

УДК 519.977

## Синтез оптимальных систем с переменной структурой при неполной информации

К.А. Рыбаков, И.Л. Сотскова

*Рассматривается новый подход к решению задачи синтеза оптимальных многомерных нелинейных стохастических систем с переменной структурой при неполной информации о векторе состояния, сформулированы достаточные условия оптимальности. Приводятся соотношения для определения оптимального управления как для общего случая, так и для нахождения оптимального в среднем управления.*

### Постановка задачи

Система описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$\begin{aligned} dX &= f^{<k>}(t, X(t), U^{<k>}(t))dt + \sigma^{<k>}(t, X(t), U^{<k>}(t))dW, \quad k = 1, 2, \dots, N; \\ X(t_0) &= X_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $X \in \mathbb{R}^n$  – вектор состояния,  $k$  – номер структуры,  $U^{<k>} \in Q_U^{<k>} \subseteq \mathbb{R}^q$  – вектор управления  $k$ -ой структурой,  $Q_U = Q_U^{<1>} \times Q_U^{<2>} \times \dots \times Q_U^{<N>}$ ,  $W(t)$  –  $s$ -мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от  $X_0$ ;  $f^{<k>}(t, x, U)$  – вектор-функция размера  $n \times 1$ ,  $\sigma^{<k>}(t, x, U)$  – матричная функция размера  $n \times s$ ,  $N$  – число структур,  $t \in T = (t_0, t_1)$ .

Начальное состояние системы  $X_0$  задается плотностью вероятности  $p_0^{<k>}(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ).

Поглощение и восстановление реализаций случайного процесса характеризуется функциями  $v_{kr}(t, x)$  и  $u_{rk}(t, x)$  соответственно ( $k, r = 1, 2, \dots, N$ ), и в общем случае они определяются так:

$$\begin{aligned} v_{kr}(t, x) &= \begin{cases} \mathcal{V}_{kr}(t, x) p^{<k>}(t, x), & k \neq r, \\ 0, & k = r, \end{cases} \\ u_{rk}(t, x) &= \begin{cases} \mathcal{U}_{rk}(t, x) p^{<r>}(t, x), & k \neq r, \\ 0, & k = r, \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\mathcal{V}_{kr}(t, x)$  и  $\mathcal{U}_{rk}(t, x)$  – некоторые линейные безынерционные операторы, возможные аналитические выражения для которых подробно рассмотрены в [2,3],  $p^{<k>}(t, x) = p(t, x, k)$  – совместная плотность вероятности смешанного вектора состояния  $(X \ K)^T$ , состоящего из компонентов вектора  $X$  и номера структуры.

В случае восстановления реализаций случайного процесса без потерь выполняется равенство

$$v_{kr}(t, x) = u_{kr}(t, x) \quad (k, r = 1, 2, \dots, N). \quad (3)$$

При управлении используется информация о времени и о величине  $m$  первых компонент вектора состояния, т.е.  $X = (X_{(1)} \ X_{(2)})^T$ ,  $U^{<k>}(t) = U^{<k>}(t, X_{(1)}(t))$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), где  $X_{(1)} = (X_1 \ X_2 \ \dots \ X_m)^T \in \mathbb{R}^m$ ,  $X_{(2)} = (X_{m+1} \ \dots \ X_n)^T \in \mathbb{R}^{n-m}$ .

Множество допустимых управлений  $k$ -ой структурой  $\mathfrak{U}_m^{<k>}$  состоит из функций  $U^{<k>}(t, x_{(1)}): \bar{T} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{Q}_U^{<k>}$  таких, что  $f_i^{<k>}(t, x, U^{<k>}(t, x_{(1)}))$ ,  $\sigma_{ir}^{<k>}(t, x, U^{<k>}(t, x_{(1)}))$  кусочно-непрерывны по  $t$ ,  $\forall t \in \bar{T}$   $f_i^{<k>}(t, x, U^{<k>}(t, x_{(1)})) \in C^1(\mathbb{R}^n)$  и имеют ограниченные первые производные по  $x$ ,  $\sigma_{ir}^{<k>}(t, x, U^{<k>}(t, x_{(1)})) \in C^2(\mathbb{R}^n)$  и имеют ограниченные первые и вторые производные по  $x$ , а также  $\exists c > 0$  такая, что  $\forall t \in \bar{T}, \forall x, z \in \mathbb{R}^n$   $\sum_{i,j=1}^n g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{<k>}(t, x_{(1)})) z_i z_j \geq c \|z\|^2$ , где  $g_{ij}^{<k>}(t, x, U) = \sum_{r=1}^s \sigma_{ir}^{<k>}(t, x, U) \sigma_{jr}^{<k>}(t, x, U)$  – элементы матрицы диффузии ( $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $r = 1, 2, \dots, s$ ;  $k = 1, 2, \dots, N$ ) (см. [6,8]).

Совместная плотность вероятности  $p^{<k>}(t, x)$  удовлетворяет обобщенному уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) [2,3]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{<k>}(t, x)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (f_i^{<k>}(t, x, U^{<k>}) p^{<k>}(t, x)) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{<k>}) p^{<k>}(t, x)) - \sum_{r=1}^N v_{kr}(t, x) + \sum_{r=1}^N u_{rk}(t, x), \end{aligned} \quad (4)$$

$k = 1, 2, \dots, N$ .

Начальные и краевые условия для обобщенного уравнения ФПК:

$$\begin{aligned} p^{<k>}(t, x) \Big|_{t=t_0} &= p_0^{<k>}(x), \\ p^{<k>}(t, x) \Big|_{|x|=\pm\infty} &= 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$k = 1, 2, \dots, N$ .

