Автоматика и телемеханика, № 7, 2006

Стохастические системы

PACS 02.30.Yy

© 2006 г. **К.А. РЫБАКОВ,**
И.Л. СОТСКОВА, канд. физ.-мат. наук
(Московский авиационный институт)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О ВЕКТОРЕ СОСТОЯНИЯ

Получены новые достаточные условия оптимальности в задаче управления нелинейными стохастическими системами со случайной структурой при неполной информации о векторе состояния. Приводятся соотношения для определения оптимального управления как для общего случая минимизируемого функционала, так и для нахождения оптимального в среднем управления.

1. Введение

Системы со случайной структурой являются математическими моделями мультирежимных систем автоматического управления, для которых характерно скачкообразное изменение отдельных параметров или структуры, т.е. совокупности элементов и связей между ними. Модель систем со случайной структурой имеет конечное число состояний, или структур, переключение между которыми происходит в случайные моменты времени с вероятностью, зависящей в общем случае от вектора состояния. В рассматриваемой модели предполагается, что изменение структуры может происходить при любом значении координат вектора состояния. Такие системы называют системами с распределенными переходами [1, 2]. К этому классу относятся, например, система управления следящим радиолокатором со случайной пеленгационной характеристикой, системы поиска и захвата информационного сигнала в задачах навигации и управления полетом летательных аппаратов, системы управления с возможным отказом элементов [1–3].

В [1, 3] рассматривалась задача синтеза оптимального управления с полной обратной связью с учетом смены структуры в случае линейного по плотности вероятности вектора состояния функционала качества. Однако на практике не всегда есть возможность измерения всех координат вектора состояния, и рассмотрение случая, когда функционал качества линеен по плотности вероятности вектора состояния, сужает класс решаемых задач.

В настоящей работе получены достаточные условия оптимальности, основанные на принципе расширения В.Ф. Кротова [4], с использованием методики, предложенной А.В. Пантелеевым для стохастических систем с фиксированной структурой [5]. Другая форма условий оптимальности для таких систем была получена в работах

М.М. Хрусталева [6]. Результаты [5, 6] обобщаются на более широкий класс систем – стохастических мультиструктурных систем управления.

Полученные соотношения позволяют найти оптимальное управление с неполной обратной связью при распределенных переходах между структурами. Функционал качества управления в общем случае является нелинейным по плотности вероятности вектора состояния, как частный случай рассмотрен синтез оптимального в среднем управления. Проанализированы предельные случаи информированности и найдены соотношения для синтеза оптимального программного управления и оптимального управления с полной обратной связью.

2. Постановка задачи

Пусть каждая структура модели стохастической мультиструктурной системы описывается уравнением Ито

$$dX(t) = f^{\langle k\rangle}\big(t, X(t), \mathbf{u}^{\langle k\rangle}(t)\big)dt + \sigma^{\langle k\rangle}\big(t, X(t), \mathbf{u}^{\langle k\rangle}(t)\big)dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $k = 1, 2, \ldots, N$ – номер структуры, N – число структур; $\mathbf{u}^{\langle k\rangle} \in U^{\langle k\rangle} \subseteq \mathbb{R}^q$ – вектор управления структурой с номером k; $t \in T = [t_0, t_1]$, T – промежуток времени функционирования системы, моменты времени t_0 и t_1 заданы; $f^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big)$: $T \times \mathbb{R}^n \times U^{\langle k\rangle} \to \mathbb{R}^n$ – вектор-функция размера n, $\sigma^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big)$: $T \times \mathbb{R}^n \times U^{\langle k\rangle} \to \mathbb{R}^{n\times s}$ – матричная функция размера $n \times s$; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от X_0.

Начальное состояние системы задается ненормированными плотностями вероятности $\phi_0^{\langle k\rangle}(x)$, при этом выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_0^{\langle k\rangle}(x)dx = 1.$$

При управлении используется информация о времени и о величине m первых координат вектора состояния, $0 \leqslant m \leqslant n$, т.е. $X = \big[X_{(1)}X_{(2)}\big]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{u}^{\langle k\rangle}(t) = u^{\langle k\rangle}\big(t, X_{(1)}(t)\big)$, где $X_{(1)} = [X_1X_2 \ldots X_m]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $X_{(2)} = [X_{m+1} \ldots X_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Предполагается, что функции $f^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big)$, $\sigma^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big)$ и $u^{\langle k\rangle}\big(t, x_{(1)}\big)$ удовлетворяют следующим условиям: функции $f_{i,u}^{\langle k\rangle}(t, x) = f_i^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big(t, x_{(1)}\big)\big)$ и $g_{ij,u}^{\langle k\rangle}(t, x) = g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big(t, x_{(1)}\big)\big)$ кусочно-непрерывны по t для всех $x \in \mathbb{R}^n$; при фиксированном $t \in T$ $f_{i,u}^{\langle k\rangle}(t, x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ и $g_{ij,u}^{\langle k\rangle}(t, x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, где $g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big)$ – элементы матричной функции $g^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big) = \sigma^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big)\big[\sigma^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big)\big]^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n)$ – пространство функций, имеющих непрерывные и ограниченные производные порядка $\gamma \leqslant r$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, N$. Далее множество функций $u^{\langle k\rangle}\big(t, x_{(1)}\big)$, удовлетворяющих перечисленным условиям, будем обозначать через $\mathfrak{U}_m^{\langle k\rangle}$.

Вероятность перехода для дискретного случайного процесса смены структуры $K(t): T \to \{1, 2, \ldots, N\}$, характеризующего правую часть уравнения (1), удовлетворяет условию $\mathbb{P}\big(K(t + \Delta t) = r \mid K(t) = k,\ X(t) = x\big) = \lambda_{kr}(t, x)\Delta t + o(\Delta t)$, $k \neq r$, где функция $\lambda_{kr}(t, x): T \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, задающая интенсивность перехода из структуры с номером k в структуру с номером r, непрерывна и ограничена на множестве $T \times (\mathbb{R}^n \backslash Q)$, $Q \subset \mathbb{R}^n$ – множество нулевой меры. Выражения для функций $\lambda_{kr}(t, x)$ могут быть различными в зависимости от существа решаемой задачи [2, 7]. Характер поведения траекторий случайного процесса $X(t)$ в моменты смены структуры определяется заданными нормированными условными плотностями восстановления реализаций $q_{kr}(t, x \mid \widetilde{x})$ [1, 2].

