

УДК 681.3.06

Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат

К.А. Рыбаков, И.Л. Сотскова

В статье рассматривается алгоритмическое обеспечение спектрального метода для анализа систем управления диффузионного типа в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат, а именно алгоритмы расчета нестационарных передаточных функций элементарных звеньев относительно полиномов и функций Лагерра и Эрмита.

Введение

При анализе систем управления диффузионного типа при случайных воздействиях в виде белого шума возникает необходимость в решении уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК), описывающего изменение плотности вероятности вектора состояния [1]. Существующие методы анализа нестационарных систем основаны на следующих формах математического описания: дифференциальными и разностными уравнениями, интегральными уравнениями и их разностными аналогами, интегральными преобразованиями, спектральными преобразованиями. Использование спектральной формы математического описания позволяет формализовать процесс решения и исследования уравнения ФПК для различных областей изменения времени и фазовых координат, различных постановках краевых задач. При решении задачи анализа стохастических систем управления с ограниченными областями изменения времени и фазовых координат используется алгоритмическое обеспечение спектрального метода для нестационарных конечных отрезков [2,3]. В случае неограниченных областей предлагается использовать полиномы и функции Лагерра, ортогональные в $L_2([0, +\infty))$, а также полиномы и функции Эрмита, ортогональные в $L_2((-\infty, +\infty))$.

Полиномы Лагерра

Определим полиномы Лагерра следующим образом [4]:

$$L_j^\alpha(x) = (-1)^j x^{-\alpha} e^x \frac{d^j}{dx^j} (x^{\alpha+j} e^{-x}), \quad (1)$$

где $\alpha > -1$ является параметром¹. Функции $L_j(x)$ ($j = 0, 1, \dots$) попарно ортогональны в пространстве $L_2([0, +\infty))$ с весом $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$, т.е.

$$(L_i(x), L_j(x))_{L_2([0, +\infty); \rho(x))} = \int_0^\infty \rho(x) L_i(x) L_j(x) dx = \begin{cases} d_j, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

где d_j определяется через функцию Γ (интеграл Эйлера второго рода), а именно

$$d_j = \|L_j(x)\|_{L_2([0, +\infty); \rho(x))}^2 = j! \Gamma(\alpha + j + 1), \quad \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx. \quad (2)$$

Для вычисления нестационарных передаточных функций элементарных звеньев в качестве базиса пространства $L_2([0, +\infty); \rho(x))$ будем использовать нормированные полиномы Лагерра:

$$l_j(x) = \frac{L_j(x)}{\sqrt{d_j}} \quad (j = 0, 1, \dots). \quad (3)$$

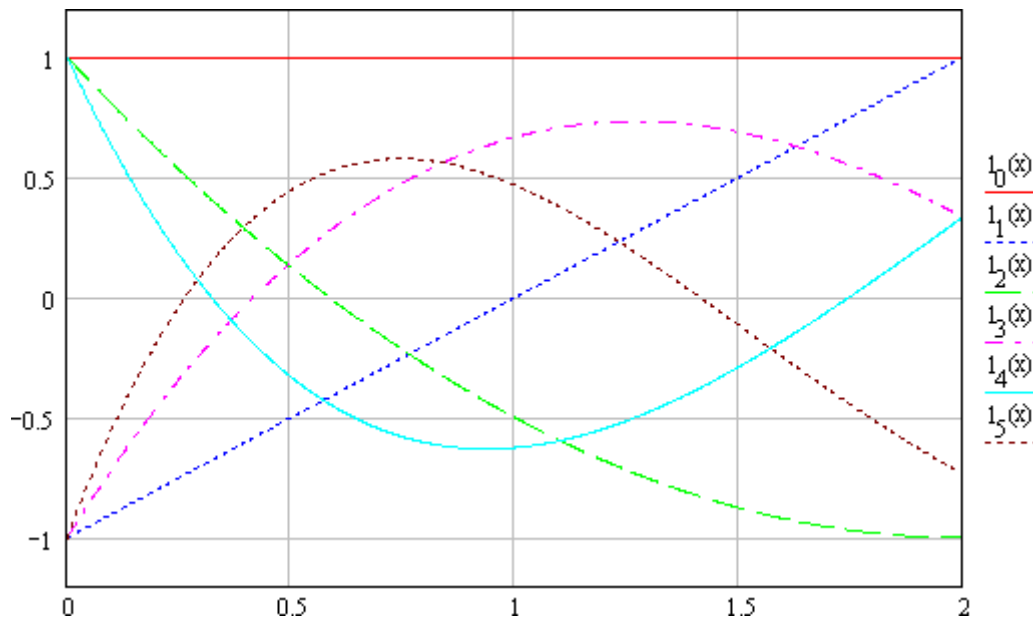


Рис. 1. Нормированные полиномы Лагерра $l_0(x), l_1(x), \dots, l_5(x)$ при $\alpha = 0$.

Полиномы Лагерра удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению [4], позволяющему находить функции $L_j(x)$ для любого² $j \geq 1$:

¹ В дальнейшем для упрощения записи будем опускать индекс α .

² Как правило, эта формула применяется для определения $L_j(x)$, начиная с $L_2(x)$, однако мы будем ее использовать и для вычисления $L_1(x)$, т.к. в этом случае второе слагаемое $j(\alpha + j)L_{j-1}(x)$ обращается в нуль при любом $L_{-1}(x)$.

$$L_{j+1}(x) = (x - \alpha - 2j - 1)L_j(x) - j(\alpha + j)L_{j-1}(x), \quad (4)$$

а $L_0(x)$ можно получить непосредственно из определения (1), тогда

$$L_0(x) = 1,$$

$$L_1(x) = x - \alpha - 1,$$

$$L_2(x) = x^2 - (2\alpha + 4)x + \alpha^2 + 3\alpha + 2,$$

$$L_3(x) = x^3 - (3\alpha + 9)x^2 + (3\alpha^2 + 15\alpha + 18)x - \alpha^3 - 6\alpha^2 - 11\alpha - 6$$

и т.д.