Введем следующие классы функций: множество допустимых плотностей

$$\mathfrak{P} = \left\{ p(x) = \begin{pmatrix} p^{<1>}(x) \\ \dots \\ p^{<N>}(x) \end{pmatrix} : p^{<k>}(x) \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N), \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} p^{<k>}(x) dx = 1 \right\}$$

и множество допустимых управлений

$$\mathfrak{U}_m = \left\{ U(t, x_{(1)}) = \begin{pmatrix} U^{<1>}(t, x_{(1)}) \\ \dots \\ U^{<N>}(t, x_{(1)}) \end{pmatrix} : U^{<k>}(t, x_{(1)}) \in \mathfrak{U}_m^{<k>}, k = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

Задачу (4), (5) можно переписать в векторной форме:

$$\frac{\partial p(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}_U p(t, x), \quad (6)$$

$$p(t, x)|_{t=t_0} = p_0(x) \in \mathfrak{P}, \quad (7)$$

$$p(t, x)|_{x=\pm\infty} = 0,$$

где

$$\mathcal{A}_U = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11} & \dots & \mathcal{A}_{1N} \\ \dots & & \dots \\ \mathcal{A}_{N1} & \dots & \mathcal{A}_{NN} \end{pmatrix}, p(t, x) = \begin{pmatrix} p^{<1>}(t, x) \\ \dots \\ p^{<N>}(t, x) \end{pmatrix}, U(t, x_{(1)}) \in \mathfrak{U}_m.$$

Из (2), (4) следует, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{kk} p^{<k>}(t, x) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( f_i^{<k>}(t, x, U^{<k>}) p^{<k>}(t, x) \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{<k>}) p^{<k>}(t, x) \right) - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \mathcal{V}_{kr}(t, x) p^{<k>}(t, x) \quad (k = 1, 2, \dots, N), \end{aligned} \quad (8)$$

$$\mathcal{A}_{kr} p^{<r>}(t, x) = \mathcal{U}_{rk}(t, x) p^{<r>}(t, x) \quad (k, r = 1, 2, \dots, N; k \neq r).$$

Пусть  $\mathfrak{D}_m = \left\{ d_m : d_m = \left( p(t, x), U(t, x_{(1)}) \right) \right\}$ , где  $p(t, x) \in \mathfrak{P}$  (при фиксированном  $t$ ) и

$U(t, x_{(1)}) \in \mathfrak{U}_m$  удовлетворяют уравнению (4). Введем на  $\mathfrak{D}_m$  функционал качества:

$$J(p_0(x), d_m) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} \omega(t, p(t, x), U(t, x_{(1)})) dx dt + \theta(p(t_1, x)). \quad (9)$$

**Задача 1.** Требуется найти такой элемент  $d_m^* = \left( p^*(t, x), U^*(t, x_{(1)}) \right) \in \mathfrak{D}_m$ , что

$$J(p_0(x), d_m^*) = \min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J(p_0(x), d_m). \quad (10)$$

**Задача 2.** Требуется найти такую синтезирующую функцию  $U^*(t, x_{(1)}) = U^*(t, x_{(1)}, p(x))$ , что

$$J(p_0(x), d_m^*) = \min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J(p_0(x), d_m) \quad \forall p_0(x) \in \mathfrak{P}, \quad (11)$$

т.е. оптимальная синтезирующая функция является функционалом по плотности вероятности  $p(x)$ .

### Достаточные условия оптимальности

Рассмотрим класс  $\mathfrak{S}$  функций  $S(t, p(x)): T \times \mathfrak{P} \rightarrow \mathbb{R}$ , непрерывно дифференцируемых по  $t$  на  $T$  и имеющих непрерывные вариационные производные [5,6] по  $p^{<k>}(x)$  ( $k=1,2,\dots,N$ ). Определим на  $\mathfrak{S}$  следующие конструкции:

$$R(t, p(x), U) = \frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^n} \left( \left[ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right]^T \mathcal{A}_U p(x) - \omega(t, p(x), U) \right) dx, \quad (12)$$

$$G(t_1, p(x)) = S(t_1, p(x)) + \theta(p(x)). \quad (13)$$

Предположим, что при некотором заданном  $m$  функции  $R(t, p(x), U)$  и  $G(t_1, p(x))$  достигают экстремальных значений:

$$r_m(t) = \max_{p(x) \in \mathfrak{P}} \left\{ \frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^n} \max_{U \in \mathcal{Q}_U} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left( [p(x)]^T \mathcal{A}_U^* \left[ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right] - \omega(t, p(x), U) \right) dx_{(2)} \right\} dx_{(1)} \right\}, \quad (14)$$

$$g = \min_{p(x) \in \mathfrak{P}} \left\{ S(t_1, p(x)) + \theta(p(x)) \right\}. \quad (15)$$

В выражении (14) через  $\mathcal{A}_U^*$  обозначен сопряженный оператор системы обобщенных уравнений ФПК:

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\phi(t, x)]^T \mathcal{A}_U p(t, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} [p(t, x)]^T \mathcal{A}_U^* \phi(t, x) dx,$$

$$\text{где } \mathcal{A}_U^* = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}^* & \dots & \mathcal{A}_{N1}^* \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{A}_{1N}^* & \dots & \mathcal{A}_{NN}^* \end{pmatrix}, \quad \phi(t, x) = \begin{pmatrix} \phi^{<1>}(t, x) \\ \dots \\ \phi^{<N>}(t, x) \end{pmatrix};$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{kk}^* \phi^{<k>}(t, x) &= \sum_{i=1}^n f_i^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \frac{\partial \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x_i} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \frac{\partial^2 \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \mathcal{V}_{kr}^*(t, x) \phi^{<k>}(t, x) \quad (k=1,2,\dots,N), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\mathcal{A}_{kr}^* \phi^{<k>}(t, x) = \mathcal{U}_{rk}^*(t, x) \phi^{<k>}(t, x) \quad (k, r=1,2,\dots,N; k \neq r).$$