Поглощение реализаций случайного процесса при переходе от структуры с номером k к структуре с номером r характеризуется функцией $b_{kr}(t,x): T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, а восстановление – функцией $h_{kr}(t,x): T \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, и в общем случае они определяются следующим образом [1, 2]:

$$b_{kr}(t,x) = \begin{cases} \mathcal{B}_{kr}(t,x)\phi^{\langle k\rangle}(t,x), \; k \neq r, \\ 0, \; k = r, \end{cases}$$

$$h_{kr}(t,x) = \begin{cases} \mathcal{H}_{kr}(t,x)\phi^{\langle k\rangle}(t,x), \; k \neq r, \\ 0, \; k = r, \end{cases}$$

где $\mathcal{B}_{kr}(t,x)$ и $\mathcal{H}_{kr}(t,x)$ – линейные операторы, $\phi^{\langle k\rangle}(t,x)$ – ненормированная плотность вероятности вектора состояния для структуры с номером k $(k, r = 1, 2, \ldots, N)$.

В рассматриваемом случае оператор $\mathcal{B}_{kr}(t,x)$ задается соотношением

$$\mathcal{B}_{kr}(t,x)\phi^{\langle k\rangle}(t,x) = \lambda_{kr}(t,x)\phi^{\langle k\rangle}(t,x), \quad k \neq r. \tag{2}$$

Оператор $\mathcal{H}_{kr}(t,x)$ в свою очередь выражается через оператор $\mathcal{B}_{kr}(t,x)$:

$$\mathcal{H}_{kr}(t,x)\phi^{\langle k\rangle}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}_{kr}(t,\widetilde{x})\phi^{\langle k\rangle}(t,\widetilde{x})q_{kr}(t,x \mid \widetilde{x})d\widetilde{x}, \quad k \neq r. \tag{3}$$

При условии точного восстановления реализаций [2] случайного процесса $X(t)$ операторы $\mathcal{B}_{kr}(t,x)$ и $\mathcal{H}_{kr}(t,x)$ совпадают и определяются соотношением (2).

Известно [1, 2], что ненормированные плотности вероятности $\phi^{\langle k\rangle}(t,x)$ удовлетворяют обобщенным уравнениям Фоккера – Планка – Колмогорова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial t} &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left[f_i^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big(t,x_{(1)}\big)\big)\phi^{\langle k\rangle}(t,x)\right] + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big(t,x_{(1)}\big)\big)\phi^{\langle k\rangle}(t,x)\right] - \sum_{r=1}^{N} b_{kr}(t,x) + \sum_{r=1}^{N} h_{rk}(t,x), \\ \phi^{\langle k\rangle}(t_0,x) &= \phi_0^{\langle k\rangle}(x), \quad \phi^{\langle k\rangle}(t,x)\Big|_{x=\pm\infty} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \end{aligned} \tag{4}$$

Решение уравнений (4) будем понимать в обобщенном смысле [8]. Таким образом, $\phi^{\langle k\rangle}(t,x) \in W_2^{1,1}(T \times \mathbb{R}^n)$, а $\phi_0^{\langle k\rangle}(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$, где $W_2^{1,1}(T \times \mathbb{R}^n)$ и $W_2^1(\mathbb{R}^n)$ – соответствующие пространства Соболева.

Следует отметить, что уравнения (4) являются уравнениями сохранения вероятности, и поэтому $\mathbb{P}^{\langle 1\rangle}(t) + \ldots + \mathbb{P}^{\langle N\rangle}(t) = 1$, где $\mathbb{P}^{\langle k\rangle}(t)$ – вероятность активности структуры с номером k в момент времени $t \in T$, задаваемая соотношением

$$\mathbb{P}^{\langle k\rangle}(t) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi^{\langle k\rangle}(t,x)dx, \quad k = 1, 2, \ldots, N,$$

причем вероятности $\mathbb{P}_0^{\langle k\rangle} = \mathbb{P}^{\langle k\rangle}(t_0)$ фактически определяют начальное условие для процесса смены структуры $K(t)$.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{U}_m$ множество допустимых плотностей вероятности вектора состояния и множество допустимых управлений соответственно:

$$\mathfrak{F} = \Bigg\{ \phi(x) = \Big[\phi^{\langle 1\rangle}(x) \, \ldots \, \phi^{\langle N\rangle}(x) \Big]^{\mathrm{T}} : \; \phi^{\langle k\rangle}(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^n),$$

$$\phi^{\langle k\rangle}(x) \geqslant 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, N), \quad \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi^{\langle k\rangle}(x) dx = 1 \Bigg\},$$

$$\mathfrak{U}_m = \Big\{ u\big(t, x_{(1)}\big) = \Big[u^{\langle 1\rangle}\big(t, x_{(1)}\big) \, \ldots \, u^{\langle N\rangle}\big(t, x_{(1)}\big) \Big]^{\mathrm{T}} : \; u^{\langle k\rangle}\big(t, x_{(1)}\big) \in \mathfrak{U}_m^{\langle k\rangle} \Big\}.$$

Для последующих рассуждений уравнения (4) удобно переписать в векторно-операторной форме:

$$\frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}_{u\left(t, x_{(1)}\right)} \phi(t,x), \quad \phi(t_0, x) = \phi_0(x), \quad \phi(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = 0, \tag{5}$$

где $\phi(t,x) = \big[\phi^{\langle 1\rangle}(t,x) \ldots \phi^{\langle N\rangle}(t,x)\big]^{\mathrm{T}}$, $\phi_0(x) = \big[\phi_0^{\langle 1\rangle}(x) \ldots \phi_0^{\langle N\rangle}(x)\big]^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{A}_u = \big[\mathcal{A}_{kr}\big]_{k,r=1}^{N}$ – матрица операторов, соответствующих уравнениям (4), т.е.

$$\mathcal{A}_{kk} \phi^{\langle k\rangle}(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big[f_i^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big) \phi^{\langle k\rangle}(t,x) \Big] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Big[g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big) \phi^{\langle k\rangle}(t,x) \Big] - \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathcal{B}_{kr}(t,x) \phi^{\langle k\rangle}(t,x),$$

$$\mathcal{A}_{kr} \phi^{\langle r\rangle}(t,x) = \mathcal{H}_{rk}(t,x) \phi^{\langle r\rangle}(t,x), \quad k, r = 1, 2, \ldots, N, \quad k \neq r.$$

Пусть $\mathfrak{D}_m$ – множество пар $d_m = \big(\phi(t,x), u\big(t, x_{(1)}\big)\big)$ таких, что $\phi(t,x)$ и $u\big(t, x_{(1)}\big) \in$ $\in \mathfrak{U}_m$ удовлетворяют уравнению (5), где $\phi(t,x) \in \mathfrak{F}$ для любого фиксированного $t \in T$. Введем на $\mathfrak{D}_m$ функционал качества:

$$J(\phi_0(x), d_m) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega\big(t, \phi(t,x), u\big(t, x_{(1)}\big)\big) dx dt + \theta(\phi(t_1, x)), \tag{6}$$

где $\omega(t, \phi(t,x), u) : \; T \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ – ограниченная функция, $U = U^{\langle 1\rangle} \times \ldots \times U^{\langle N\rangle}$, а $\theta(\phi) : \; \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ – ограниченный функционал. Функция $\omega(t, \phi(t,x), u)$ и функционал $\theta(\phi)$ заданы.