Кроме рекуррентных соотношений можно вывести общую формулу для определения полиномов $L_j(x)$ в явном виде, для этого найдем производную порядка j от функции $g(x) = x^{\alpha+j}e^{-x}$ по формуле Лейбница:

$$\frac{d^j}{dx^j}(x^{\alpha+j}e^{-x}) = \sum_{k=0}^j C_j^k \frac{d^k x^{\alpha+j}}{dx^k} \frac{d^{j-k} e^{-x}}{dx^{j-k}} = x^\alpha e^{-x} \sum_{k=0}^j (-1)^k C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} x^k,$$

тогда

$$L_j(x) = \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} x^k, \quad (5)$$

где

$$C_j^k = \frac{j!}{k!(j-k)!}, \quad (\alpha + j)^{[j-k]} - \text{факториальный многочлен } (t^{[k]} = t(t-1)\dots(t-k+1)).$$

Спектральные характеристики элементарных звеньев в базисе полиномов Лагерра

Вычислим спектральные характеристики элементарных звеньев: дифференцирующего, интегрирующего, усилительного и множительного [2,3] относительно ортонормированных полиномов Лагерра по правилам (П1)-(П7), приведенным в приложении.

Для определения матрицы двумерной нестационарной передаточной функции (ДНПФ) дифференцирующего звена второго рода найдем производную левой и правой частей равенства (4):

$$L'_{j+1}(x) = L_j(x) + (x - \alpha - 2j - 1)L'_j(x) - j(\alpha + j)L'_{j-1}(x), \quad (6)$$

и воспользуемся рекуррентным соотношением, связывающим функции $L_{j+1}(x)$, $L_j(x)$ и $L'_j(x)$:

$$L_{j+1}(x) = (x - \alpha - j - 1)L_j(x) - xL'_j(x), \quad (7)$$

приравнявая правые части выражений (4) и (7), выразим $xL'_j(x)$:

$$xL'_j(x) = jL_j(x) + j(\alpha + j)L_{j-1}(x),$$

а затем подставим в формулу (6), которая примет вид:

$$L'_{j+1}(x) = (1+j)L_j(x) + j(\alpha+j)L_{j-1}(x) - (\alpha+2j+1)L'_j(x) - j(\alpha+j)L'_{j-1}(x). \quad (8)$$

Элементы матрицы ненормированной ДНПФ дифференцирующего звена второго рода определяются по правилу (П1), поэтому рассмотрим произведение $L_i(x)L'_{j+1}(x)$:

$$L_i(x)L'_{j+1}(x) = (1+j)L_i(x)L_j(x) + j(\alpha+j)L_i(x)L_{j-1}(x) - (\alpha+2j+1)L_i(x)L'_j(x) - j(\alpha+j)L_i(x)L'_{j-1}(x),$$

вследствие этого

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij+1} = (1+j)\Delta_{ij} + j(\alpha+j)\Delta_{ij-1} - (\alpha+2j+1)\tilde{\mathcal{P}}_{ij} - j(\alpha+j)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}, \quad (9)$$

где

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} d_j, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (10)$$

Начальные условия для (9) вычислим по правилу (П1):

$$\tilde{\mathcal{P}}_{i0} = \int_0^\infty \rho(x)L_i(x) \frac{dL_0(x)}{dx} dx = 0.$$

Поскольку $\Delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$, из формулы (9) с учетом начальных условий получается, что $\tilde{\mathcal{P}}_{ij} = 0$ при $i \geq j$. Таким образом, можно записать правило вычисления элементов матрицы нормированной ДНПФ дифференцирующего звена второго рода:

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{\tilde{\mathcal{P}}_{ij}}{\sqrt{d_i d_j}}, \quad (11)$$

где

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j-1, \\ j\Delta_{ij-1} + (j-1)(\alpha+j-1)\Delta_{ij-2} - (\alpha+2j-1)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1} - (j-1)(\alpha+j-1)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-2}, & i \leq j-1, \end{cases}$$

в свою очередь ДНПФ дифференцирующего звена первого рода определяется по правилу (П2), при этом $L_j(0) = (-1)^j (\alpha+j)^{[j]}$.

Дифференцируя выражение (8) $n-1$ раз, получаем:

$$L'_{j+1}^{(n)}(x) = (1+j)L_j^{(n-1)}(x) + j(\alpha+j)L_{j-1}^{(n-1)}(x) - (\alpha+2j+1)L_j^{(n)}(x) - j(\alpha+j)L_{j-1}^{(n)}(x), \quad (12)$$

тогда, используя правило определения элементов матрицы ненормированной ДНПФ дифференцирующего звена порядка n (П3), запишем:

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij+1}^n = (1+j)\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^{n-1} + j(\alpha+j)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{n-1} - (\alpha+2j+1)\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n - j(\alpha+j)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^n. \quad (13)$$

Полагая $\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^0 = \Delta_{ij}$ и учитывая начальные условия, получаем правило для вычисления элементов матрицы нормированной ДНПФ дифференцирующего звена порядка n :

$$P_{ij}^n = \frac{\tilde{P}_{ij}^n}{\sqrt{d_i d_j}}, \quad (14)$$

где

$$\tilde{P}_{ij}^n = \begin{cases} \Delta_{ij}, & n = 0, \\ 0, & i > j - n, \\ j\tilde{P}_{ij-1}^{n-1} + (j-1)(\alpha + j - 1)\tilde{P}_{ij-2}^{n-1} - (\alpha + 2j - 1)\tilde{P}_{ij-1}^n - (j-1)(\alpha + j - 1)\tilde{P}_{ij-2}^n, & i \leq j - n. \end{cases}$$

Чтобы вычислить элементы матрицы ненормированной ДНПФ интегрирующего звена (П4), проинтегрируем левую и правую часть равенства (8):

$$L_{j+1}(x) = (1+j) \int_0^x L_j(\xi) d\xi + j(\alpha + j) \int_0^x L_{j-1}(\xi) d\xi - (\alpha + 2j + 1)L_j(x) - j(\alpha + j)L_{j-1}(x),$$

а затем выразим $\int_0^x L_j(\phi) d\phi$, тогда

$$L_i(x) \int_0^x L_j(\xi) d\xi = \frac{1}{(1+j)} \left(L_i(x)L_{j+1}(x) + (\alpha + 2j + 1)L_i(x)L_j(x) + j(\alpha + j)L_i(x)L_{j-1}(x) \right) - \frac{j(\alpha + j)}{(1+j)} L_i(x) \int_0^x L_{j-1}(\xi) d\xi,$$

отсюда

$$\tilde{P}_{ij}^{-1} = \frac{1}{(1+j)} \left(\Delta_{ij+1} + (\alpha + 2j + 1)\Delta_{ij} + j(\alpha + j)\Delta_{ij-1} - j(\alpha + j)\tilde{P}_{ij-1}^{-1} \right). \quad (15)$$

Учитывая полученное выражение, запишем формулу для вычисления элементов матрицы нормированной ДНПФ интегрирующего звена:

$$P_{ij}^{-1} = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-1}}{\sqrt{d_i d_j}}, \quad (16)$$

где \tilde{P}_{ij}^{-1} вычисляется по формуле (15).

