Спектральный метод анализа нелинейных систем со случайной структурой

The spectral method for analysis of nonlinear systems with random structure

К. А. Рыбаков, И. Л. Сотскова
Московский авиационный институт (государственный технический университет)

Аннотация

Рассматривается новый подход к решению задачи вероятностного анализа многомерных нелинейных систем со случайными изменениями структуры с использованием спектральной формы математического описания систем управления, в основе которой лежит представление функций совокупностью коэффициентов их разложения в обобщенный ряд Фурье. Эффективность предлагаемого метода демонстрируется на решении задачи анализа релейной следящей системы управления, подверженной случайному внешнему воздействию, с учетом возможного разрыва обратной связи.

This paper presents a new approach based on the spectral method formalism for solving statistical analysis problem for multidimensional nonlinear systems with a random structure. The proposed method allows to transform partial differential equations into linear algebraic equations – that gives the explicit solution. Aspects of application are discussed. A numerical example is given to illustrate the efficiency of the proposed method.

1. Введение

Современные задачи управления техническими объектами, позволяющие учитывать случайные факторы, различные режимы функционирования, скачкообразные внешние воздействия или возможный отказ элементов, приводят к необходимости описания их математических моделей различными уравнениями на разных интервалах времени, т.е. использовать модели систем со случайной структурой [1].

Примерами систем со случайной структурой могут служить системы управления сближением космических летательных аппаратов [2], системы поиска и захвата информационного сигнала в задачах навигации и управления полетом летательных аппаратов [1], системы комбинированного наведения на цель [1], система управления следящим радиолокатором со случайной пеленгационной характеристикой [1], а также системы управления с возможными нарушениями и отказами [1,3]. Причины, приводящие к изменению структуры системы, могут иметь различный характер, например, выход из строя одной из подсистем, перерывы при поступлении информации в контуре управления, адаптация к условиям внешней среды, скачкообразно изменяющиеся помехи, которые могут являться результатом естественных или искусственных внешних воздействий, превышение координатами вектора состояния заданных пороговых значений и т.д.

Область применения систем со случайной структурой не исчерпывается задачами управления летательными аппаратами. Эти системы являются математическими моделями мультирежимных стохастических систем автоматического управления, для которых характерно скачкообразное изменение отдельных параметров или структуры, т.е. совокупности элементов и связей между ними.

Плотность вероятности вектора состояния системы со случайной структурой является наиболее полной вероятностной характеристикой, для определения которой необходимо интегрировать систему обобщенных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) [1,2]. Методы анализа, основанные на интегрировании обобщенных уравнений ФПК, аналогичны методам анализа стохастических систем с фиксированной структурой [4] и, следовательно, обладают всеми их достоинствами и недостатками. Основное распространение получили методы, в основе которых лежит представление плотности вероятности в виде ряда по ортогональным функциям (метод ортогонального разложения, анализ с использованием семиинвариантов и квазимоментов). Эти методы позволяют перейти от обобщенных уравнений ФПК к системе обыкновенных дифференциальных уравнений достаточно большой размерности, численное интегрирование которой требует значительных временных затрат.

В настоящей статье предлагается новый подход к решению задачи анализа многомерных нелинейных стохастических систем со случайной структурой, в основе которого лежит спектральная форма математического описания систем управления [5–8], позволяющий перейти от системы дифференциальный уравнений в частных производных (обобщенных уравнений ФПК) к системе линейных алгебраических уравнений.