З а д а ч а 1. Требуется найти такой элемент $d_m^* = \big(\phi^*(t,x), u^*\big(t, x_{(1)}\big)\big) \in \mathfrak{D}_m$, что

$$J(\phi_0(x), d_m^*) = \min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J(\phi_0(x), d_m). \tag{7}$$

З а д а ч а 2. Требуется найти такую синтезирующую функцию $u^*\big(t, x_{(1)}, \phi(x)\big) :$ $T \times \mathbb{R}^m \times \mathfrak{F} \to U$, что

$$J(\phi_0(x), d_m^*) = \min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J(\phi_0(x), d_m) \quad \text{для любых} \quad \phi_0(x) \in \mathfrak{F}. \tag{8}$$

З а м е ч а н и я.

1. Будем предполагать, что минимум в (7) и (8) существует, иначе задачи 1 и 2 можно сформулировать в терминах минимизирующих последовательностей [4, 6].

2. В выражении (8) предполагается, что $d_m = \big(\phi(t,x), u\big(t, x_{(1)}, \phi(t,x)\big)\big)$, где $\phi(t,x)$ удовлетворяет уравнению (5) с начальным условием $\phi(t_0,x) = \phi_0(x)$. Таким образом, минимум ищется для всех допустимых функций $\phi_0(x)$, при этом множество $\mathfrak{D}_m$ зависит от $\phi_0(x)$, однако эта зависимость здесь и далее явно не указана.

3. Достаточные условия оптимальности

Рассмотрим множество $\mathfrak{S}$ функций $S(t,\phi(x)) : T \times \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемых по t на множестве T и имеющих непрерывные вариационные производные $\delta S(t,\phi(\varkappa))/\delta\phi^{\langle k\rangle}(x)$ для всех $k = 1,2,\ldots,N$ [5, 9]. Определим на $\mathfrak{S}$ следующие конструкции:

$$R(t,\phi(x),u) = \frac{\partial S(t,\phi(x))}{\partial t} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\left[\frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta\phi(x)} \right]^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_u \phi(x) - \omega(t,\phi(x),u) \right] dx, \tag{9}$$

$$G(t_1,\phi(x)) = S(t_1,\phi(x)) + \theta(\phi(x)), \tag{10}$$

где $\delta S(t,\phi(\varkappa))/\delta\phi(x) = \big[\delta S(t,\phi(\varkappa))/\delta\phi^{\langle 1\rangle}(x) \;\ldots\; \delta S(t,\phi(\varkappa))/\delta\phi^{\langle N\rangle}(x)\big]^{\mathrm{T}}$.

Предположим, что при некотором заданном m функции $R(t,\phi(x),u)$ и $G(t_1,\phi(x))$ достигают экстремальных значений:

$$\begin{gathered} r_m(t) = \max_{\phi(x)\in\mathfrak{F}} \left\{ \frac{\partial S(t,\phi(x))}{\partial t} + \right. \\ \left. + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \max_{u\in U} \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \left[\phi^{\mathrm{T}}(x) \mathcal{A}_u^* \left[\frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta\phi(x)} \right] - \omega(t,\phi(x),u) \right] dx_{(2)} \right\} dx_{(1)} \right\}, \\ g = \min_{\phi(x)\in\mathfrak{F}} \big\{ S(t_1,\phi(x)) + \theta(\phi(x)) \big\}, \end{gathered} \tag{11}$$

причем в (11) через $\mathcal{A}_u^* = [\mathcal{A}_{rk}^*]_{k,r=1}^N$ обозначена матрица операторов, сопряженных по отношению к операторам $\mathcal{A}_{kr}$, т.е.

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_{kk}^* \psi^{\langle k\rangle}(t,x) = \sum_{i=1}^n f_i^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big) \frac{\partial\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big) \frac{\partial^2 \psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{r=1, r\neq k}^N \mathcal{B}_{kr}^*(t,x)\psi^{\langle k\rangle}(t,x), \\ \mathcal{A}_{rk}^* \psi^{\langle r\rangle}(t,x) = \mathcal{H}_{kr}^*(t,x)\psi^{\langle r\rangle}(t,x), \quad k,r = 1,2,\ldots,N, \quad k \neq r. \end{gathered} \tag{12}$$

Нетрудно видеть, что для любой функции $\psi(t,x) = \big[\psi^{\langle 1\rangle}(t,x) \;\ldots\; \psi^{\langle N\rangle}(t,x)\big]^{\mathrm{T}}$, где $\psi^{\langle k\rangle}(t,x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,2}(T\times\mathbb{R}^n)$, справедливо равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{\mathrm{T}}(t,x) \mathcal{A}_u \phi(t,x) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi^{\mathrm{T}}(t,x) \mathcal{A}_u^* \psi(t,x) dx.$$

Найдем выражения для сопряженных операторов $\mathcal{B}_{kr}^*(t,x)$ и $\mathcal{H}_{kr}^*(t,x)$. Из соотношения (2) следует, что

$$\mathcal{B}_{kr}^*(t,x)\psi^{\langle k\rangle}(t,x) = \lambda_{kr}(t,x)\psi^{\langle k\rangle}(t,x), \quad k \neq r. \tag{13}$$

Далее установим связь между операторами $\mathcal{B}_{kr}^*(t,x)$ и $\mathcal{H}_{kr}^*(t,x)$.