Также можно вывести рекуррентную формулу для нахождения ДНПФ интегрирующего звена порядка n (П5). Пропуская очевидные преобразования, окончательно получим:

$$P_{ij}^{-n} = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-n}}{\sqrt{d_i d_j}}, \quad (17)$$

где

$$\tilde{P}_{ij}^{-n} = \begin{cases} \Delta_{ij}, & n = 0, \\ \frac{1}{(1+j)} \left(\tilde{P}_{ij+1}^{-n+1} + (\alpha + 2j + 1)\tilde{P}_{ij}^{-n+1} + j(\alpha + j)\tilde{P}_{ij-1}^{-n+1} - j(\alpha + j)\tilde{P}_{ij-1}^{-n} \right), & n > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $w(x)$. Чтобы воспользоваться определением (П6), преобразуем произведение $w(x)L_i(x)L_{j+1}(x)$:

$$w(x)L_i(x)L_{j+1}(x) = w(x)L_{i+1}(x)L_j(x) + 2(i-j)w(x)L_i(x)L_j(x) + i(\alpha+i)w(x)L_{i-1}(x)L_j(x) - j(\alpha+j)w(x)L_i(x)L_{j-1}(x), \quad (18)$$

следовательно, ординаты матрицы ненормированной ДНПФ усилительного звена связаны соотношением:

$$\tilde{W}_{ij+1} = \tilde{W}_{i+1j} + 2(i-j)\tilde{W}_{ij} + i(\alpha+i)\tilde{W}_{i-1j} - j(\alpha+j)\tilde{W}_{ij-1}, \quad (19)$$

а элементы $\tilde{W}_{j0} = \tilde{W}_{0j}$ вычисляются по определению в соответствии с заданной функцией $w(x)$.

Умножая \tilde{W}_{ij} на нормирующий коэффициент, получаем выражение для ординат матрицы нормированной ДНПФ усилительного звена:

$$W_{ij} = \frac{\tilde{W}_{ij}}{\sqrt{d_i d_j}}. \quad (20)$$

В частном случае, когда $w(x) = x^n$, вычисление матрицы \tilde{W} упрощается. Из соотношения (4) следует, что

$$x^{n+1}L_i(x)L_j(x) = x^n L_i(x)L_{j+1}(x) + (\alpha + 2j + 1)x^n L_i(x)L_j(x) + j(\alpha + j)x^n L_i(x)L_{j-1}(x), \quad (21)$$

поэтому, обозначая через \tilde{A}_{ij}^n ординаты матрицы ненормированной ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $w(x) = x^n$, получаем следующую рекуррентную формулу:

$$\tilde{A}_{ij}^{n+1} = \tilde{A}_{ij+1}^n + (\alpha + 2j + 1)\tilde{A}_{ij}^n + j(\alpha + j)\tilde{A}_{ij-1}^n. \quad (22)$$

Так как матрица Δ является диагональной, то $\tilde{A}_{ij}^1 = \Delta_{ij+1} + (\alpha + 2j + 1)\Delta_{ij} + j(\alpha + j)\Delta_{ij-1} = 0$ при условии $|i - j| > 1$, по индукции нетрудно доказать, что $\tilde{A}_{ij}^n = 0$ при $|i - j| > n$, следовательно, матрица \tilde{A}^n имеет $2n + 1$ диагоналей с ненулевыми элементами. Кроме того, принимая во внимание свойство симметрии матрицы \tilde{A}^n , окончательно получим выражение для нормированной ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $w(x) = x^n$:

$$A_{ij}^n = \frac{\tilde{A}_{ij}^n}{\sqrt{d_i d_j}}, \quad (23)$$

где

$$\tilde{A}_{ij}^n = \begin{cases} \Delta_{ij}, & n = 0, \\ 0, & |i - j| > n, \\ \tilde{A}_{ij+1}^{n-1} + (\alpha + 2j + 1)\tilde{A}_{ij}^{n-1} + j(\alpha + j)\tilde{A}_{ij-1}^{n-1}, & i \leq j, \\ \tilde{A}_{ji}^n, & i > j. \end{cases}$$

Для вывода рекуррентной формулы, связывающей ординаты матрицы ненормированной трехмерной нестационарной передаточной функции (ТНПФ) множительного звена, применим соотношение (18). Пусть выполняется неравенство $i \geq j \geq k$, тогда

$$L_i(x)L_j(x)L_{k+1}(x) = L_i(x)L_{j+1}(x)L_k(x) + 2(j-k)L_i(x)L_j(x)L_k(x) + j(a+j)L_i(x)L_{j-1}(x)L_k(x) - k(a+k)L_i(x)L_j(x)L_{k-1}(x),$$

поэтому

$$\tilde{V}_{ijk+1} = \tilde{V}_{ij+1k} + 2(j-k)\tilde{V}_{ijk} + j(a+j)\tilde{V}_{ij-1k} - k(a+k)\tilde{V}_{ijk-1}, \quad (24)$$

а при $k=0$ $\tilde{V}_{ijk} = \Delta_{ij}$, что следует из (1) и (П7). Если индексы (i, j, k) не удовлетворяют неравенству $i \geq j \geq k$, то их можно соответствующим образом переставить, т.к. трехмерная матрица \tilde{V} симметрична по любой паре индексов, на основании этого получаем правило вычисления элементов матрицы нормированной ТНПФ множительного звена:

$$V_{ijk} = \frac{\tilde{V}_{ijk}}{\sqrt{d_i d_j d_k}}, \quad (25)$$

где

$$\tilde{V}_{ijk} = \begin{cases} 0, & |i' - j'| > k', \\ \Delta_{i'j'}, & k' = 0, \\ \tilde{V}_{i'j'+1k'-1} + 2(j' - k' + 1)\tilde{V}_{i'j'k'-1} + j'(a + j')\tilde{V}_{i'j'-1k'-1} - (k' - 1)(a + k' - 1)\tilde{V}_{i'j'k'-2}, & k' > 0, \\ (i', j', k') - \text{такая перестановка индексов } (i, j, k), \text{ что } i' \geq j' \geq k'. \end{cases}$$