Рассмотрим возможные случаи задания операторов  $\mathcal{V}_{kr}(t, x)$ ,  $\mathcal{U}_{rk}(t, x)$  и сопряженных с ними при  $k \neq r$ . Перепишем уравнение (4) следующим образом [2]:

$$\frac{\partial p^{<k>}(t, x)}{\partial t} = -\operatorname{div} \pi^{<k>}(t, x) - \sum_{r=1}^N \mathcal{V}_{kr}(t, x) + \sum_{r=1}^N \mathcal{U}_{rk}(t, x), \quad (17)$$

$$k=1,2,\dots,N,$$

где  $\pi^{<k>}(t, x)$  – вектор плотности потока вероятности, компоненты которого определяются формулой:

$$\begin{aligned} \pi_i^{<k>}(t, x) &= f_i^{<k>}(t, x, U^{<k>}) p^{<k>}(t, x) - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{<k>}) p^{<k>}(t, x)) \quad (i=1, 2, \dots, n; k=1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (18)$$

Если переход из состояния (структуры) с номером  $k$  в состояние  $r$  происходит на границе гиперповерхности  $\Gamma = \{(t, x) \in T \times \mathbb{R}^n : \gamma(t, x) = 0\}$ , то функция поглощения имеет вид:

$$v_{kr}(t, x) = \delta(\gamma(t, x)) \cdot (n^0, \pi^{<k>}(t, x)), \quad (19)$$

где  $n^0$  – орт внешней нормали к гиперповерхности  $\Gamma$ .

При поглощении реализаций случайного процесса в области  $W \subset \mathbb{R}^n$  возможны два варианта:

$$v_{kr}(t, x) = \begin{cases} c_0^{<kr>}(x) p^{<k>}(t, x), & x \in W, \\ 0, & x \notin W, \end{cases} \quad (20)$$

или

$$v_{kr}(t, x) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n c_i^{<kr>}(x) \pi_i^{<k>}(t, x), & x \in W, \\ 0, & x \notin W, \end{cases} \quad (21)$$

где функции  $c_i^{<kr>}(x)$  ( $0 < c_i^{<kr>}(x) < 1$ ,  $i=0, 1, \dots, n$ ) характеризуют интенсивности переходов [2].

Также возможны поглощения типа условных марковских переходов:

$$v_{kr}(t, x) = \lambda_{kr}(t | x) p^{<k>}(t, x). \quad (22)$$

Принимая во внимание вид выражений (19)-(22), достаточно рассмотреть два случая. В первом  $v_{kr}(t, x) = \mathcal{G}_{kr}(t, x) p^{<k>}(t, x)$ , и тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{kr}(t, x) p^{<k>}(t, x) &= \mathcal{G}_{kr}(t, x) p^{<k>}(t, x), \\ \mathcal{V}_{kr}^*(t, x) \phi^{<k>}(t, x) &= \mathcal{G}_{kr}(t, x) \phi^{<k>}(t, x), \end{aligned} \quad (23)$$

а во втором случае  $v_{kr}(t, x) = \sum_{i=1}^n \mu_i^{<kr>}(t, x) \pi_i^{<k>}(t, x)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{kr}(t, x) p^{<k>}(t, x) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_i^{<kr>}(t, x) \left( f_i^{<k>}(t, x, U^{<k>}) p^{<k>}(t, x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{<k>}) p^{<k>}(t, x)) \right), \\ \mathcal{V}_{kr}^*(t, x) \phi^{<k>}(t, x) &= \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \mu_i^{<kr>}(t, x) f_i^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \phi^{<k>}(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \frac{\partial}{\partial x_j} (\mu_i^{<kr>}(t, x) \phi^{<k>}(t, x)) \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Выражения для операторов  $\mathcal{U}_{rk}(t, x)$  аналогичны (23) или (24), т.к. функции поглощения и восстановления связаны между собой соотношением  $v_{kr}(t, x) = \chi_{kr}(t, x)u_{kr}(t, x)$ , в котором  $0 \leq \chi_{kr}(t, x) \leq 1$  (в частном случае при восстановлении реализаций без потерь  $\chi_{kr}(t, x) \equiv 1$ ).

**Теорема 1** (достаточные условия оптимальности в задаче 1).

Если существует  $S(t, p(x)) \in \mathfrak{S}$  такая, что элемент  $d_m^* \in \mathfrak{D}_m$  удовлетворяет следующим условиям:

$$1. \quad R(t, p^*(t, x), U^*(t, x_{(1)})) = r_m(t) \text{ почти всюду на } T; \quad (25)$$

$$2. \quad G(t_1, p^*(t_1, x)) = g, \quad (26)$$

то справедливо условие (10).

Не ограничивая общности, можно положить  $r_m(t)$  и  $g$  равными нулю, тогда можно вычислить минимум функционала (9):

$$J(p_0(x), d_m^*) = -S(t_0, p_0(x)). \quad (27)$$

Пусть в (14), (15) отсутствуют операции максимизации и минимизации по  $p(x) \in \mathfrak{P}$ , тогда учитывая, что  $r_m(t) \equiv 0$  и  $g = 0$ , можно сформулировать достаточные условия оптимальности в задаче 2.

**Теорема 2** (достаточные условия оптимальности в задаче 2).

Если существует  $S(t, p(x)) \in \mathfrak{S}$  и  $U^*(t, x_{(1)}, p(x))$  такие, что  $\forall t \in T, \forall p(x) \in \mathfrak{P}$ :

$$1. \quad \frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \int_{\mathbb{R}^m} \max_{U \in Q_U} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left( [p(x)]^T \mathcal{A}_U^* \left[ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right] - \omega(t, p(x), U) \right) dx_{(2)} \right\} dx_{(1)} = 0; \quad (28)$$

$$2. \quad S(t_1, p(x)) = -\theta(p(x)), \quad (29)$$

то справедливо условие (11).

Доказательство теорем 1 и 2 опирается на принцип расширения Кротова [1,4] и проводится аналогично случаю моноструктурных стохастических систем [6].