У т в е р ж д е н и е 1. Пусть операторы $\mathcal{B}_{kr}(t,x)$ и $\mathcal{H}_{kr}(t,x)$ связаны соотношением (3). *Тогда*

$$\mathcal{H}^*_{kr}(t,x)\psi^{\langle r\rangle}(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{\langle r\rangle}(t,\widetilde{x})\mathcal{B}^*_{kr}(t,x)q_{kr}(t,\widetilde{x}\mid x)d\widetilde{x}, \quad k\neq r. \tag{14}$$

В частном случае при точном восстановлении реализаций случайного процесса $X(t)$ выражения для операторов $\mathcal{B}^*_{kr}(t,x)$ и $\mathcal{H}^*_{kr}(t,x)$ совпадают.

Т е о р е м а 1. Если существует функция $S(t,\phi(x))\in\mathfrak{S}$ такая, что элемент $d^*_m = \big(\phi^*(t,x),u^*\big(t,x_{(1)}\big)\big)\in\mathfrak{D}_m$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $R\big(t,\phi^*(t,x),u^*\big(t,x_{(1)}\big)\big) = r_m(t)$ *почти всюду на* T,

2) $G(t_1,\phi^*(t_1,x)) = g$,

то справедливо условие (7).

Если $S(t,\phi(x))$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то нетрудно показать, что с помощью замены

$$\widetilde{S}(t,\phi(x)) = S(t,\phi(x)) + \int\limits_t^{t_1} r_m(\tau)d\tau - g$$

$r_m(t)$ и g, соответствующие $\widetilde{S}(t,\phi(x))$, можно положить равными нулю, причем $\widetilde{S}(t,\phi(x))$ будет также удовлетворять условиям теоремы 1. Тогда минимальное значение функционала (6) вычисляется по формуле

$$J(\phi_0(x),d^*_m) = -\widetilde{S}(t_0,\phi_0(x)). \tag{15}$$

Доказательство этого утверждения содержится в [5].

Т е о р е м а 2. Если существуют $S(t,\phi(x))\in\mathfrak{S}$ и $u^*\big(t,x_{(1)},\phi(x)\big)$ такие, что при любых $t\in T$ и $\phi(x)\in\mathfrak{F}$ выполняются следующие условия:

$$1)\quad \frac{\partial S(t,\phi(x))}{\partial t} + \int\limits_{\mathbb{R}^m}\max_{u\in U}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}}\left[\phi^{\mathrm{T}}(x)\mathcal{A}^*_u\left[\frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta\phi(x)}\right] - \omega(t,\phi(x),u)\right]dx_{(2)}\right\}dx_{(1)} = 0,$$

$$2)\quad S(t_1,\phi(x)) + \theta(\phi(x)) = 0,$$

то справедливо условие (8).

Доказательства утверждения 1 и теорем 1 и 2 приведены в Приложении.

4. Соотношения для определения оптимального управления

Пусть $\Psi(t,x,u) = [\phi^*(t,x)]^{\mathrm{T}}\,\mathcal{A}^*_u\,[\delta S(t,\phi^*(t,x))/\delta\phi(x)] - \omega(t,\phi^*(t,x),u)$. Тогда, используя соотношение (11) и первое условие теоремы 1, можно записать структуру оптимального управления:

$$u^*\big(t,x_{(1)}\big) = \arg\max_{u\in U}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}}\Psi(t,x,u)dx_{(2)}\right\}. \tag{16}$$

В частном случае оптимальное программное управление ($m=0$) и управление с полной обратной связью ($m=n$) определяются выражениями

$$u^*(t)=\arg\max_{u\in U}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^n}\Psi(t,x,u)dx\right\},\quad u^*(t,x)=\arg\max_{u\in U}\bigl\{\Psi(t,x,u)\bigr\}.$$

Необходимые условия экстремума в (9) и (10) записываются в форме

$$\delta R\bigl(t,\phi^*(t,x),u^*\bigl(t,x_{(1)}\bigr)\bigr)/\delta\phi(x)=0,\quad \delta G(t_1,\phi^*(t_1,x))/\delta\phi(x)=0.$$

Тогда

$$\frac{\delta S_t(t,\phi^*(t,x))}{\delta\phi(x)}=-\frac{\delta H\bigl(t,\phi^*(t,x),u^*\bigl(t,x_{(1)}\bigr)\bigr)}{\delta\phi(x)},\tag{17}$$

$$\frac{\delta S(t_1,\phi^*(t_1,x))}{\delta\phi(x)}=-\frac{\delta\theta(\phi^*(t_1,x))}{\delta\phi(x)},\tag{18}$$

где $S_t(t,\phi(x))=\partial S(t,\phi(x))/\partial t$, а функция $H(t,\phi(x),u)$ задается выражением

$$H(t,\phi(x),u)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\phi^{\mathrm{T}}(x)\mathcal{A}_u^*\left[\frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta\phi(x)}\right]-\omega(t,\phi(x),u)\right]dx.$$

В (16)–(18) функция $\phi^*(t,x)$ является решением (5). Окончательный вид уравнений (17) и (18) для нахождения оптимального управления зависит от решаемой задачи и, следовательно, от задания функции $S(t,\phi(x))\in\mathfrak{S}$.

Пример. Рассмотрим линейную одномерную двухструктурную стохастическую систему, первая структура которой описывается уравнением $dX(t)=(aX(t)+bu(t))dt+\sigma dW(t)$, а вторая – уравнением $dX(t)=aX(t)dt+\sigma dW(t)$, где $t\in[t_0,t_1]$, $X(t_0)=X_0$, $X,u\in\mathbb{R}$, $a,b\in\mathbb{R}$, $\sigma>0$.

В начальный момент времени задана вероятность активности первой структуры $\mathbb{P}_0^{\langle 1\rangle}$ и среднее значение начального состояния X_0 для первой структуры, равное $\mu_0^{\langle 1\rangle}$. Интенсивность перехода из первой структуры во вторую постоянна и равна $\lambda>0$, а возврат из второго состояния в первое недопустим, т.е. возможен отказ управляющего устройства. Функционал качества является нелинейным по плотности вероятности:

$$J(\phi_0(x),d_m)=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}qu^2(t)\phi^{\langle 1\rangle}(t,x)dxdt+$$
$$+\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\phi^{\langle 1\rangle}(t_1,x)dx\Big/\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\phi^{\langle 1\rangle}(t_1,x)dx-\mu\right]^2,$$

где $q>0$, $\mu\in\mathbb{R}$. Таким образом, терминальный член функционала качества характеризует отклонение среднего значения $X(t_1)$ для первой структуры от заданного уровня μ. Требуется найти оптимальное программное управление.