В частном случае при $\alpha = 0$ формулы (11), (14), (16), (17), (20), (23) и (25) существенно упрощаются, и матрицы нормированных ДНПФ дифференцирующего и интегрирующего звеньев принимают простой вид:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & -1 & 1 & 0 & \cdots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\mathcal{P}_{ij} = \begin{cases} 0, & i \geq j, \\ (-1)^{i+j+1}, & i < j, \end{cases} \quad (26)$$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j, \\ (-1)^{i+j}, & i \geq j, \end{cases} \quad (27)$$

$$P_{ij}^{-1} = \begin{cases} 1, & 0 \leq i - j \leq 1, \\ 0, & i - j < 0 \vee i - j > 1. \end{cases} \quad (28)$$

В качестве базиса $L_2([0, +\infty))$ можно применять также полиномы, ортогональные по отношению к γ -распределению [5] с весом $\eta(x, \alpha, k) = \frac{k^{\alpha+1} x^\alpha e^{-kx}}{\Gamma(\alpha+1)}$, связанные с полиномами Лагерра следующим соотношением:

$$S_j^{\alpha, k}(x) = (-k)^j j! L_j^\alpha(kx). \quad (29)$$

Спектральные характеристики операторов относительно полиномов $S_j^{\alpha, k}(x)$ вычисляются по формулам, аналогичным (11), (14), (16), (17), (20), (23) и (25).

Функции Лагерра

Наряду с полиномами рассмотрим функции Лагерра, ортогональные в $L_2([0, +\infty))$ с весом $\lambda(x) = 1$, которые определяются с использованием (1):

$$\Psi_j(x) = x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2}} L_j(x). \quad (30)$$

Очевидно, что $\forall j \quad \|L_j(x)\|_{L_2([0, +\infty); \rho(x))}^2 = \|\Psi_j(x)\|_{L_2([0, +\infty))}^2 = d_j$, поэтому нормированные функции Лагерра определяются по формуле:

$$\psi_j(x) = \frac{\Psi_j(x)}{\sqrt{d_j}} \quad (j = 0, 1, \dots). \quad (31)$$

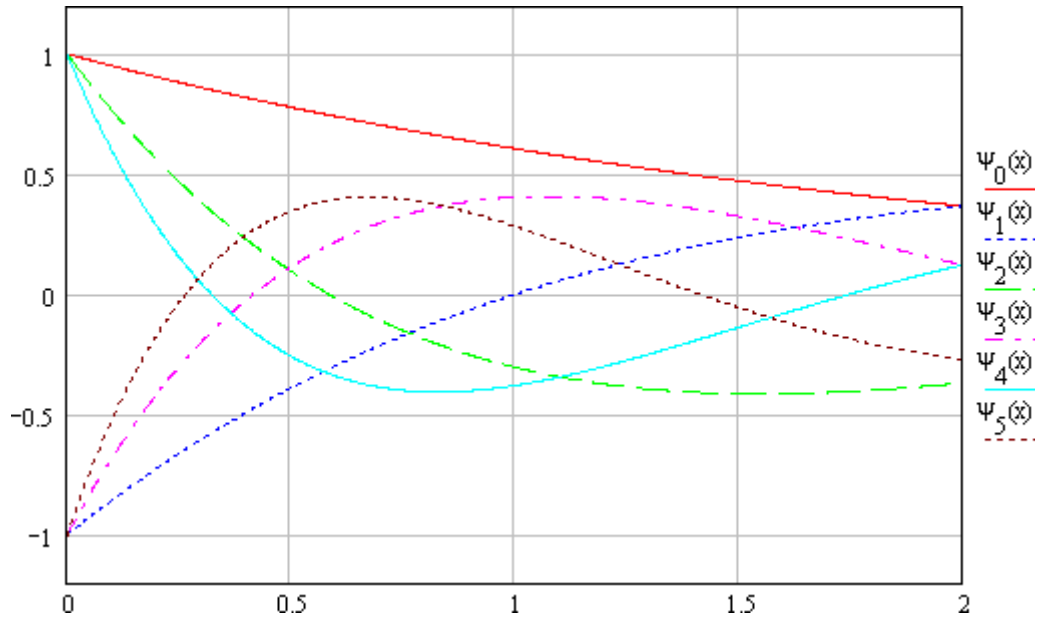


Рис. 2. Нормированные функции Лагерра $\psi_0(x), \psi_1(x), \dots, \psi_5(x)$ при $\alpha = 0$.

Рекуррентная формула для вычисления значений $\Psi_j(x)$ получается из определения (30) и соотношения (4):

$$\Psi_{j+1}(x) = (x - \alpha - 2j - 1)\Psi_j(x) - j(\alpha + j)\Psi_{j-1}(x), \quad \Psi_0(x) = x^{\frac{\alpha}{2}} e^{-\frac{x}{2}}. \quad (32)$$

Спектральные характеристики элементарных звеньев в базисе функций Лагерра

Вывод соотношений для ординат матриц ДНПФ элементарных звеньев проводится так же, как и в случае полиномов Лагерра. Преобразование формул (30) и (32) дает следующий результат:

$$\Psi'_{j+1}(x) = -\frac{1}{2}\Psi_{j+1}(x) + \frac{1}{2}\Psi_j(x) + \frac{j(\alpha + j)}{2}\Psi_{j-1}(x) - (\alpha + 2j + 1)\Psi'_j(x) - j(\alpha + j)\Psi'_{j-1}(x), \quad (33)$$

тогда

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij+1} = -\frac{1}{2}\Delta_{ij+1} + \frac{1}{2}\Delta_{ij} + \frac{j(\alpha + j)}{2}\Delta_{ij-1} - (\alpha + 2j + 1)\tilde{\mathcal{P}}_{ij} - j(\alpha + j)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}, \quad (34)$$

однако вычислить матрицу $\tilde{\mathcal{P}}$ можно только при $\alpha \geq 0$, иначе интеграл в правой части формулы (П1) расходится. Рассмотрим случай, когда $\alpha = 0$. Учитывая (34) и начальные условия

$$\tilde{\mathcal{P}}_{i0} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & i = 0, \\ 0, & i \neq 0, \end{cases}$$

получаем, что матрица $\tilde{\mathcal{P}}$ является верхней треугольной, т.е. $\tilde{\mathcal{P}}_{ij} = 0$ при $i > j$. Таким образом, элементы матрицы нормированной ДНПФ дифференцирующего звена второго рода вычисляются так:

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{\tilde{\mathcal{P}}_{ij}}{\sqrt{d_i d_j}}, \quad (35)$$