Из условий (14), (25) можно получить структуру оптимального управления:

$$U^*(t, x_{(1)}) = \arg \max_{U \in Q_U} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left( [p^*(t, x)]^T \mathcal{A}_U^* \left[ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right] - \omega(t, p^*(t, x), U) \right) dx_{(2)} \right\}. \quad (30)$$

При отсутствии информации о векторе состояния оптимальное программное управление определяется так:

$$U^*(t) = \arg \max_{U \in Q_U} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left[ p^*(t, x) \right]^T \mathcal{A}_U^* \left[ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right] - \omega(t, p^*(t, x), U) \right\} dx, \quad (31)$$

а при наличии полной информации

$$U^*(t, x) = \arg \max_{U \in Q_U} \left\{ \left[ p^*(t, x) \right]^T \mathcal{A}_U^* \left[ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right] - \omega(t, p^*(t, x), U) \right\}. \quad (32)$$

Применим необходимые условия экстремума в (12), (13):

$$\frac{\delta R(t, p^*(t, x), U^*(t, x_{(1)}))}{\delta p(x)} = 0, \quad (33)$$

$$\frac{\delta G(t_1, p^*(t, x))}{\delta p(x)} = 0, \quad (34)$$

тогда из (33) следует, что

$$\frac{\delta S_t(t, p(\xi))}{\delta p(x)} = - \frac{\delta H(t, p^*(t, x), U^*(t, x_{(1)}))}{\delta p(x)}, \quad (35)$$

а из (34) следует, что

$$\frac{\delta S(t_1, p(\xi))}{\delta p(x)} = - \frac{\delta \theta(p^*(t, x))}{\delta p(x)}, \quad (36)$$

где

$$S_t(t, p(x)) = \frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t}, \quad H(t, p(x), U) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[ p(x) \right]^T \mathcal{A}_U^* \left[ \frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} \right] - \omega(t, p(x), U) dx.$$

В соотношениях (30)-(36) плотность вероятности  $p^*(t, x)$  является решением задачи (6), (7), а конкретный вид уравнений (35), (36) зависит от задания функции  $S(t, p(x)) \in \mathfrak{S}$ .

Рассмотрим частный случай, когда функционал (9) является линейным по плотности:

$$J(p_0(x), d_m) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \omega(t, x, U^{<k>}(t, x_{(1)})) \right]^T p(t, x) dx dt + \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \theta(x) \right]^T p(t_1, x) dx, \quad (37)$$

где

$$\omega(t, x, U) = \begin{pmatrix} \omega^{<1>}(t, x, U^{<1>}) \\ \dots \\ \omega^{<N>}(t, x, U^{<N>}) \end{pmatrix}, \quad \theta(x) = \begin{pmatrix} \theta^{<1>}(x) \\ \dots \\ \theta^{<N>}(x) \end{pmatrix};$$

т.е. рассматривается задача синтеза оптимального в среднем управления:

$$J(p_0(x), d_m) = \mathbb{M} \left[ \sum_{k=1}^N \left( \int_{t_0}^{t_1} \omega^{<k>}(t, X(t), U^{<k>}(t, X_{(1)}(t))) dt + \theta^{<k>}(X(t_1)) \right) \right]. \quad (38)$$

В этом случае функцию  $S(t, p(x)) \in \mathfrak{S}$  достаточно искать в виде:

$$S(t, p(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} [\phi(t, x)]^T p(x) dx, \quad (39)$$

где  $\phi(t, x) = \begin{pmatrix} \phi^{<1>}(t, x) \\ \dots \\ \phi^{<N>}(t, x) \end{pmatrix}$  – неизвестная функция, т.е.

$$S(t, p(x)) = \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{<k>}(t, x) p^{<k>}(x) dx,$$

тогда, учитывая, что  $\frac{\delta S(t, p(\xi))}{\delta p(x)} = \phi(t, x)$ , выражение для  $H(t, p(x), U)$  примет вид:

$$H(t, p(x), U) = \int_{\mathbb{R}^n} [p(x)]^T (\mathcal{A}_U^* \phi(t, x) - \omega(t, x, U)) dx, \quad (40)$$

или в координатной форме:

$$\begin{aligned} H(t, p(t, x), U) &= \sum_{\substack{k, r=1 \\ k \neq r}}^N \int_{\mathbb{R}^n} p^{<r>}(t, x) \mathcal{A}_{kr}^* \phi^{<k>}(t, x) dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} p^{<1>}(t, x) (\mathcal{A}_{11}^* \phi^{<1>}(t, x) - \omega^{<1>}(t, x, U^{<1>})) dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} p^{<2>}(t, x) (\mathcal{A}_{22}^* \phi^{<2>}(t, x) - \omega^{<2>}(t, x, U^{<2>})) dx + \\ &+ \dots + \int_{\mathbb{R}^n} p^{<N>}(t, x) (\mathcal{A}_{NN}^* \phi^{<N>}(t, x) - \omega^{<N>}(t, x, U^{<N>})) dx. \end{aligned} \quad (41)$$

Перепишем (35), (36) с учетом (39):

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} = - \frac{\delta H(t, p^*(t, x), U^*(t, x_{(1)}))}{\delta p(x)}, \quad \phi(t_1, x) = -\theta(x). \quad (42)$$

Из (30), (37) и того факта, что в общем случае от управления могут зависеть все элементы  $\mathcal{A}_U^*$  (см. (16)), можно записать структуру оптимального управления для всех  $k = 1, 2, \dots, N$ :

$$\begin{aligned} U^{*<k>}(t, x_{(1)}) &= \arg \max_{U^{<k>} \in Q_U^{<k>}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \left( \sum_{i=1}^n f_i^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \frac{\partial \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^n g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \frac{\partial^2 \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \sum_{r=1, r \neq k}^N \mathcal{V}_{kr}^*(t, x) \phi^{<k>}(t, x) + \sum_{r=1, r \neq k}^N \mathcal{U}_{kr}^*(t, x) \phi^{<r>}(t, x) - \omega^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \right) p_{(21)}^{*<k>}(t, x_{(2)} | x_{(1)}) dx_{(2)} \right\}, \end{aligned} \quad (43)$$