Поскольку от управления зависит только коэффициент сноса в уравнении первой структуры, то из (16) следует, что

$$u^*(t)=\arg\max_{u\in\mathbb{R}}\left\{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[b\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta\phi^{\langle 1\rangle}(x)}\right]u-\frac{1}{2}qu^2\right]\phi^{\langle 1\rangle}(x)dx\right\}.$$

Будем искать функцию $S(t,\phi(x))$, где $\phi(x) = \big[\phi^{\langle 1\rangle}(x)\ \phi^{\langle 2\rangle}(x)\big]^{\mathrm{T}}$, в виде

$$S(t,\phi(x)) = \frac{1}{2}\xi(t)\big[m^{\langle 1\rangle}\big]^2 + \eta(t)m^{\langle 1\rangle} + \zeta(t), \quad m^{\langle 1\rangle} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\phi^{\langle 1\rangle}(x)dx,$$

где $\xi(t)$, $\eta(t)$, $\zeta(t)$ – неизвестные функции. Тогда $\partial S(t,\phi(x))/\partial t = \dot\xi(t)\big[m^{\langle 1\rangle}\big]^2/2 + \dot\eta(t)m^{\langle 1\rangle} + \dot\zeta(t)$, $\delta S(t,\phi(\varkappa))/\delta\phi^{\langle 1\rangle}(x) = (\xi(t)m^{\langle 1\rangle}+\eta(t))x$, $\partial\big[\delta S(t,\phi(\varkappa))/\delta\phi^{\langle 1\rangle}(x)\big]/\partial x = \xi(t)m^{\langle 1\rangle} + \eta(t)$. Применяя необходимые и достаточные условия экстремума, получаем оптимальную синтезирующую функцию как функционал от $\phi^{\langle 1\rangle}(x)$, т.е. $u^*\big(t,m^{\langle 1\rangle}\big) = (b/q)\big(\partial\big[\delta S(t,\phi(\varkappa))/\delta\phi^{\langle 1\rangle}(x)\big]/\partial x\big) = (b/q)\big(\xi(t)m^{\langle 1\rangle} + \eta(t)\big)$.

Воспользуемся условиями 1 и 2 теоремы 2. Подставим найденные выражения и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $m^{\langle 1\rangle}$, в результате получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot\xi(t) + 2(a-\lambda)\xi(t) + b^2\xi^2(t)\mathbb{P}^{\langle 1\rangle}(t)/q = 0, \quad \xi(t_1) = -2/\big[\mathbb{P}^{\langle 1\rangle}(t_1)\big]^2, \\ \dot\eta(t) + (a-\lambda)\eta(t) + b^2\xi(t)\eta(t)\mathbb{P}^{\langle 1\rangle}(t)/q = 0, \quad \eta(t_1) = 2\mu/\mathbb{P}^{\langle 1\rangle}(t_1), \\ \dot\zeta(t) + b^2\eta^2(t)\mathbb{P}^{\langle 1\rangle}(t)/(2q) = 0, \quad \zeta(t_1) = -\mu^2. \end{cases}$$

Функцию $\mathbb{P}^{\langle 1\rangle}(t)$ определим из дифференциального уравнения Колмогорова $\dot{\mathbb{P}}^{\langle 1\rangle}(t) = -\lambda\mathbb{P}^{\langle 1\rangle}(t)$ (см. [10]), тогда с учетом начального условия $\mathbb{P}^{\langle 1\rangle}(t) = \mathbb{P}_0^{\langle 1\rangle}\mathrm{e}^{-\lambda(t-t_0)}$.

Минимум $J(\phi_0(x),d_m)$ вычисляется по (15) после определения функций $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\zeta(t)$, следовательно, $J(\phi_0(x),d_m^*) = -\xi(t_0)\big[\mathbb{P}_0^{\langle 1\rangle}\mu_0^{\langle 1\rangle}\big]^2/2 - \eta(t_0)\mathbb{P}_0^{\langle 1\rangle}\mu_0^{\langle 1\rangle} - \zeta(t_0)$.

Чтобы найти оптимальное программное управление $u^*(t)$, требуется определить взвешенное математическое ожидание $m^{\langle 1\rangle}(t)$. Для этого воспользуемся уравнением метода двухмоментной параметрической аппроксимации [2], а именно $\dot m^{\langle 1\rangle}(t) = am^{\langle 1\rangle}(t) + \mathbb{P}^{\langle 1\rangle}(t)bu^*\big(t,m^{\langle 1\rangle}(t)\big) - \lambda m^{\langle 1\rangle}(t)$, $m^{\langle 1\rangle}(t_0) = \mathbb{P}_0^{\langle 1\rangle}\mu_0^{\langle 1\rangle}$, интегрируя которое, окончательно получим, что $u^*(t) = u^*\big(t,m^{\langle 1\rangle}(t)\big)$. В частном случае при $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $a = -1$, $b = q = 1$, $\lambda = 1$, $\mu = 1$, $m_0^{\langle 1\rangle} = 0$ и $\mathbb{P}_0^{\langle 1\rangle} = 1$ оптимальная синтезирующая функция имеет вид

$$u^*\Big(t,\phi^{\langle 1\rangle}(x)\Big) = \frac{-6\mathrm{e}^{4t}}{2\mathrm{e}^3+3\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^{3t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\phi^{\langle 1\rangle}(x)dx + \frac{6\mathrm{e}^{2t+1}}{2\mathrm{e}^3+3\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^{3t}},$$

а $u^*(t) = -6\mathrm{e}^{2t+1}\big[2(\mathrm{e}^{3t}-1)/(2\mathrm{e}^3+3\mathrm{e}^2-2)-1\big]/(2\mathrm{e}^3+3\mathrm{e}^2-2\mathrm{e}^{3t})$, при этом минимальное значение функционала качества равно $3\mathrm{e}^2/(2\mathrm{e}^3+3\mathrm{e}^2-2)$.