где

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & i = j = 0, \\ 0, & i > j, \\ -\frac{1}{2}\Delta_{ij} + \frac{1}{2}\Delta_{ij-1} + \frac{(j-1)^2}{2}\Delta_{ij-2} - (2j-1)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1} - (j-1)^2\tilde{\mathcal{P}}_{ij-2}, & i \leq j. \end{cases}$$

Соотношения для ординат матрицы нормированной ДНПФ дифференцирующего звена порядка n аналогичны:

$$\mathcal{P}_{ij}^n = \frac{\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n}{\sqrt{d_i d_j}}, \quad (36)$$

где

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n = \begin{cases} \Delta_{ij}, & n = 0, \\ 0, & i > j, \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^n, & i = j = 0, \\ -\frac{1}{2}\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^{n-1} + \frac{1}{2}\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{n-1} + \frac{(j-1)^2}{2}\tilde{\mathcal{P}}_{ij-2}^{n-1} - (2j-1)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^n - (j-1)^2\tilde{\mathcal{P}}_{ij-2}^n, & i \leq j. \end{cases}$$

При $\alpha > 0 \quad \forall j \quad \Psi_j(0) = 0$ и $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Psi_j(x) = 0$, поэтому матрица $\tilde{\mathcal{P}}$ кососимметрическая ($\tilde{\mathcal{P}} = -\tilde{\mathcal{P}}^T$), следовательно,

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{\tilde{\mathcal{P}}_{ij}}{\sqrt{d_i d_j}}, \quad (37)$$

где

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij} = \begin{cases} 0, & i = j, \\ -\frac{1}{2}\Delta_{ij} + \frac{1}{2}\Delta_{ij-1} + \frac{(j-1)(\alpha + j - 1)}{2}\Delta_{ij-2} - (\alpha + 2j - 1)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1} - (j-1)(\alpha + j - 1)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-2}, & i < j, \\ -\tilde{\mathcal{P}}_{ji}, & i > j. \end{cases}$$

Матрицу ДНПФ дифференцирующего звена порядка n можно найти при $\alpha > n - 1$ следующим образом:

$$\mathcal{P}_{ij}^n = \frac{\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n}{\sqrt{d_i d_j}}, \quad (38)$$

где

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n = \begin{cases} \Delta_{ij}, n = 0, \\ \sum_{k=0}^n C_n^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} \left(\frac{\alpha}{2}\right)^{[k]} \Gamma(\alpha - k + 1), i = j = 0, n = 2m \neq 0, \\ 0, i = j, n = 2m + 1, \\ -\frac{1}{2} \tilde{\mathcal{P}}_{ij}^{n-1} + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{n-1} + \frac{(j-1)(\alpha + j-1)}{2} \tilde{\mathcal{P}}_{ij-2}^{n-1} - (\alpha + 2j-1) \tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^n - (j-1)(\alpha + j-1) \tilde{\mathcal{P}}_{ij-2}^n, i < j, \\ (-1)^n \tilde{\mathcal{P}}_{ji}^n, i > j, \end{cases}$$

а для четных значений α ($0 < \alpha \leq n-1$) нужно по определению (ПЗ) вычислить элементы $\tilde{\mathcal{P}}_{i0}^n$ ($i = 0, 1, \dots$), а затем воспользоваться рекуррентным соотношением:

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij+1}^n = -\frac{1}{2} \tilde{\mathcal{P}}_{ij+1}^{n-1} + \frac{1}{2} \tilde{\mathcal{P}}_{ij}^{n-1} + \frac{j(\alpha + j)}{2} \tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{n-1} - (\alpha + 2j + 1) \tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n - j(\alpha + j) \tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^n; \quad (39)$$

для других значений параметра α матрица $\tilde{\mathcal{P}}^n$ не определена.

Интегрируя (33), находим выражение, связывающее функции Лагерра и их первообразные:

$$\int_0^x \Psi_{j+1}(\xi) d\xi = -2(\Psi_{j+1} + (\alpha + 2j + 1)\Psi_j + j(\alpha + j)\Psi_{j-1}) + \int_0^x \Psi_j(\xi) d\xi + j(\alpha + j) \int_0^x \Psi_{j-1}(\xi) d\xi,$$

следовательно,

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij+1}^{-1} = -2(\Delta_{ij+1} + (\alpha + 2j + 1)\Delta_{ij} + j(\alpha + j)\Delta_{ij-1}) + \tilde{\mathcal{P}}_{ij}^{-1} + j(\alpha + j)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{-1}, \quad (40)$$

а элементы матрицы ненормированной ДНПФ интегрирующего звена порядка n могут быть найдены с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij+1}^{-n} = -2(\tilde{\mathcal{P}}_{ij+1}^{-n+1} + (\alpha + 2j + 1)\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^{-n+1} + j(\alpha + j)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{-n+1}) + \tilde{\mathcal{P}}_{ij}^{-n} + j(\alpha + j)\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{-n}. \quad (41)$$

Начальные условия $\tilde{\mathcal{P}}_{i0}^{-1}$ и $\tilde{\mathcal{P}}_{i0}^{-n}$ вычисляются по определениям (П4) и (П5) соответственно.

Формулы (4) и (32) совпадают с точностью до обозначений функций, поэтому ДНПФ усилительного звена в базисе функций Лагерра может быть вычислена по формулам (19), (20) или (23) в зависимости от коэффициента передачи. Соотношение (24) для ординат ТНПФ множительного звена также верно, но начальные условия необходимо вычислять либо по правилу (П7), либо как ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $\Psi_0(x)$.