где

$$p_{(2|1)}^{<k>}(t, x_{(2)} | x_{(1)}) = \frac{p^{<k>}(t, x)}{p_{(1)}^{<k>}(t, x_{(1)})}, \quad p_{(1)}^{<k>}(t, x_{(1)}) = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} p^{<k>}(t, x) dx_{(2)}, \quad (44)$$

а из (6), (7), (41), (42) получаем соотношения:

$$\frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}_{U^*} p^*(t, x), \quad p^*(t, x)|_{t=t_0} = p_0(x), \quad p^*(t, x)|_{x=\pm\infty} = 0; \quad (45)$$

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} = -\mathcal{A}_{U^*} \phi(t, x) + \omega(t, x, U^*), \quad \phi(t, x)|_{t=t_1} = -\theta(x). \quad (46)$$

В координатной форме формулы (45), (46) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^{*<k>}(t, x)}{\partial t} = & -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( f_i^{<k>}(t, x, U^{*<k>}) p^{*<k>}(t, x) \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left( g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{*<k>}) p^{*<k>}(t, x) \right) - \\ & - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \mathcal{V}_{kr}(t, x) p^{*<k>}(t, x) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \mathcal{U}_{rk}(t, x) p^{*<r>}(t, x), \end{aligned} \quad (47)$$

$$p^{*<k>}(t, x)|_{t=t_0} = p_0^{<k>}(x), \quad p^{*<k>}(t, x)|_{x=\pm\infty} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N;$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^{<k>}(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i^{<k>}(t, x, U^{*<k>}) \frac{\partial \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{*<k>}) \frac{\partial^2 \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} - \\ - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \mathcal{V}_{kr}^*(t, x) \phi^{<k>}(t, x) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \mathcal{U}_{kr}^*(t, x) \phi^{<r>}(t, x) - \omega^{<k>}(t, x, U^{*<k>}) = 0, \end{aligned} \quad (48)$$

$$\phi^{<k>}(t, x)|_{t=t_1} = -\theta^{<k>}(x), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Таким образом, для определения оптимального управления необходимо решить систему (43), (44), (47), (48). После определения функций  $\phi^{<k>}(t, x)$  можно вычислить минимум функционала:

$$J(p_0(x), d_m^*) = -\sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{<k>}(t_0, x) p_0^{<k>}(x) dx. \quad (49)$$

Рассмотрим предельные случаи информированности. Пусть  $m = 0$ , тогда структура оптимального программного управления имеет вид ( $k = 1, 2, \dots, N$ ):

$$\begin{aligned} U^{*<k>}(t) = \arg \max_{U^{<k>} \in Q_U^{<k>}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left( \sum_{i=1}^n f_i^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \frac{\partial \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \frac{\partial^2 \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{r=1, r \neq k}^N \mathcal{V}_{kr}^*(t, x) \phi^{<k>}(t, x) + \sum_{r=1, r \neq k}^N \mathcal{U}_{kr}^*(t, x) \phi^{<r>}(t, x) - \omega^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \right) p^{*<k>}(t, x) dx \right\}, \end{aligned} \quad (50)$$

т.е. соотношения (47), (48), (50) определяют аналог стохастического принципа максимума [6] для систем с переменной структурой.

При  $m = n$  для определения оптимального управления с полной обратной связью нужно решить следующую систему нелинейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \max_{U^{<k>} \in Q_U^{<k>}} & \left\{ \frac{\partial \phi^{<k>}(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n f_i^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \frac{\partial \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x_i} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \frac{\partial^2 \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} - \omega^{<k>}(t, x, U^{<k>}) - \\ & \left. - \sum_{r=1, r \neq k}^N \mathcal{V}_{kr}^*(t, x) \phi^{<k>}(t, x) + \sum_{r=1, r \neq k}^N \mathcal{U}_{kr}^*(t, x) \phi^{<r>}(t, x) \right\} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N; \end{aligned} \quad (51)$$

$$\text{с граничным условием } \phi^{<k>}(t, x) \Big|_{t=t_1} = -\theta^{<k>}(x), \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (52)$$

Структура оптимального управления с полной обратной связью:

$$\begin{aligned} U^{*<k>}(t, x) = \arg \max_{U^{<k>} \in Q_U^{<k>}} & \left\{ \sum_{i=1}^n f_i^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \frac{\partial \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x_i} + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \frac{\partial^2 \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} - \omega^{<k>}(t, x, U^{<k>}) - \\ & \left. - \sum_{r=1, r \neq k}^N \mathcal{V}_{kr}^*(t, x) \phi^{<k>}(t, x) + \sum_{r=1, r \neq k}^N \mathcal{U}_{kr}^*(t, x) \phi^{<r>}(t, x) \right\}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (53)$$

Для нахождения управления с полной обратной связью нет необходимости решать систему обобщенных уравнений ФПК (47). Полученные соотношения (51)-(53) аналогичны уравнению Беллмана для стохастических систем [6].

**Замечание.** Соотношения (35), (36) получены с использованием только необходимых условий экстремума. Однако из теоремы 2 при  $m = n$  следует, что для синтеза оптимального управления достаточно разрешить систему обобщенных уравнений Беллмана (51), (52). Поскольку из соотношений (28), (29) при условии (37), (39) получается равенство:

$$\sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} p^{<k>}(x) \left\{ \frac{\partial \phi^{<k>}(t, x)}{\partial t} + \max_{U^{<k>} \in Q_U^{<k>}} \left\{ \sum_{r=1}^N \mathcal{A}_{rk}^* \phi^{<r>}(t, x) - \omega^{<k>}(t, x, U^{<k>}) \right\} \right\} dx,$$

которое выполняется при любой плотности  $p(x) \in \mathfrak{P}$ , и условие  $\phi^{<k>}(t_1, x) = -\theta^{<k>}(x)$  ( $\forall x \in \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \dots, N$ ), следовательно, справедлива система (51), (52).