5. Синтез оптимального в среднем управления

Пусть заданы ограниченные функции $\omega^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big):\ T\times\mathbb{R}^n\times U^{\langle k\rangle}\to\mathbb{R}$ и $\theta^{\langle k\rangle}(x):\ \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $k = 1,2,\ldots,N$. Рассмотрим случай, когда функционал (6) является линейным по плотности вероятности:

$$(19)\qquad J(\phi_0(x),d_m) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat\omega^{\mathrm{T}}\big(t,x,u\big(t,x_{(1)}\big)\big)\phi(t,x)dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\widehat\theta^{\mathrm{T}}(x)\phi(t_1,x)dx,$$

где $\widehat{\omega}(t,x,u) = \big[\omega^{\langle 1\rangle}\big(t,x,u^{\langle 1\rangle}\big)\ \dots\ \omega^{\langle N\rangle}\big(t,x,u^{\langle N\rangle}\big)\big]^{\mathrm{T}}$, $\widehat{\theta}(x) = \big[\theta^{\langle 1\rangle}(x)\ \dots\ \theta^{\langle N\rangle}(x)\big]^{\mathrm{T}}$, т.е.

$$\omega(t,\phi(t,x),u) = \widehat{\omega}^{\mathrm{T}}(t,x,u)\phi(t,x), \quad \theta(\phi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \widehat{\theta}^{\mathrm{T}}(x)\phi(x)dx.$$

Будем искать $S(t,\phi(x)) \in \mathfrak{S}$ в виде

$$S(t,\phi(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{\mathrm{T}}(t,x)\phi(x)dx = \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{\langle k\rangle}(t,x)\phi^{\langle k\rangle}(x)dx, \tag{20}$$

где $\psi(t,x) = \big[\psi^{\langle 1\rangle}(t,x)\ \dots\ \psi^{\langle N\rangle}(t,x)\big]^{\mathrm{T}}$ – неизвестная функция такая, что $\psi^{\langle k\rangle}(t,x)$ является элементом пространства $W_2^{1,2}(T\times\Omega)$ при любом $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируема по t, $k=1,2,\dots,N$.

Известно [9], что для функции $S(t,\phi(x))$, заданной выражением (20), $\delta S(t,\phi(\varkappa))/ /\delta\phi(x) = \psi(t,x)$, поэтому

$$H(t,\phi(x),u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi^{\mathrm{T}}(x)\big[\mathcal{A}_u^*\psi(t,x) - \widehat{\omega}(t,x,u)\big]dx.$$

Кроме того, $\delta S_t(t,\phi(\varkappa))/\delta\phi(x) = \partial\psi(t,x)/\partial t$, $\delta H(t,\phi(\varkappa),u)/\delta\phi(x) = \mathcal{A}_u^*\psi(t,x) - -\widehat{\omega}(t,x,u)$, $\delta S(t_1,\phi(\varkappa))/\delta\phi(x) = \psi(t_1,x)$, $\delta\theta(\phi(\varkappa))/\delta\phi(x) = \widehat{\theta}(x)$. Принимая во внимание, что от управления зависят только диагональные элементы матрицы $\mathcal{A}_u^*$, из (12) и (16) получаем структуру оптимального управления:

$$u^{*\langle k\rangle}\big(t,x_{(1)}\big) = \arg\max_{u^{\langle k\rangle}\in U^{\langle k\rangle}} \Bigg\{ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} f_i^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i} + \tag{21}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial^2\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j} - \omega^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\Bigg]\phi^{*\langle k\rangle}_{(2|1)}\big(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\big)dx_{(2)}\Bigg\},$$

где

$$\phi^{*\langle k\rangle}_{(2|1)}\big(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\big) = \frac{\phi^{*\langle k\rangle}(t,x)}{\phi^{*\langle k\rangle}_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big)},$$
$$\phi^{*\langle k\rangle}_{(1)}\big(t,x_{(1)}\big) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \phi^{*\langle k\rangle}(t,x)dx_{(2)}, \quad k=1,2,\dots,N.$$

Учитывая полученные выражения и уравнения (5), (17), (18), можно записать соотношения для определения функций $\phi^*(t,x)$ и $\psi(t,x)$:

$$\frac{\partial\phi^*(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}_{u^*\left(t,x_{(1)}\right)}\phi^*(t,x), \quad \phi^*(t_0,x) = \phi_0(x), \quad \phi^*(t,x)\big|_{x=\pm\infty} = 0,$$
$$\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = -\mathcal{A}^*_{u^*\left(t,x_{(1)}\right)}\psi(t,x) + \widehat{\omega}\big(t,x,u^*\big(t,x_{(1)}\big)\big), \quad \psi(t_1,x) = -\widehat{\theta}(x).$$

В координатной форме эти уравнения примут вид

$$
\begin{aligned}
(22)\qquad & \frac{\partial \phi^{*\langle k\rangle}(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \Big[f_i^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{*\langle k\rangle}\big(t,x_{(1)}\big)\big)\phi^{*\langle k\rangle}(t,x)\Big] + \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Big[g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{*\langle k\rangle}\big(t,x_{(1)}\big)\big)\phi^{*\langle k\rangle}(t,x)\Big] - \\
& - \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathcal{B}_{kr}(t,x)\phi^{*\langle k\rangle}(t,x) + \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathcal{H}_{rk}(t,x)\phi^{*\langle r\rangle}(t,x), \\
& \phi^{*\langle k\rangle}(t_0,x) = \phi_0^{\langle k\rangle}(x), \quad \phi^{*\langle k\rangle}(t,x)\Big|_{x=\pm\infty} = 0, \quad k=1,2,\ldots,N;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(23)\qquad & \frac{\partial \psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} f_i^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{*\langle k\rangle}\big(t,x_{(1)}\big)\big)\frac{\partial \psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i} + \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{*\langle k\rangle}\big(t,x_{(1)}\big)\big)\frac{\partial^2 \psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} - \omega^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{*\langle k\rangle}\big(t,x_{(1)}\big)\big) - \\
& - \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathcal{B}^*_{kr}(t,x)\psi^{\langle k\rangle}(t,x) + \sum_{r=1, r\neq k}^{N} \mathcal{H}^*_{kr}(t,x)\psi^{\langle r\rangle}(t,x) = 0, \\
& \psi^{\langle k\rangle}(t_1,x) = -\theta^{\langle k\rangle}(x), \quad k=1,2,\ldots,N.
\end{aligned}
$$

Таким образом, для определения оптимального управления необходимо решить систему (22), (23) с учетом (2), (3), (13), (14) и (21). После определения функций $\psi^{\langle k\rangle}(t,x)$ по (15) можно вычислить минимум функционала (19):

$$
J(\phi_0(x), d_m^*) = -\int_{\mathbb{R}^n} \psi^{\mathrm{T}}(t_0,x)\phi_0(x)dx = -\sum_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} \psi^{\langle k\rangle}(t_0,x)\phi_0^{\langle k\rangle}(x)dx.
$$