Если положить $\alpha = 0$, то

$$\mathcal{P}_{ij} = \begin{cases} 0, i > j, \\ -\frac{1}{2}, i = j, \\ (-1)^{i+j+1}, i < j, \end{cases} \quad (42)$$

$$P_{ij} = \begin{cases} 0, & i < j, \\ \frac{1}{2}, & i = j, \\ (-1)^{i+j}, & i > j, \end{cases} \quad (43)$$

$$P_{ij}^{-1} = \begin{cases} 0, & i < j, \\ 2, & i = j, \\ 4, & i > j, \end{cases} \quad (44)$$

или в матричной форме

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ 0 & -0.5 & 1 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & -0.5 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -0.5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 0.5 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0.5 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 0.5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 2 & 0 & 0 & \dots \\ 4 & 4 & 2 & 0 & \dots \\ 4 & 4 & 4 & 2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Полиномы Эрмита

Для расчета систем управления в случае, когда областью изменения какой-либо переменной является все множество действительных чисел, в качестве базиса $L_2((-\infty, +\infty))$ будем использовать полиномы Эрмита с параметрами m и $D > 0$ (см. [5]):

$$H_j^{m,D}(x) = (-1)^j e^{\frac{(x-m)^2}{2D}} \frac{d^j}{dx^j} \left(e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} \right), \quad (45)$$

$$G_j^{m,D}(x) = D^j H_j^{m,D}(x),$$

для которых справедливы рекуррентные формулы³:

$$H_{j+1}(x) = \frac{x-m}{D} H_j(x) - \frac{j}{D} H_{j-1}(x), \quad H_0(x) = 1, \quad (46)$$

$$G_{j+1}(x) = (x-m)G_j(x) - jDG_{j-1}(x), \quad G_0(x) = 1.$$

Полиномы $H_j(x)$ и $G_j(x)$ образуют в $L_2((-\infty, +\infty))$ биортогональную систему [6] с весом

$$\omega(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}}, \quad \text{при этом}$$

$$(H_i(x), G_j(x))_{L_2((-\infty, +\infty); \omega(x))} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) H_i(x) G_j(x) dx = \begin{cases} j!, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

однако использование биортогональной системы затрудняет определение спектральных характеристик, т.к. в данном случае не выполняются некоторые свойства ДНПФ элементарных звеньев, например, симметрия матрицы ДНПФ усилительного звена, вследствие этого будем использовать только полиномы $G_j(x)$:

$$(G_i(x), G_j(x))_{L_2((-\infty, +\infty); \omega(x))} = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) G_i(x) G_j(x) dx = \begin{cases} j! D^j, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Пусть

$$g_j(x) = \frac{G_j(x)}{\sqrt{h_j}} \quad (j = 0, 1, \dots), \quad (47)$$

где

$$h_j = j! D^j, \quad (48)$$

тогда система функций $\{g_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ образует ортонормированный базис в $L_2((-\infty, +\infty); \omega(x))$. Приведем несколько первых полиномов Эрмита:

³ При выводе рекуррентных соотношений для полиномов Эрмита и ДНПФ элементарных звеньев индексы m и D будем опускать.

$$G_0(x) = 1,$$

$$G_1(x) = x - m,$$

$$G_2(x) = x^2 - 2mx + m^2 - D,$$

$$G_3(x) = x^3 - 3mx^2 + (3m^2 - 3D)x - m^3 + 3mD$$

и т.д.

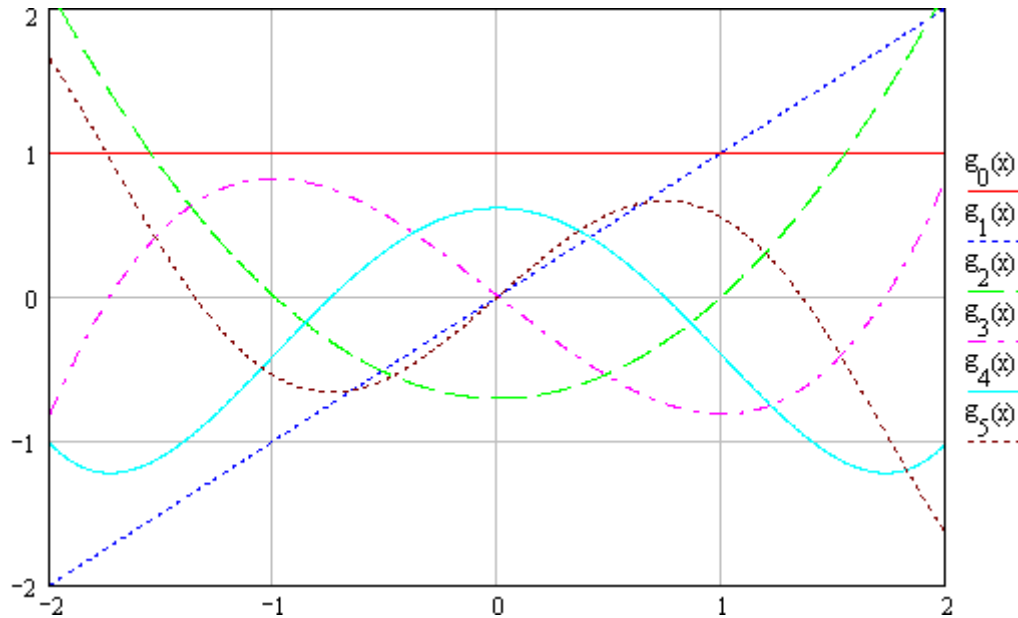


Рис. 3. Нормированные полиномы Эрмита $g_0(x), g_1(x), \dots, g_5(x)$ при $m = 0$ и $D = 1$.

Спектральные характеристики элементарных звеньев в базисе полиномов Эрмита

Используя определение (45) и правило (46), можно установить связь между полиномами Эрмита и их производными, а именно

$$G'_j(x) = jG_{j-1}(x). \quad (49)$$

На основании этого запишем соотношение для ординат матрицы ненормированной ДНПФ дифференцирующего звена второго рода относительно полиномов Эрмита:

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij} = j\Delta_{ij-1}, \quad (50)$$

где

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} h_j, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (51)$$

т.е. в матрице $\tilde{\mathcal{P}}$ отличны от нуля только элементы $\tilde{\mathcal{P}}_{ij}$ при $i = j - 1$. Умножая $\tilde{\mathcal{P}}_{ij}$ на нормирующий множитель, получаем формулу для матрицы \mathcal{P} :

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{\tilde{\mathcal{P}}_{ij}}{\sqrt{h_i h_j}}. \quad (52)$$

Дифференцируя выражение (49), нетрудно найти формулу для ординат матрицы ДНПФ дифференцирующего звена порядка n :

$$P_{ij}^n = \frac{\tilde{P}_{ij}^n}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad (53)$$

где

$$\tilde{P}_{ij}^n = \begin{cases} \Delta_{ij}, & n = 0, \\ j\tilde{P}_{ij-1}^{n-1}, & n > 0, \end{cases}$$

или

$$\tilde{P}_{ij}^n = j^{[n]} \Delta_{ij-n}.$$

Воспользуемся формулой (49) для вывода соотношения, связывающего ординаты матрицы ДНПФ интегрирующего звена. После интегрирования получаем:

$$G_{j+1}(x) - G_{j+1}(0) = (j+1) \int_0^x G_j(\xi) d\xi,$$

тогда

$$P_{ij}^{-1} = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-1}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad (54)$$

$$\text{где } \tilde{P}_{ij}^{-1} = \frac{1}{j+1} (\Delta_{ij+1} - \Delta_{i0} G_{j+1}(0)),$$