2. Постановка задачи

Пусть каждая структура системы управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито

$$d\mathbf{X}(t)=\mathbf{f}^{<k>}\big(t,\mathbf{X}(t)\big)dt+\boldsymbol{\sigma}^{<k>}\big(t,\mathbf{X}(t)\big)d\mathbf{W}(t),\quad k=1,2,\dots,N, \tag{1}$$

где $\mathbf{X}=\left[X_1 \dots X_n\right]^{\mathrm{T}}\in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния; $\mathbf{W}(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния $\mathbf{X}(t_0)=\mathbf{X}_0$; $t\in T=\left[t_0,t_1\right]$, T – интервал времени функционирования системы, моменты времени t_0 и t_1 заданы; $\mathbf{f}^{<k>}(t,\mathbf{x})$ – вектор-функция размера n, $\boldsymbol{\sigma}^{<k>}(t,\mathbf{x})$ – матричная функция размера $n\times s$; k – номер структуры, N – число структур системы. Начальное состояние системы задается ненормированными плотностями вероятности $\phi_0^{<k>}(\mathbf{x})$, $k=1,2,\dots,N$, при этом

$$\sum_{k=1}^{N}\int_{\mathrm{R}^n}\phi_0^{<k>}(\mathbf{x})d\mathbf{x}=1.$$

Изменение структуры системы определяется дискретным случайным процессом $K(t)\colon\ T\to\{1,2,\dots,N\}$. Будем полагать, что условная вероятность перехода от структуры с номером k к структуре с номером r удовлетворяет условию $\Pr\big(K(t+\Delta t)=r\mid K(t)=k,\mathbf{X}(t)=\mathbf{x}\big)=\lambda_{kr}(t,\mathbf{x})\Delta t+o(\Delta t)$ для всех $k,r=1,2,\dots,N$, $k\neq r$, где функция $\lambda_{kr}(t,\mathbf{x})$ задает интенсивность перехода от структуры k к структуре r. Следует отметить, что начальное состояние для процесса $K(t)$ определяется функциями $\phi_0^{<k>}(\mathbf{x})$, как и начальное состояние для процесса $\mathbf{X}(t)$.

Задача анализа систем со случайной структурой состоит в определении ненормированной плотности вероятности вектора состояния $\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})$ для каждой структуры по заданному уравнению (1), распределению начального состояния $\mathbf{X}_0$ и интенсивностям переходов между структурами.

Заметим, что функция $\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})$ представляет собой совместную плотность вероятности $\phi(t,\mathbf{x},k)$ вектора состояния $\mathbf{X}$ и номера структуры K при фиксированном k.

Известно [1,2], что ненормированные плотности вероятности $\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})$ удовлетворяют обобщенным уравнениям ФПК:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})}{\partial t}&=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f_i^{<k>}(t,\mathbf{x})\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})\Big)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Big(g_{ij}^{<k>}(t,\mathbf{x})\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})\Big)-\\&-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\lambda_{kr}(t,\mathbf{x})\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})+\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\lambda_{rk}(t,\mathbf{x})\phi^{<r>}(t,\mathbf{x}),\end{aligned}\tag{2}$$

с начальными и краевыми условиями

$$\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})\Big|_{t=t_0}=\phi_0^{<k>}(\mathbf{x}),\quad \phi^{<k>}(t,\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\pm\infty}=0, \tag{3}$$

где $g_{ij}^{<k>}(t,\mathbf{x})=\sum_{r=1}^{s}\sigma_{ir}^{<k>}(t,\mathbf{x})\sigma_{jr}^{<k>}(t,\mathbf{x})$, $k=1,2,\dots,N$.

Таким образом, задача анализа систем со случайной структурой сводится к интегрированию системы уравнений в частных производных.

3. Спектральный метод анализа систем со случайной структурой

Будем обозначать через $\mathbf{M}(n_1,n_2)$ многомерную матрицу размерности (n_1+n_2) с элементами $m_{i_1 i_2 \ldots i_{n_1} j_1 j_2 \ldots j_{n_2}}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_{n_1}, j_1, j_2, \ldots, j_{n_2} = 0,1,2,\ldots$, имеющую n_1 строчных и n_2 столбцовых индексов. Основные понятия теории многомерных матриц, операции над ними и их свойства изложены в [9].