Рассмотрим предельные случаи информированности. Пусть $m=0$, тогда структура оптимального программного управления имеет вид

$$
\begin{aligned}
(24)\qquad & u^{*\langle k\rangle}(t) = \arg\max_{u^{\langle k\rangle}\in U^{\langle k\rangle}} \Bigg\{ \int_{\mathbb{R}^n} \Bigg[\sum_{i=1}^{n} f_i^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial \psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i} + \\
& + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial^2 \psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} - \omega^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big) \Bigg] \phi^{*\langle k\rangle}(t,x)dx \Bigg\},
\end{aligned}
$$

причем соотношения (22)–(24) аналогичны уравнениям стохастического принципа максимума для систем с фиксированной структурой [5]. При $m=n$ для определения оптимального управления с полной обратной связью требуется решить следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений (обобщенных уравнений

Беллмана [1]):

$$
(25)\qquad \max_{u^{\langle k\rangle}\in U^{\langle k\rangle}}\left\{\frac{\partial\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} f_i^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i}+\right.
$$

$$
+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial^2\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-\omega^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)-
$$

$$
\left.-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathcal{B}_{kr}^{*}(t,x)\psi^{\langle k\rangle}(t,x)+\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\mathcal{H}_{kr}^{*}(t,x)\psi^{\langle r\rangle}(t,x)\right\}=0,
$$

$$
\psi^{\langle k\rangle}(t_1,x)=-\theta^{\langle k\rangle}(x),\quad k=1,2,\ldots,N.
$$

Структура оптимального управления с полной обратной связью:

$$
u^{*\langle k\rangle}(t,x)=\arg\max_{u^{\langle k\rangle}\in U^{\langle k\rangle}}\left\{\sum_{i=1}^{n} f_i^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i}+\right.
$$

$$
\left.+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial^2\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-\omega^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\right\}.
$$

Для нахождения управления с полной обратной связью нет необходимости решать систему уравнений (22), а система уравнений (25) по форме аналогична уравнению Беллмана для стохастических систем с фиксированной структурой [5].

Замечание. Соотношения (17) и (18) получены с использованием только необходимых условий экстремума, поэтому после решения задачи (21)–(23) нужны дополнительные исследования, однако из теоремы 2 и (19), (20) при $m=n$ следует, что для синтеза оптимального управления с полной обратной связью достаточно решить систему уравнений (25), так как в этом случае справедливы равенства

$$
\sum_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^n}\phi^{\langle k\rangle}(x)\left[\frac{\partial\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial t}+\max_{u^{\langle k\rangle}\in U^{\langle k\rangle}}\left\{\sum_{r=1}^{N}\mathcal{A}_{rk}^{*}\psi^{\langle r\rangle}(t,x)-\omega^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\right\}\right]dx=0,
$$

$$
\sum_{k=1}^{N}\int_{\mathbb{R}^n}\phi^{\langle k\rangle}(x)\big[\psi^{\langle k\rangle}(t_1,x)+\theta^{\langle k\rangle}(x)\big]dx=0
$$

для произвольной функции $\phi(x)=\big[\phi^{\langle 1\rangle}(x)\ \ldots\ \phi^{\langle N\rangle}(x)\big]^{\mathrm{T}}\in\mathfrak{F}$.

6. Заключение

В настоящей работе получены достаточные условия оптимальности для стохастических систем со случайной структурой при распределенных переходах в случае нелинейного по плотности вероятности вектора состояния функционала качества и в предположении, что управление зависит от части координат вектора состояния. Следует отметить, что форма обобщенных уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова при сосредоточенных переходах, т.е. в том случае, когда изменение структуры происходит при достижении вектором состояния заданной гиперповерхности в пространстве $\mathbb{R}^n$, такая же, как и при распределенных, – изменяется лишь выражение, задающее оператор $\mathcal{B}_{kr}(t,x)$. Таким образом, соотношения для определения оптимального управления при сосредоточенных переходах будут в целом аналогичны приведенным выше, в частности, при полной информированности о векторе состояния и линейном по плотности вероятности функционале качества такие соотношения были получены В.М. Артемьевым [1].

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность профессору А.В. Пантелееву за постоянное внимание к этой работе и ряд замечаний, несомненно, способствовавших ее улучшению.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство утверждения 1. По определению для любых функций $\psi(t,x) = \left[\psi^{\langle 1\rangle}(t,x)\ \dots\ \psi^{\langle N\rangle}(t,x)\right]^{\mathrm{T}}$, где $\psi^{\langle k\rangle}(t,x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^{1,2}(T \times \mathbb{R}^n)$, выполняются равенства

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{\langle r\rangle}(t,x)\mathcal{B}_{kr}(t,x)\phi^{\langle k\rangle}(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi^{\langle k\rangle}(t,x)\mathcal{B}^*_{kr}(t,x)\psi^{\langle r\rangle}(t,x)dx,$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{\langle r\rangle}(t,x)\mathcal{H}_{kr}(t,x)\phi^{\langle k\rangle}(t,x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi^{\langle k\rangle}(t,x)\mathcal{H}^*_{kr}(t,x)\psi^{\langle r\rangle}(t,x)dx,$$

где $k, r = 1, 2, \dots, N$, $k \neq r$.

Подставляя в левую часть последнего равенства выражение (3), используя первое равенство и меняя порядок интегрирования, получаем следующую цепочку тождественных преобразований:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{\langle r\rangle}(t,x)\mathcal{H}_{kr}(t,x)\phi^{\langle k\rangle}(t,x)dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{\langle r\rangle}(t,x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathcal{B}_{kr}(t,\widetilde{x})\phi^{\langle k\rangle}(t,\widetilde{x})q_{kr}(t,x \mid \widetilde{x})d\widetilde{x}dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{\langle r\rangle}(t,x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi^{\langle k\rangle}(t,\widetilde{x})\mathcal{B}^*_{kr}(t,\widetilde{x})q_{kr}(t,x \mid \widetilde{x})d\widetilde{x}dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi^{\langle k\rangle}(t,\widetilde{x}) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{\langle r\rangle}(t,x)\mathcal{B}^*_{kr}(t,\widetilde{x})q_{kr}(t,x \mid \widetilde{x})dxd\widetilde{x}.$$

Отсюда следует справедливость (14).

Доказательство теорем 1 и 2 аналогично доказательству теорем о достаточных условиях оптимальности для стохастических систем с фиксированной структурой [5].