и аналогично

$$P_{ij}^{-n} = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-n}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad (55)$$

где

$$\tilde{P}_{ij}^{-n} = \begin{cases} \Delta_{ij}, & n = 0, \\ \frac{1}{j+1} \left(\tilde{P}_{ij+1}^{-n+1} - \frac{\tilde{A}_{i0}^{n-1}}{(n-1)!} G_{j+1}(0) \right), & n > 0, \end{cases}$$

а \tilde{A}_{ij}^n – элементы матрицы ненормированной ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $w(x) = x^n$, соотношение для которых будет дано ниже. Рассмотрим сначала случай, когда

$w(x) = (x-m)^n$. Учитывая выражение (46), можно сделать вывод, что

$$(x-m)^{n+1} G_i(x) G_j(x) = (x-m)^n G_i(x) G_{j+1}(x) + (x-m)^n j D G_i(x) G_{j-1}(x),$$

следовательно, для ординат матрицы ненормированной ДНПФ усилительного звена с коэффициентом передачи $w(x) = (x-m)^n$ справедливо соотношение:

$$\hat{A}_{ij}^n = \begin{cases} \Delta_{ij}, & n = 0, \\ 0, & |i - j| > n, \\ \hat{A}_{ij+1}^{n-1} + jD\hat{A}_{ij-1}^{n-1}, & i \leq j, \\ \hat{A}_{ji}^n, & i > j, \end{cases}$$

тогда, используя разложение функции $w(x) = x^n$ в ряд Тейлора по степеням $(x - m)$, получим выражение для элементов матрицы \tilde{A}^n :

$$\tilde{A}_{ij}^n = \sum_{k=0}^n C_n^k m^{n-k} \hat{A}_{ij}^k,$$

отсюда

$$A_{ij}^n = \frac{\tilde{A}_{ij}^n}{\sqrt{h_i h_j}}. \quad (56)$$

По аналогии с (19), (20), (24) и (25) запишем соотношение для ординат матрицы ДНПФ усилительного звена с произвольным коэффициентом передачи:

$$W_{ij} = \frac{\tilde{W}_{ij}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad (57)$$

где $\tilde{W}_{ij+1} = \tilde{W}_{i+1j} + iD\tilde{W}_{i-1j} - jD\tilde{W}_{ij-1}$, и для ординат матрицы ТНПФ множительного звена:

$$V_{ijk} = \frac{\tilde{V}_{ijk}}{\sqrt{h_i h_j h_k}}, \quad (58)$$

где

$$\tilde{V}_{ijk} = \begin{cases} 0, & |i' - j'| > k', \\ \Delta_{i'j'}, & k' = 0, \\ \tilde{V}_{i'j'+1k'-1} + j'D\tilde{V}_{i'j'-1k'-1} - (k'-1)D\tilde{V}_{i'j'k'-2}, & k' > 0, \\ (i', j', k') - \text{такая перестановка индексов } (i, j, k), \text{ что } i' \geq j' \geq k'. \end{cases}$$

В частном случае, при $m = 0$ и $D = 1$, выражения для ординат матриц ДНПФ дифференцирующего и интегрирующего звеньев принимают следующий вид:

$$\mathcal{P}_{ij} = \begin{cases} \sqrt{j}, & i = j - 1, \\ 0, & i \neq j - 1, \end{cases} \quad (59)$$

$$P_{ij} = \begin{cases} \sqrt{j}, & i = j - 1, \\ (-1)^{k+s} \sqrt{\frac{(2k-1)!!(2s-1)!!}{2\pi(2k)!!(2s)!!}}, & i = 2k, j = 2s, \\ 0, & i \neq j - 1, i \neq 2k \vee j \neq 2s, \end{cases} \quad (60)$$

$$P_{ij}^{-1} = \begin{cases} (-1)^{k+1} \sqrt{\frac{(2k-1)!!}{2k(2k)!!}}, & i=0, j=2k-1, \\ 0, & i \neq 0 \vee j \neq 2k-1, i \neq j+1, \\ \frac{1}{\sqrt{i}}, & i=j+1, \end{cases} \quad (61)$$

т.е.

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & 1 & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{4\sqrt{6}} & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Функции Эрмита

На основании (45) определим функции Эрмита, ортогональные на всем множестве действительных чисел с весом $\mu(x) = 1$:

$$\Phi_j(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi D}} e^{-\frac{(x-m)^2}{4D}} G_j(x), \quad (62)$$

тогда

$$\Phi_{j+1}(x) = (x-m)\Phi_j(x) - jD\Phi_{j-1}(x), \quad \Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi D}} e^{-\frac{(x-m)^2}{4D}}, \quad (63)$$

$$(\Phi_i(x), \Phi_j(x))_{L_2((-\infty, +\infty))} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_i(x)\Phi_j(x)dx = \begin{cases} h_j, & i=j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

и поэтому функции

$$\phi_j(x) = \frac{\Phi_j(x)}{\sqrt{h_j}} \quad (j=0,1,\dots), \quad (64)$$

где h_j вычисляется по формуле (48), образуют ортонормированный базис $L_2((-\infty, +\infty))$.