Пусть система функций $\left\{ q\left(i_0, t\right) \right\}_{i_0=0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2\left(T\right)$, а $\left\{ p_l\left(i_l, x_l\right) \right\}_{i_l=0}^{\infty}$ – базисом пространства $L_2\left(\mathrm{R}\right)$, $l = 1,\ldots,n$, тогда система функций $\left\{ e\left(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, \mathbf{x}\right) = q\left(i_0, t\right) p_1\left(i_1, x_1\right) \ldots p_n\left(i_n, x_n\right) \right\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2\left(T \times \mathrm{R}^n\right)$. Пусть также $\tilde{n} = n + 1$.

Спектральной характеристикой функции времени и вектора состояния $h\left(t, \mathbf{x}\right) \in L_2\left(T \times \mathrm{R}^n\right)$ будем называть многомерную матрицу $\mathbf{H}\left(\tilde{n}, 0\right) = \left(h_{i_0 i_1 \ldots i_n}\right)$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения функции $h\left(t, \mathbf{x}\right)$ в ряд по функциям базисной системы $\left\{ e\left(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, \mathbf{x}\right) \right\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$, т.е. $h_{i_0 i_1 \ldots i_n} = \left(h\left(t, \mathbf{x}\right), e\left(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, \mathbf{x}\right)\right)_{L_2\left(T \times \mathrm{R}^n\right)}$, где $\left(\,.\, , \,.\, \right)_{L_2\left(T \times \mathrm{R}^n\right)}$ – скалярное произведение в пространстве $L_2\left(T \times \mathrm{R}^n\right)$:

$$\left(u\left(t, \mathbf{x}\right), v\left(t, \mathbf{x}\right)\right)_{L_2\left(T \times \mathrm{R}^n\right)} = \int\limits_{T \times \mathrm{R}^n} u\left(t, \mathbf{x}\right) v\left(t, \mathbf{x}\right) dt d\mathbf{x}, \quad u\left(t, \mathbf{x}\right), v\left(t, \mathbf{x}\right) \in L_2\left(T \times \mathrm{R}^n\right).$$

Таким образом, $S\left[h\left(t, \mathbf{x}\right)\right] = \mathbf{H}\left(\tilde{n}, 0\right)$, где $S\left[\;.\; \right]$ обозначает спектральное преобразование.

Спектральной характеристикой линейного оператора A, заданного на пространстве $L_2\left(T \times \mathrm{R}^n\right)$, будем называть многомерную матрицу $\mathbf{A}\left(\tilde{n}, \tilde{n}\right) = \left(a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n}\right)$, элементы которой вычисляются по правилу $a_{i_0 i_1 \ldots i_n j_0 j_1 \ldots j_n} = \left(e\left(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, \mathbf{x}\right), Ae\left(j_0, j_1, \ldots, j_n, t, \mathbf{x}\right)\right)_{L_2\left(T \times \mathrm{R}^n\right)}$, т.е. $S\left[A\right] = \mathbf{A}\left(\tilde{n}, \tilde{n}\right)$.

Заметим, что спектральные характеристики функций времени и функций вектора состояния, а также линейных операторов, заданных на пространствах функций времени и функций вектора состояния, определяются аналогично.

Обозначим через $\mathbf{P}^t\left(\tilde{n}, \tilde{n}\right)$ спектральную характеристику оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, а через $\mathbf{P}_i^x\left(\tilde{n}, \tilde{n}\right)$ и $\mathbf{P}_{ij}^{xx}\left(\tilde{n}, \tilde{n}\right)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования по координатам вектора состояния первого и второго порядков соответственно. Пусть также $\mathbf{q}\left(1, 0; t_0\right)$ – вектор значений базисных функций $\left\{ q\left(i_0, t\right) \right\}_{i_0=0}^{\infty}$ в точке $t = t_0$; $\mathbf{\Phi}_0^{<k>}\left(n, 0\right)$ – спектральная характеристика ненормированной плотности вероятности начального состояния $\mathbf{X}_0$ для структуры с номером k; $\mathbf{F}_i^{<k>}\left(\tilde{n}, \tilde{n}\right)$, $\mathbf{G}_{ij}^{<k>}\left(\tilde{n}, \tilde{n}\right)$ и $\mathbf{\Lambda}_{kr}\left(\tilde{n}, \tilde{n}\right)$ – спектральные характеристики операторов умножения на функции $f_i^{<k>}\left(t, \mathbf{x}\right)$, $g_{ij}^{<k>}\left(t, \mathbf{x}\right)$ и $\lambda_{kr}\left(t, \mathbf{x}\right)$ соответственно. Спектральную характеристику ненормированной плотности вероятности $\phi^{<k>}\left(t, \mathbf{x}\right)$ будем называть обобщенной характеристической функцией и обозначать $\mathbf{\Phi}^{<k>}\left(\tilde{n}, 0\right)$.