Окончательный вид уравнений (47), (48), (51) получается при подстановке  $\mathcal{V}_{kr}(t, x)$  и  $\mathcal{U}_{rk}(t, x)$  в зависимости от типа переходов между структурами (см. (23), (24)).

### Синтез оптимальных линейных регуляторов

Рассмотрим задачу синтеза линейной стохастической системы с полной обратной связью:

$$dX = (A^{<k>}(t)X(t) + B^{<k>}(t)U^{<k>}(t) + C^{<k>}(t))dt + D^{<k>}(t)dW, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (54)$$

$$X(t_0) = X_0,$$

и квадратичным критерием

$$J(p_0(x), d_m) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_{t_0}^{t_1} \int_{\mathbb{R}^n} (x^T S^{<k>}(t)x + [U^{<k>}]^T Q^{<k>}(t)U^{<k>}) p^{<k>}(t, x) dx dt + \quad (55)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} (x^T R^{<k>} x) p(t_1, x) dx,$$

т.е. для всех  $k = 1, 2, \dots, N$  коэффициенты сноса и диффузии [2] определяются так:

$$f^{<k>}(t, x, U) = A^{<k>}(t)x + B^{<k>}(t)U + C^{<k>}(t), \quad (56)$$

$$\sigma^{<k>}(t, x, U) = D^{<k>}(t),$$

а для функций  $\omega^{<k>}(t, x, U)$  и  $\theta^{<k>}(x)$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) справедливы соотношения:

$$\omega^{<k>}(t, x, U) = \frac{1}{2} x^T S^{<k>}(t)x + \frac{1}{2} U^T Q^{<k>}(t)U, \quad (57)$$

$$\theta^{<k>}(x) = \frac{1}{2} x^T R^{<k>} x,$$

где  $A^{<k>}(t)$ ,  $B^{<k>}(t)$ ,  $C^{<k>}(t)$ ,  $D^{<k>}(t)$  – матрицы размера  $n \times n$ ,  $n \times q$ ,  $n \times 1$ ,  $n \times s$  соответственно,  $S^{<k>}(t)$ ,  $R^{<k>}$  – неотрицательно определенные симметрические матрицы размера  $n \times n$ , а  $Q^{<k>}(t)$  – положительно определенная симметрическая матрица размера  $q \times q$ ; ограничения на управление отсутствуют.

Функции поглощения имеют вид безусловного марковского перехода, а восстановление реализаций происходит без потерь [2,3]:

$$v_{kr}(t, x) = u_{kr}(t, x) = \lambda_{kr}(t) p^{<k>}(t, x), \quad k \neq r. \quad (58)$$

Перепишем уравнение (51) в векторной форме с учетом (56)-(58) и правила (23):

$$\max_{U^{<k>} \in Q_U^{<k>}} \left\{ \frac{\partial \phi^{<k>}(t, x)}{\partial t} + \left[ \frac{\partial \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x} \right]^T (A^{<k>}(t)x + B^{<k>}(t)U^{<k>} + C^{<k>}(t)) + \right. \quad (59)$$

$$+ \frac{1}{2} \text{tr} \left( D^{<k>}(t) [D^{<k>}(t)]^T \frac{\partial^2 \phi^{<k>}(t, x)}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} x^T S^{<k>}(t)x - \frac{1}{2} [U^{<k>}]^T Q^{<k>}(t)U^{<k>} -$$

$$\left. - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \lambda_{kr}(t) \phi^{<k>}(t, x) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \lambda_{kr}(t) \phi^{<r>}(t, x) \right\} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

или кратко  $\max_{U^{<k>} \in Q_U^{<k>}} \{ \Phi^{<k>}(U^{<k>}) \} = 0$ .

Используя необходимые условия экстремума, получаем структуру оптимального управления:

$$U^{* \langle k \rangle}(t, x) = [Q^{\langle k \rangle}(t)]^{-1} [B^{\langle k \rangle}(t)]^T \frac{\partial \phi^{\langle k \rangle}(t, x)}{\partial x}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (60)$$

Вследствие положительной определенности  $Q^{\langle k \rangle}(t)$  также выполняются достаточные условия, поэтому  $\Phi^{\langle k \rangle}(U^{\langle k \rangle})$  достигает максимального значения при  $U^{\langle k \rangle} = U^{* \langle k \rangle}(t, x)$ .

Для решения уравнения (59) будем искать функцию  $\phi^{\langle k \rangle}(t, x)$  в виде:

$$\phi^{\langle k \rangle}(t, x) = \frac{1}{2} x^T \xi^{\langle k \rangle}(t) x + x^T \eta^{\langle k \rangle}(t) + \zeta^{\langle k \rangle}(t), \quad (61)$$

где  $\xi^{\langle k \rangle}(t)$  – симметрическая матрица размера  $n \times n$ ,  $\eta^{\langle k \rangle}(t)$  – вектор размера  $n \times 1$ , а  $\zeta^{\langle k \rangle}(t)$  – скалярная функция.