Доказательство теоремы 1. Применим принцип расширения В.Ф. Кротова. Пусть $\mathfrak{V}$ – множество пар $\big(\phi(t,x), u\big(t,x_{(1)}\big)\big)$, которые необязательно удовлетворяют уравнению (5), пусть также функции $\phi(t,x)$ и $u\big(t,x_{(1)}\big)$ могут иметь разрывы первого рода. Определим функционал качества на $\mathfrak{V}$:

$$L(\phi_0(x), d_m) = G(t_1, \phi(t_1,x)) - \int\limits_{t_0}^{t_1} R\big(t, \phi(t,x), u\big(t,x_{(1)}\big)\big)dt - S(t_0, \phi_0(x)),$$

тогда с учетом (9) и (10) имеем

$$L(\phi_0(x),d_m) = S(t_1,\phi(t_1,x)) + \theta(\phi(t_1,x)) - S(t_0,\phi_0(x)) -$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial S(t,\phi(t,x))}{\partial t} + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\left[\frac{\delta S(t,\phi(t,x))}{\delta\phi(x)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_{u\left(t,x_{(1)}\right)}\phi(t,x) - \omega\bigl(t,\phi(t,x),u\bigl(t,x_{(1)}\bigr)\bigr)\right]dx\right]dt.$$

Рассмотрим значения этого функционала на множестве $\mathfrak{D}_m$. Элементы $d_m \in \mathfrak{D}_m$ удовлетворяют уравнению (5), поэтому $\mathcal{A}_{u\left(t,x_{(1)}\right)}\phi(t,x) = \partial\phi(t,x)/\partial t$. Кроме того, полная производная функции $S(t,\phi(t,x))$ по времени вычисляется по правилу [9]:

$$\frac{dS(t,\phi(t,x))}{dt} = \frac{\partial S(t,\phi(t,x))}{\partial t} + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\delta S(t,\phi(t,x))}{\delta\phi(x)}\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}dx.$$

Следовательно,

$$L(\phi_0(x),d_m) = S(t,\phi(t,x))\Big|_{t_0}^{t_1} - \int\limits_{t_0}^{t_1}\frac{dS(t,\phi(t,x))}{dt}dt +$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\omega\bigl(t,\phi(t,x),u\bigl(t,x_{(1)}\bigr)\bigr)dxdt + \theta(\phi(t_1,x)) = J(\phi_0(x),d_m),$$

т.е. значения функционалов $J(\phi_0(x),d_m)$ и $L(\phi_0(x),d_m)$ совпадают на множестве $\mathfrak{D}_m$.

Для вычисления минимума функционала $L(\phi_0(x),d_m)$ достаточно вычислить минимумы его слагаемых, что следует из свойств множества $\mathfrak{V}$. Тогда

$$\min_{d_m\in\mathfrak{V}} L(\phi_0(x),d_m) = \min_{d_m\in\mathfrak{V}} G(t_1,\phi(t_1,x)) - \max_{d_m\in\mathfrak{V}}\int\limits_{t_0}^{t_1} R\bigl(t,\phi(t,x),u\bigl(t,x_{(1)}\bigr)\bigr)dt -$$
$$- S(t_0,\phi_0(x)) \geqslant g - \int\limits_{t_0}^{t_1} r_m(t)dt - S(t_0,\phi_0(x)),$$

так как

$$\max_{d_m\in\mathfrak{V}}\int\limits_{t_0}^{t_1} R\bigl(t,\phi(t,x),u\bigl(t,x_{(1)}\bigr)\bigr)dt \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_1} r_m(t)dt.$$

Таким образом, если элемент $d_m^* \in \mathfrak{D}_m$ удовлетворяет условиям теоремы, то $L(\phi_0(x),d_m^*) = \min\limits_{d_m\in\mathfrak{V}} L(\phi_0(x),d_m)$. Следовательно, $J(\phi_0(x),d_m^*) = \min\limits_{d_m\in\mathfrak{D}_m} J(\phi_0(x),d_m)$, так как $\mathfrak{D}_m \subset \mathfrak{V}$ и для всех $d_m \in \mathfrak{D}_m$ справедливо $J(\phi_0(x),d_m) = L(\phi_0(x),d_m)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть $u^*\bigl(t,x_{(1)},\phi(x)\bigr)$ – оптимальная синтезирующая функция, а $\phi_0(x)$ – произвольная функция из множества $\mathfrak{F}$. Тогда, решая (5) с учетом оптимальной синтезирующей функции, получаем функцию $\phi^*(t,x)$.

Рассмотрим значение функционала $J(\phi_0(x),d_m)$. Воспользуемся определением функционала $L(\phi_0(x),d_m)$, так как $J(\phi_0(x),d_m) = L(\phi_0(x),d_m)$ на множестве $\mathfrak{D}_m$ (см. доказательство теоремы 1). Из условия 2 следует, что $G(t_1,\phi^*(t_1,x)) = 0$, кроме того, $R\bigl(t,\phi^*(t,x),u^*\bigl(t,x_{(1)},\phi^*(t,x)\bigr)\bigr) = 0$ вследствие условия 1, т.е. $J(\phi_0(x),d_m^*) =$

$= -S(t_0, \phi_0(x))$, где $d_m^* = \big(\phi^*(t,x), u^*\big(t, x_{(1)}, \phi^*(t,x)\big)\big)$. Пусть элемент $d'_m = \big(\phi'(t,x), u'\big(t, x_{(1)}\big)\big) \in \mathfrak{D}_m$ такой, что функция $\phi'(t,x)$ удовлетворяет (5) с тем же начальным условием, тогда $G(t_1, \phi'(t_1,x)) = 0$, $R\big(t, \phi'(t,x), u'\big(t, x_{(1)}\big)\big) \leqslant 0$. Следовательно, $J(\phi_0(x), d_m^*) \leqslant J(\phi_0(x), d'_m)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Казаков И.Е., Артемьев В.М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры. М.: Наука, 1980.
2. *Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А.* Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993.
3. *Ghosh M.K., Arapostathis A., Marcus S.I.* Optimal control of switching diffusions with application to flexible manufacturing systems // SIAM J. Control Optim. 1993. V. 31. № 6. P. 1183–1204.
4. *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.
5. *Пантелеев А.В., Семенов В.В.* Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 1992.
6. *Савастюк С.В., Хрусталев М.М.* Оптимизация стохастических систем диффузионного типа с ограничениями на процесс управления-наблюдения // АиТ. 1991. № 7. С. 89–96; № 8. С. 94–100.
7. *Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д.* Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965.
8. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967.
9. *Авербух В.И., Смолянов О.Г.* Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // УМН. 1967. Т. XXII. Вып. 6 (138). С. 201–260.
10. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2002.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Б.Т. Поляком.

Поступила в редакцию 27.12.2004