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения (2) с учетом свойства линейности [5,7]:

$$S\left[\frac{\partial\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})}{\partial t}\right]=$$
$$=-\sum_{i=1}^{n}S\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i^{<k>}(t,\mathbf{x})\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})\right)\right]+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}S\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(g_{ij}^{<k>}(t,\mathbf{x})\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})\right)\right]-$$
$$-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}S\left[\lambda_{kr}(t,\mathbf{x})\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})\right]+\sum_{r=1,r\neq k}^{N}S\left[\lambda_{rk}(t,\mathbf{x})\phi^{<r>}(t,\mathbf{x})\right],\quad k=1,2,\ldots,N, \tag{4}$$

и воспользуемся свойствами спектрального преобразования [5,7,8] с учетом условий (3). Тогда

$$S\left[\frac{\partial\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})}{\partial t}\right]=\mathbf{P}^t(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{\Phi}^{<k>}(\tilde{n},0)-\mathbf{q}(1,0;t_0)\otimes\mathbf{\Phi}_0^{<k>}(n,0),$$
$$S\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i^{<k>}(t,\mathbf{x})\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})\right)\right]=\mathbf{P}_i^x(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{F}_i^{<k>}(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{\Phi}^{<k>}(\tilde{n},0),$$
$$S\left[\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(g_{ij}^{<k>}(t,\mathbf{x})\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})\right)\right]=\mathbf{P}_{ij}^{xx}(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{G}_{ij}^{<k>}(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{\Phi}^{<k>}(\tilde{n},0),$$
$$S\left[\lambda_{kr}(t,\mathbf{x})\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})\right]=\mathbf{\Lambda}_{kr}(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{\Phi}^{<k>}(\tilde{n},0).$$

Следовательно, уравнение (4) можно записать в виде

$$\mathbf{P}^t(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{\Phi}^{<k>}(\tilde{n},0)-\mathbf{q}(1,0;t_0)\otimes\mathbf{\Phi}_0^{<k>}(n,0)=$$
$$=-\sum_{i=1}^{n}\mathbf{P}_i^x(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{F}_i^{<k>}(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{\Phi}^{<k>}(\tilde{n},0)+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\mathbf{P}_{ij}^{xx}(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{G}_{ij}^{<k>}(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{\Phi}^{<k>}(\tilde{n},0)-$$
$$-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathbf{\Lambda}_{kr}(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{\Phi}^{<k>}(\tilde{n},0)+\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathbf{\Lambda}_{rk}(\tilde{n},\tilde{n})\cdot\mathbf{\Phi}^{<r>}(\tilde{n},0),\quad k=1,2,\ldots,N. \tag{5}$$

Уравнения (5) называются уравнениями обобщенных характеристических функций и представляют собой систему линейных неоднородных алгебраических уравнений, записанных в матричной форме, неизвестными в которых являются коэффициенты разложения ненормированных плотностей вероятности $\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})$ в ряд по функциям базисной системы $\left\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,\mathbf{x})\right\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Отметим, что спектральные характеристики $\mathbf{P}^t(\tilde{n},\tilde{n})$, $\mathbf{P}_i^x(\tilde{n},\tilde{n})$ и $\mathbf{P}_{ij}^{xx}(\tilde{n},\tilde{n})$ представляются в виде $(i,\ j=1,2,\ldots,n)$:

$$\mathbf{P}^t(\tilde{n},\tilde{n})=\mathbf{P}(1,1)\otimes\underbrace{\mathbf{E}(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathbf{E}(1,1)}_{n},$$
$$\mathbf{P}_i^x(\tilde{n},\tilde{n})=\mathbf{E}(1,1)\otimes\underbrace{\mathbf{E}(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathbf{E}(1,1)}_{n},$$
$$\mathbf{P}_{ij}^{xx}(\tilde{n},\tilde{n})=\begin{cases}\mathbf{E}(1,1)\otimes\underbrace{\mathbf{E}(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_j(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathbf{E}(1,1)}_{n},\ i\neq j,\\ \mathbf{E}(1,1)\otimes\underbrace{\mathbf{E}(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathcal{P}_i^2(1,1)\otimes\ldots\otimes\mathbf{E}(1,1)}_{n},\ i=j,\end{cases}$$

что следует из определения спектральных характеристик линейных операторов и определения тензорного произведения многомерных матриц [9]. Здесь $\mathbf{P}(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования первого рода [5], определенная относительно базисной системы $\left\{q(i_0,t)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$, $\mathbf{E}(1,1)$ – двумерная единичная матрица,

$\mathcal{P}_l(1,1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования второго рода [5], определенная относительно базисной системы $\left\{p_l\left(i_l, x_l\right)\right\}_{i_l=0}^{\infty}$, $l=1,\ldots,n$, $\otimes$ – операция тензорного умножения многомерных матриц [9].

После решения уравнений (5) для получения ненормированной плотности вероятности $\phi^{<k>}(t,\mathbf{x})$ необходимо применить формулу обращения спектральных характеристик [7,8]:

$$\phi^{<k>}(t,\mathbf{x}) = S^{-1}\left[\mathbf{\Phi}^{<k>}(\tilde{n},0)\right] = \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty} \phi^{<k>}_{i_0 i_1 \ldots i_n} e\left(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, \mathbf{x}\right), \quad k=1,2,\ldots,N, \tag{6}$$

где $\phi^{<k>}_{i_0 i_1 \ldots i_n}$ – элементы обобщенной характеристической функции $\mathbf{\Phi}^{<k>}(\tilde{n},0)$.

Здесь следует отметить, что при решении задач спектральным методом на ЭВМ можно оперировать только с конечными матрицами, поэтому спектральные характеристики функций и линейных операторов усекаются по всем измерениям до некоторого порядка, называемого порядком усечения спектральных характеристик. Методика вычисления погрешности расчета, которая является следствием усечения спектральных характеристик, приведена в [5,7].

4. Пример анализа системы со случайной структурой спектральным методом

В качестве примера рассмотрим одномерную релейную следящую систему, структурная схема которой изображена на рис. 1, где $g \equiv 0$, V – стандартный гауссовский белый шум, $T=[0,1]$. В качестве нелинейного элемента используется трехпозиционное реле с зоной нечувствительности:

$$F(\varepsilon) = \begin{cases} 1, & \varepsilon > 0.1, \\ 0, & |\varepsilon| \le 0.1, \\ -1, & \varepsilon < -0.1. \end{cases}$$

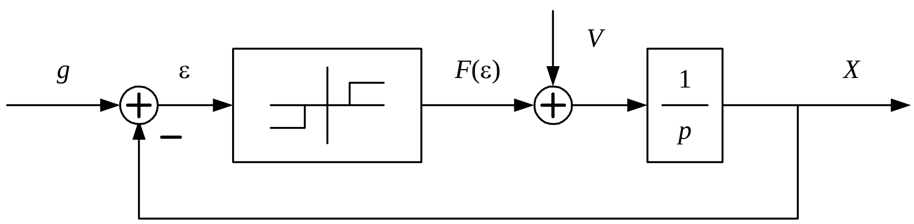


Рис. 1. Релейная следящая система.