После подстановки (60), (61) в (52), (59) получается замкнутая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^{\langle k \rangle}(t)}{dt} + \xi^{\langle k \rangle}(t) A^{\langle k \rangle}(t) + [A^{\langle k \rangle}(t)]^T \xi^{\langle k \rangle}(t) + \\ + \xi^{\langle k \rangle}(t) B^{\langle k \rangle}(t) [Q^{\langle k \rangle}(t)]^{-1} [B^{\langle k \rangle}(t)]^T \xi^{\langle k \rangle}(t) - S^{\langle k \rangle}(t) - \\ - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \lambda_{kr}(t) \xi^{\langle k \rangle}(t) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \lambda_{kr}(t) \xi^{\langle r \rangle}(t) = 0, \quad \xi^{\langle k \rangle}(t_1) = -R^{\langle k \rangle}; \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\eta^{\langle k \rangle}(t)}{dt} + [A^{\langle k \rangle}(t)]^T \eta^{\langle k \rangle}(t) + \xi^{\langle k \rangle}(t) C^{\langle k \rangle}(t) + \\ + \xi^{\langle k \rangle}(t) B^{\langle k \rangle}(t) [Q^{\langle k \rangle}(t)]^{-1} [B^{\langle k \rangle}(t)]^T \eta^{\langle k \rangle}(t) - \\ - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \lambda_{kr}(t) \eta^{\langle k \rangle}(t) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \lambda_{kr}(t) \eta^{\langle r \rangle}(t) = 0, \quad \eta^{\langle k \rangle}(t_1) = 0; \end{aligned} \quad (63)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta^{\langle k \rangle}(t)}{dt} + [C^{\langle k \rangle}(t)]^T \eta^{\langle k \rangle}(t) + \frac{1}{2} \text{tr} \left( D^{\langle k \rangle}(t) [D^{\langle k \rangle}(t)]^T \xi^{\langle k \rangle}(t) \right) + \\ + \frac{1}{2} [\eta^{\langle k \rangle}(t)]^T B^{\langle k \rangle}(t) [Q^{\langle k \rangle}(t)]^{-1} [B^{\langle k \rangle}(t)]^T \eta^{\langle k \rangle}(t) - \\ - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \lambda_{kr}(t) \zeta^{\langle k \rangle}(t) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \lambda_{kr}(t) \zeta^{\langle r \rangle}(t) = 0, \quad \zeta^{\langle k \rangle}(t_1) = 0; \end{aligned} \quad (64)$$

$k = 1, 2, \dots, N$ .

Вычислив функции  $\xi^{\langle k \rangle}(t)$ ,  $\eta^{\langle k \rangle}(t)$ ,  $\zeta^{\langle k \rangle}(t)$  можно найти оптимальное управление:

$$U^{* \langle k \rangle}(t, x) = [Q^{\langle k \rangle}(t)]^{-1} [B^{\langle k \rangle}(t)]^T (\xi^{\langle k \rangle}(t) x + \eta^{\langle k \rangle}(t)), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (65)$$

а из (49) следует, что  $J(p_0(x), d_m^*) = -\sum_{k=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{2} x^T \xi^{<k>}(t_0) x + x^T \eta^{<k>}(t_0) + \zeta^{<k>}(t_0) \right) p_0^{<k>}(x) dx$ , или,

используя формулу для вычисления нормированных математического ожидания  $\mu_0^{<k>}$  и ковариационной матрицы  $\psi_0^{<k>}$  начального состояния  $X_0$ , окончательно получим:

$$J(p_0(x), d_m^*) = -\sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{2} \text{tr}(\psi_0^{<k>} \xi^{<k>}(t_0)) + \frac{1}{2} [\mu_0^{<k>}]^T \xi^{<k>}(t_0) \mu_0^{<k>} + [\mu_0^{<k>}]^T \eta^{<k>}(t_0) + \zeta^{<k>}(t_0) \right) P^{<k>}(t_0), \quad (66)$$

где  $P^{<k>}(t_0)$  – вероятность нахождения системы в  $k$ -ом состоянии в начальный момент времени [2,7].

При  $C^{<k>}(t) \equiv 0$  формулы (63)-(66) существенно упрощаются (т.к. в этом случае  $\eta^{<k>}(t) \equiv 0$ ):

$$\begin{aligned} \frac{d\xi^{<k>}(t)}{dt} + \frac{1}{2} \text{tr} \left( D^{<k>}(t) [D^{<k>}(t)]^T \xi^{<k>}(t) \right) - \\ - \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \lambda_{kr}(t) \xi^{<k>}(t) + \sum_{\substack{r=1 \\ r \neq k}}^N \lambda_{kr}(t) \xi^{<r>}(t) = 0, \quad \xi^{<k>}(t_1) = 0; \end{aligned} \quad (67)$$

$$U^{*<k>}(t, x) = [Q^{<k>}(t)]^{-1} [B^{<k>}(t)]^T \xi^{<k>}(t) x, \quad k = 1, 2, \dots, N; \quad (68)$$

$$J(p_0(x), d_m^*) = -\sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{2} \text{tr}(\psi_0^{<k>} \xi^{<k>}(t_0)) + \frac{1}{2} [\mu_0^{<k>}]^T \xi^{<k>}(t_0) \mu_0^{<k>} + \zeta^{<k>}(t_0) \right) P^{<k>}(t_0). \quad (69)$$

**Пример.** Дана линейная одномерная система с двумя структурами:

$$\begin{cases} dX = (X(t) + U^{<1>}(t) + 1) dt + dW, \\ dX = U^{<2>}(t) dt + dW, \\ t \in [0, 1], \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

заданы начальные и краевые условия:

$$\begin{aligned} p^{<1>}(t, x) \Big|_{t=0} &= N(x; \mu = 0; \sigma = 1), \quad p^{<2>}(t, x) \Big|_{t=0} = 0, \\ p^{<1>}(t, x) \Big|_{x=\pm\infty} &= p^{<2>}(t, x) \Big|_{x=\pm\infty} = 0, \end{aligned}$$

а переходы между структурами задаются с помощью функций  $\lambda_{12}(t)$ ,  $\lambda_{21}(t)$  (см. (58)):

$$\lambda_{12}(t) = 0.4e^{-0.4t}, \quad \lambda_{21}(t) = 0.6e^{-0.6t}, \quad t \geq 0.$$

