right),\quad k=1,2,$$

где $\xi^{<k>}\left(t\right)$ – симметрическая матричная функция размера 2×2, $\eta^{<k>}\left(t\right)$ – вектор-функция размера 2×1, а $\zeta^{<k>}\left(t\right)$ – скалярная функция (см. [4, 7]). Тогда для определения оптимального программного управления необходимо решить двухточечную краевую задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi^{<k>}(t)}{dt}+\xi^{<k>}(t)A^{<k>}+\left[A^{<k>}\right]^{\mathrm{T}}\xi^{<k>}(t)-$$

$$-\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{kr}(t)\xi^{<k>}(t)+\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{kr}(t)\xi^{<r>}(t)=0,\quad \xi^{<k>}(1)=-R^{<k>};$$

$$\frac{d\eta^{<k>}(t)}{dt}+\left[A^{<k>}\right]^{\mathrm{T}}\eta^{<k>}(t)+\xi^{<k>}(t)Y^{<k>}\xi^{<k>}(t)\tilde{m}^{<k>}(t)+$$

$$+\xi^{<k>}(t)Y^{<k>}\eta^{<k>}(t)-\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{kr}(t)\eta^{<k>}(t)+$$

$$+\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{kr}(t)\eta^{<r>}(t)=0,\quad \eta^{<k>}(1)=0;$$

$$\frac{d\zeta^{<k>}(t)}{dt}-\frac{1}{2}\left[\tilde{m}^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}}\xi^{<k>}(t)Y^{<k>}\xi^{<k>}(t)\tilde{m}^{<k>}(t)+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\eta^{<k>}(t)\right]^{\mathrm{T}}Y^{<k>}\eta^{<k>}(t)-\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{kr}(t)\zeta^{<k>}(t)+$$

$$+\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{kr}(t)\zeta^{<r>}(t)=0,\quad \zeta^{<k>}(1)=0;$$

$$\frac{d\,\mathrm{P}^{<k>}(t)}{dt}=-\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{kr}(t)\mathrm{P}^{<k>}(t)+\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{rk}(t)\mathrm{P}^{<r>}(t),\quad \mathrm{P}^{<k>}(0)=\mathrm{P}_0^{<k>};$$

$$\frac{d\tilde{m}^{<k>}(t)}{dt}=A^{<k>}\tilde{m}^{<k>}(t)+Y^{<k>}\left(\xi^{<k>}(t)\tilde{m}^{<k>}(t)+\eta^{<k>}(t)\right)+$$

$$+\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{rk}(t)\frac{\mathrm{P}^{<r>}(t)}{\mathrm{P}^{<k>}(t)}\left(\tilde{m}^{<r>}(t)-\tilde{m}^{<k>}(t)\right)=0,\quad \tilde{m}^{<k>}(0)=\tilde{m}_0^{<k>};\quad k=1,2.$$

Здесь $\tilde{m}_0^{<k>}=\int\limits_{R^2}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}\varphi_0(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$ – математическое ожидание начального состояния $\left[X_{10}\quad X_{20}\right]^{\mathrm{T}}$. В этом случае

$$u^*(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\left(\xi^{<1>}(t)\tilde{m}^{<1>}(t)+\eta^{<1>}(t)\right).$$

Для нахождения оптимального управления с полной обратной связью достаточно решить задачу Коши для следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi^{<k>}(t)}{dt}+\xi^{<k>}(t)A^{<k>}+\left[A^{<k>}\right]^{\mathrm{T}}\xi^{<k>}(t)+\xi^{<k>}(t)Y^{<k>}\xi^{<k>}(t)-$$

$$-\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{kr}(t)\xi^{<k>}(t)+\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{kr}(t)\xi^{<r>}(t)=0,\quad \xi^{<k>}(1)=-R^{<k>};$$

$$\frac{d\zeta^{<k>}(t)}{dt}-\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{kr}(t)\zeta^{<k>}(t)+\sum_{r=1,r\neq k}^{2}\lambda_{kr}(t)\zeta^{<r>}(t)=0,\quad \zeta^{<k>}(1)=0;$$

$$k=1,2.$$

Вектор-функции $\eta^{<1>}(t)$ и $\eta^{<2>}(t)$ для данного случая являются нулевыми. Тогда

$$u^{*}(t,x_1,x_2)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\xi^{<1>}(t)\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

В приведенных соотношениях

$$A^{<1>}=A^{<2>}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\quad R^{<1>}=R^{<2>}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

$$Y^{<1>}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad Y^{<2>}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что для рассматриваемой линейной системы со случайной структурой задача нахождения оптимальной пары d^{*} свелась к нахождению пары $\tilde{d}^{*}=\left(\left[\tilde{m}^{*<1>}(t)\ \ \tilde{m}^{*<2>}(t)\right]^{\mathrm{T}},\ u^{*}\left(t,x_{(1)}\right)\right)$, где $\tilde{m}^{<1>}(t)$ и $\tilde{m}^{<2>}(t)$ – условные математические ожидания вектора состояния для обеих структур системы, определяемые из уравнений метода двухмоментной параметрической аппроксимации [8]. Тем не менее, при необходимости ненормированные плотности вероятности $\varphi^{*<1>}(t,x_1,x_2)$ и $\varphi^{*<2>}(t,x_1,x_2)$ могут быть получены в результате решения задачи анализа [8, 9] рассматриваемой системы при заданном управлении $u^{*}(t)$ или $u^{*}(t,x_1,x_2)$.

Таким образом, для определения оптимального программного управления требуется решить двухточечную краевую задачу, а для нахождения оптимального управления с полной обратной связью – задачу Коши для соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Минимальное значение функционала качества в обоих случаях вычисляется по формуле [6]

$$J^* = -\int\limits_{R^2} \left(\mathrm{P}_0^{<1>} \psi^{<1>}(0, x_1, x_2) + \mathrm{P}_0^{<2>} \psi^{<2>}(0, x_1, x_2) \right) \varphi_0(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Gravdahl J.T., Eide E., Skavhaug A., Fauske K.M., Svartveit K., Indergaard F.M. Three axis attitude determination and control system for a pico-satellite: design and implementation // Proceedings of 54 IAF Congress, Bremen. – 2003.
2. Матросов В.М., Веретенников В.Г. О научно-образовательной программе разработки университетских пико-спутников Земли; о их стабилизации и устойчивости при возмущениях // Тез. докл. конф. «Авиация и космонавтика – 2004», Москва. – 2004.
3. Гурман В.И. Вырожденные задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1977.
4. Казаков И.Е., Артемьев В.М. Оптимизация динамических систем случайной структуры. – М.: Наука, 1980.
5. Пантелеев А.В., Семенов В.В. Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. – М.: Изд-во МАИ, 1992.
6. Рыбаков К.А. Оптимальное управление системами со случайной структурой при неполной информации о состоянии // Тр. конф. «Проблемы управления и приложения (техника, производство, экономика)». Т. 2. – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2005. – С. 144–149.
7. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Синтез оптимальных систем с переменной структурой при неполной информации // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2003, № 13.
8. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. – М.: Физматлит, 1993.
9. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных систем со случайной структурой // Авиакосмическое приборостроение. – 2006, № 2. – С. 12–16.