Первая структура описывается уравнением $dX(t) = -F(X(t))dt + dW(t)$ и является моделью нормального функционирования системы. Предполагается, что возможен разрыв обратной связи, т.е. вторая структура описывается уравнением $dX(t) = dW(t)$. Интенсивность перехода от первой структуры ко второй постоянна и равна единице, обратный переход невозможен. В начальный момент времени система функционирует нормально, начальное состояние X_0 распределено по стандартному нормальному закону. Требуется найти ненормированные плотности вероятности состояния X для обеих структур.

Из постановки задачи следует, что $n=1$ $(\tilde{n}=2)$, $N=2$, $f^{<1>}(t,x) = -F(x)$, $f^{<2>}(t,x)=0$, $\sigma^{<1>}(t,x)=\sigma^{<2>}(t,x)=1$, $\phi_0^{<1>}(x) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)\exp\left(-x^2/2\right)$, $\phi_0^{<2>}(x)=0$, $\lambda_{12}(t,x)=1$, $\lambda_{21}(t,x)=0$.

Введем следующие обозначения. Пусть $\mathbf{P}^{t}(2,2)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент, $\mathbf{P}^{x}(2,2)$ и $\mathbf{P}^{xx}(2,2)$ – спектральные характеристики операторов дифференцирования первого и второго порядков по переменной x, $\mathbf{F}^{<1>}(2,2)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $f^{<1>}(t,x)$, $\mathbf{\Phi}_{0}^{<1>}(1,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности начального состояния X_0 для первой структуры, $\mathbf{\Phi}^{<1>}(2,0)$ и $\mathbf{\Phi}^{<2>}(2,0)$ – искомые обобщенные характеристические функции. По свойствам спектрального преобразования спектральные характеристики $\mathbf{G}^{<1>}(2,2)$, $\mathbf{G}^{<2>}(2,2)$ и $\mathbf{\Lambda}_{12}(2,2)$ операторов умножения на функции $g^{<1>}(t,x)=\left[\sigma^{<1>}(t,x)\right]^2$, $g^{<2>}(t,x)=\left[\sigma^{<2>}(t,x)\right]^2$ и $\lambda_{12}(t,x)$ соответственно представляют собой четырехмерную единичную матрицу $\mathbf{E}(2,2)$, а спектральные характеристики $\mathbf{F}^{<2>}(2,2)$ и $\mathbf{\Lambda}_{21}(2,2)$ операторов умножения на функции $f^{<2>}(t,x)$ и $\lambda_{21}(t,x)$ соответственно представляют собой четырехмерную нулевую матрицу $\mathbf{O}(2,2)$. Кроме того, так как $\phi_0^{<2>}(x)=0$, спектральная характеристика $\mathbf{\Phi}_0^{<2>}(1,0)$ равна нулевой матрице $\mathbf{O}(1,0)$.

Уравнения обобщенных характеристических функций в рассматриваемом случае примут вид

$$\mathbf{P}^{t}(2,2)\cdot\mathbf{\Phi}^{<1>}(2,0)-\mathbf{q}(1,0;t_0)\otimes\mathbf{\Phi}_0^{<1>}(1,0)=$$

$$=-\mathbf{P}^{x}(2,2)\cdot\mathbf{F}^{<1>}(2,2)\cdot\mathbf{\Phi}^{<1>}(2,0)+0.5\mathbf{P}^{xx}(2,2)\cdot\mathbf{\Phi}^{<1>}(2,0)-\mathbf{\Phi}^{<1>}(2,0),$$

$$\mathbf{P}^{t}(2,2)\cdot\mathbf{\Phi}^{<2>}(2,0)=0.5\mathbf{P}^{xx}(2,2)\cdot\mathbf{\Phi}^{<2>}(2,0)+\mathbf{\Phi}^{<1>}(2,0).$$