Критерий оптимальности задается следующим образом:

$$J(p_0(x), d_m) = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} \left( x^2 + (U^{<1>}(t, x))^2 \right) p^{<1>}(t, x) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}} (U^{<2>}(t, x))^2 p^{<2>}(t, x) dx dt \rightarrow \min_{d_m \in \mathcal{D}_m}.$$

Для решения системы (62)-(64) использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности с шагом по времени  $h_t = 0.01$  (рис. 1):

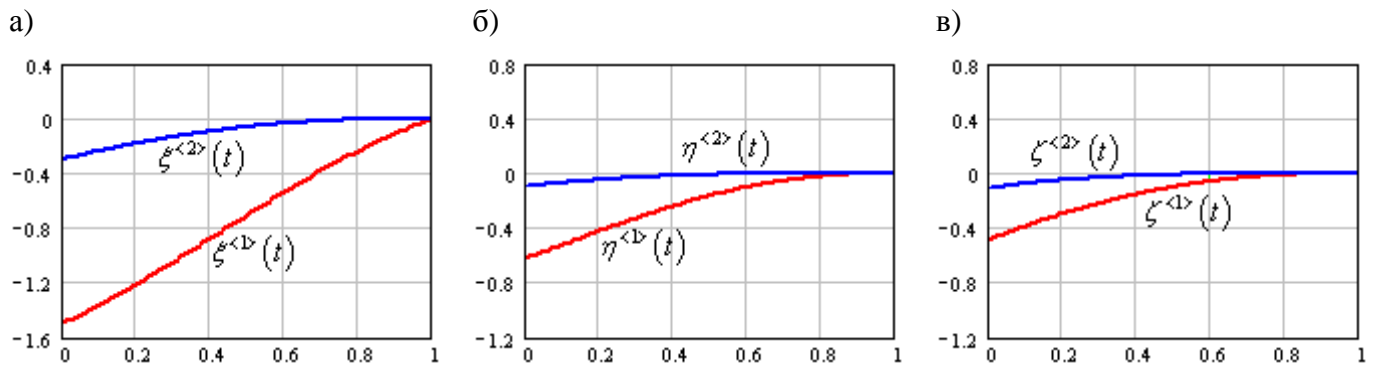


Рис. 1. Графики функций  $\xi^{<k>(t)}$ ,  $\eta^{<k>(t)}$ ,  $\zeta^{<k>(t)}$  ( $k = 1, 2$ ).

Далее по формуле (65) можно найти оптимальное управление (рис. 2):

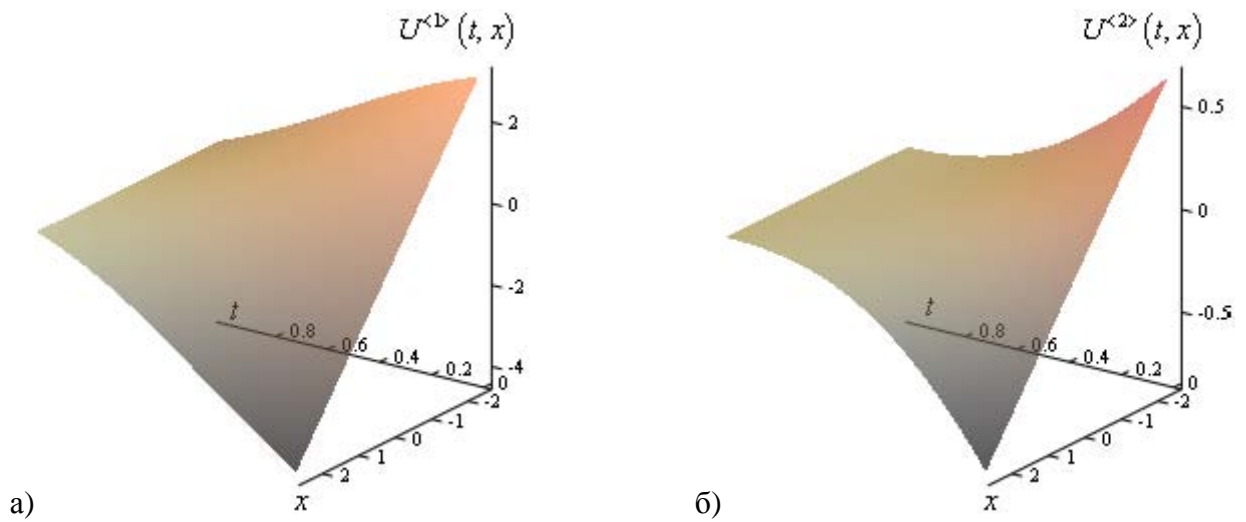


Рис. 2. Оптимальное управление с полной обратной связью.

В рассматриваемом примере  $J(p_0(x), d_m^*) \cong 1.2$ .

### **Список литературы**

1. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – М.: Наука, 1985. – 288 с.
2. Казаков И.Е. Статистическая динамика систем с переменной структурой. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
3. Казаков И.Е., Артемьев В.М. Оптимизация динамических систем случайной структуры. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
4. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973. – 446 с.
5. Лурье К.А. Оптимальное управление в задачах математической физики. – М.: Наука, 1975. – 478 с.
6. Пантелеев А.В., Семенов В.В. Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. – М.: МАИ, 1992. – 192 с.
7. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Анализ систем с переменной структурой в классе обобщенных характеристических функций. // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2003, № 11. – <http://www.mai.ru> (11.04.03).
8. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978. – 318 с.
9. Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. – М.: Наука, 1978. – 352 с.

---

*Рыбаков Константин Александрович, аспирант кафедры математической кибернетики  
Московского авиационного института (государственного технического университета);  
E-mail: rkoffice@mail.ru*

*Сотскова Ирина Леонидовна, доцент кафедры математической кибернетики  
Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н.;  
Контактный телефон: 158-48-11*