Выражая обобщенные характеристические функции $\mathbf{\Phi}^{<1>}(2,0)$ и $\mathbf{\Phi}^{<2>}(2,0)$, получаем решение задачи анализа в спектральной форме математического описания:

$$\mathbf{\Phi}^{<1>}(2,0)=$$

$$=\left[\mathbf{P}^{t}(2,2)+\mathbf{P}^{x}(2,2)\cdot\mathbf{F}^{<1>}(2,2)-0.5\mathbf{P}^{xx}(2,2)+\mathbf{E}(2,2)\right]^{-1}\cdot\left[\mathbf{q}(1,0;t_0)\otimes\mathbf{\Phi}_0^{<1>}(1,0)\right],$$

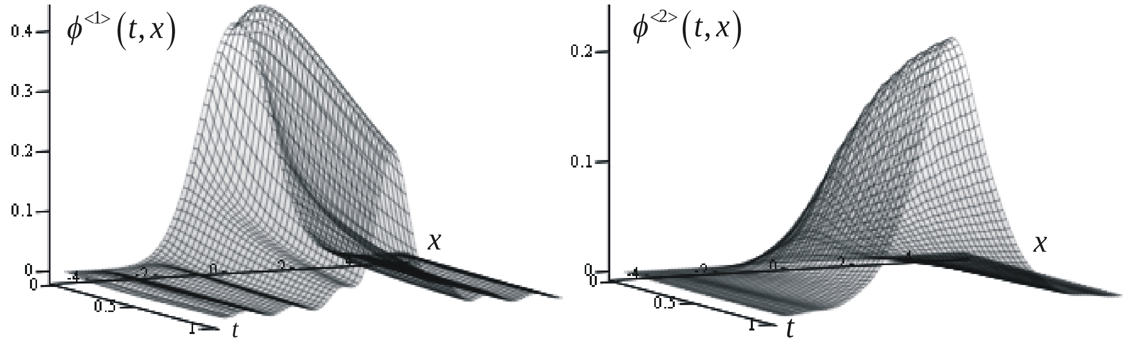
$$\mathbf{\Phi}^{<2>}(2,0)=\left[\mathbf{P}^{t}(2,2)-0.5\mathbf{P}^{xx}(2,2)\right]^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}^{<1>}(2,0).$$

Для перехода в пространственно-временную область необходимо воспользоваться формулой обращения (6), т.е.

$$\phi^{<k>}(t,x)=S^{-1}\left[\mathbf{\Phi}^{<k>}(2,0)\right]=\sum_{i_0,i_1=0}^{\infty}\phi_{i_0 i_1}^{<k>}e(i_0,i_1,t,x),\quad k=1,2,$$

где $\phi_{i_0 i_1}^{<k>}$ – элементы обобщенной характеристической функции $\mathbf{\Phi}^{<k>}(2,0)$, $e(i_0,i_1,t,x)$ – функции выбранной базисной системы пространства $L_2(T\times\mathrm{R})$.

Для численного расчета на ЭВМ выберем в качестве базисной системы $\left\{q(i_0,t)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$ полиномы Лежандра [5], ортонормированные на множестве T, а в качестве базисной системы $\left\{p(i_1,x)\right\}_{i_1=0}^{\infty}$ – функции Эрмита [10], т.е. $e(i_0,i_1,t,x)=q(i_0,t)\,p(i_1,x)$. Порядок усечения спектральных характеристик по каждому измерению положим равным шестнадцати. Результаты вычислений представлены на рис. 2 в виде графиков ненормированных плотностей вероятности $\phi^{<1>}(t,x)$ и $\phi^{<2>}(t,x)$.



а) б)

Рис. 2. Плотность вероятности состояния для первой и второй структуры релейной следящей системы.

Для проверки результатов найдем вероятность разрыва обратной связи двумя способами. Известно, что вероятность $P^{<1>}(t)$ нормального функционирования и вероятность $P^{<2>}(t)$ разрыва обратной связи при заданных параметрах удовлетворяют дифференциальным уравнениям Колмогорова [1]:

$$\begin{cases} \dot{P}^{<1>}(t) = -P^{<1>}(t), \quad P^{<1>}(0) = 1, \\ \dot{P}^{<2>}(t) = P^{<1>}(t), \quad P^{<2>}(0) = 0, \end{cases}$$

т.е. $P^{<2>}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$. С другой стороны

$$P^{<2>}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^{<2>}(t,x)\,dx,$$

где $\phi^{<2>}(t,x)$ – ненормированная плотность вероятности состояния для второй структуры, полученная спектральным методом.

На рис. 3 график функции $P^{<2>}(t)$, полученной спектральным методом, показан сплошной линией, а точное решение $P^{<2>}(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t}$ пунктиром. Из приведенных результатов видно, что спектральный метод обеспечивает приемлемую точность даже при небольших порядках усечения спектральных характеристик.

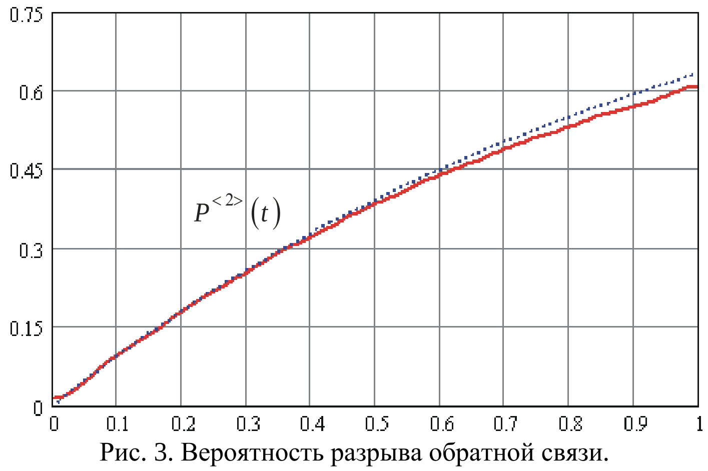


Рис. 3. Вероятность разрыва обратной связи.

5. Заключение

В настоящей работе описан новый метод решения задачи вероятностного анализа многомерных нелинейных систем со случайной структурой, основанный на спектральной форме математического описания систем управления.

Предложенный метод удобен для реализации на ЭВМ и является более универсальным по сравнению с другими методами, основанными на ортогональных разложениях, например, методом моментов, представлением плотности вероятности рядами Грама-Шарлье или Эджуорта [2], поскольку соотношения для решения задачи анализа спектральным методом, во-первых, представляют собой линейные алгебраические уравнения, а во-вторых, они инвариантны к выбору базисных систем и их свойствам.

125993, г. Москва А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4.
МАИ (ГТУ), кафедра 805 “Математическая кибернетика”.
Тел. 158-48-11, e-mail: rkoffice@mail.ru.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ***Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.*** Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993.
2. ***Федосов Е.А., Инсаров В.В., Селивохин О.С.*** Системы управления конечным положением в условиях противодействия среды. М.: Наука, 1989.
3. ***Ghosh M.K., Arapostathis A., Marcus S.I.*** Ergodic control of switching diffusions // SIAM J. Control Optim. 1997. Vol. 35. N. 6. P. 1952–1988.
4. ***Пугачев В.С., Синицын И.Н.*** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990.
5. ***Солодовников В.В., Семенов В.В.*** Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974.
6. ***Семенов В.В.*** Уравнение обобщенной характеристической функции вектора состояния систем автоматического управления // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. науч. сб. Саратов: СПИ, 1977. Вып. 2. С. 3–36.
7. ***Semenov V.V., Sotskova I.L.*** The spectral method for solving Fokker-Planck-Kolmogorov equation for stochastic control system analysis // Proc. of 2nd IFAC symposium on stochastic control. 1986. P. 131–136.
8. ***Сотскова И.Л.*** Применение аппарата обобщенной характеристической функции к анализу стохастических систем управления ЛА // Задачи стохастического управления: Тем. сб. науч. тр. М.: МАИ, 1986. С. 71–78.
9. ***Гришин В.Н., Дятлов В.А., Милов Л.Т.*** Модели, алгоритмы и устройства идентификации сложных систем. Л.: Энергоатомиздат, 1985.
10. ***Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.*** Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал “Труды МАИ”. 2004. № 16. http://www.mai.ru.