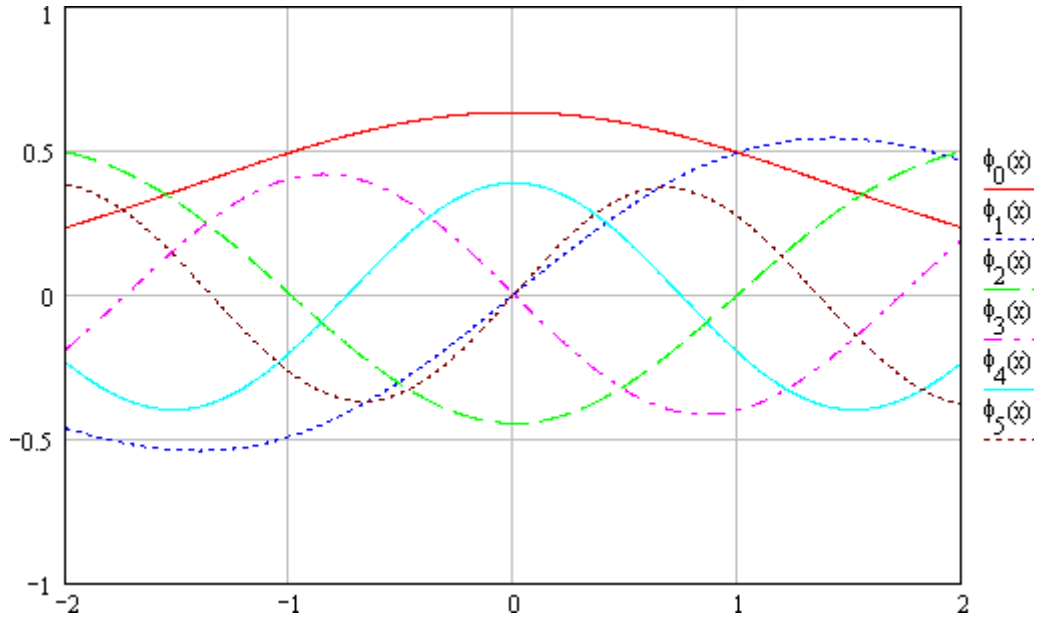


Рис. 4. Нормированные функции Эрмита $\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_5(x)$ при $m = 0$ и $D = 1$.

Спектральные характеристики элементарных звеньев в базисе функций Эрмита

Функции Эрмита и их производные связаны соотношением:

$$\Phi'_j(x) = \frac{j}{2}\Phi_{j-1}(x) - \frac{1}{2D}\Phi_{j+1}(x), \quad (65)$$

которое позволяет найти матрицу ДНПФ дифференцирующего звена второго рода:

$$\mathcal{P}_{ij} = \frac{\tilde{\mathcal{P}}_{ij}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad (66)$$

$$\text{где } \tilde{\mathcal{P}}_{ij} = \frac{j}{2}\Delta_{ij-1} - \frac{1}{2D}\Delta_{ij+1},$$

а для дифференцирующего звена порядка n

$$\mathcal{P}_{ij}^n = \frac{\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad (67)$$

где

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n = \begin{cases} \Delta_{ij}, & n = 0, \\ \frac{j}{2}\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{n-1} - \frac{1}{2D}\tilde{\mathcal{P}}_{ij+1}^{n-1}, & n > 0. \end{cases}$$

Поскольку $\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi_j^{(n)}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_j^{(n)}(x) = 0$, матрица $\tilde{\mathcal{P}}^n$ является симметрической или кососимметрической в зависимости от порядка n , а именно $\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n = (-1)^n \tilde{\mathcal{P}}_{ji}^n$. Это свойство дает возможность ускорить процесс вычисления $\tilde{\mathcal{P}}^n$.

Интегрируя левую и правую часть равенства (65) и применяя правило (П4), получаем рекуррентную формулу для расчета ненормированной ДНПФ интегрирующего звена:

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-1} = -2D\Delta_{ij} + jD\tilde{P}_{ij-1}^{-1} + 2D\tilde{X}_i^0\Phi_j(0), \quad (68)$$

а из (П5) следует, что

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-n} = -2D\tilde{P}_{ij}^{-n-1} + jD\tilde{P}_{ij-1}^{-n} + 2D\frac{\tilde{X}_i^{n-1}}{(n-1)!}\Phi_j(0), \quad (69)$$

где через \tilde{X}_i^n обозначены элементы вектора ненормированной нестационарной спектральной характеристики функции $f(x) = x^n$ (см. приложение), для вычисления которых воспользуемся соотношением (63), (65) и разложением функции $w(x) = x^n$ в ряд Тейлора по степеням $(x-m)$:

$$\tilde{X}_i^n = \sum_{k=0}^n C_n^k m^{n-k} \hat{X}_i^k, \text{ где}$$

$$\hat{X}_i^n = \begin{cases} \sqrt[4]{8\pi D}, & n=0, i=0, \\ (i-1)D\hat{X}_{i-2}^n, & n=0, i>0, \\ \hat{X}_{i+1}^{n-1} + iD\hat{X}_{i-1}^{n-1}, & n>0. \end{cases}$$

Начальные условия для (68) и (69) в общем случае нужно вычислять непосредственно по правилам (П4) и (П5).

Для определения матриц ДНПФ усилительного звена применяются формулы (56) и (57), а для ТНПФ множительного звена справедливо соотношение, связывающее ординаты матрицы \tilde{V} :

$$\tilde{V}_{ijk+1} = \tilde{V}_{ij+1k} + jD\tilde{V}_{ij-1k} - kD\tilde{V}_{ijk-1}, \quad (70)$$

а \tilde{V}_{ij0} определяются по правилу (П7).

Если положить $m=0$ и $D=1$, то формулы для вычисления ординат матриц ДНПФ дифференцирующего и интегрирующего звеньев примут вид:

$$\mathcal{P}_{ij} = \begin{cases} \frac{\sqrt{j}}{2}, & i=j-1, \\ 0, & i \neq j-1, i \neq j+1, \\ -\frac{\sqrt{i}}{2}, & i=j+1, \end{cases} \quad (71)$$

$$P_{ij} = \begin{cases} \frac{\sqrt{j}}{2}, & i = j-1, \\ -\frac{\sqrt{i}}{2}, & i = j+1, \\ (-1)^{k+s} \sqrt{\frac{(2k-1)!!(2s-1)!!}{2\pi(2k)!!(2s)!!}}, & i = 2k, j = 2s, \\ 0, & i \neq j-1, i \neq j+1, i \neq 2k \vee j \neq 2s, \end{cases} \quad (72)$$

$$P_{ij}^{-1} = \begin{cases} 2\sqrt{\frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!}}, & i = 2k-1, j = 0, \\ 0, & i = 2k, j = 0, \\ -2\frac{\delta_{ij-1}}{\sqrt{j}} + 2\frac{\beta_{ij-1}}{\sqrt{j}} + P_{ij-2}^{-1}\sqrt{\frac{j-1}{j}}, & j > 0, \end{cases} \quad (73)$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\beta_{ij} = \begin{cases} (-1)^s \sqrt{\frac{2(2k-1)!!(2s-1)!!}{(2k)!!(2s)!!}}, & i = 2k, j = 2s, \\ 0, & i \neq 2k \vee j \neq 2s, \end{cases}$$

т.е.

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \dots \\ -\frac{1}{2\sqrt{\pi}} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2+2\sqrt{2} & 0 & \frac{(-2+\sqrt{2})\sqrt{6}}{3} & \dots \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 0 & \frac{(-2+\sqrt{2})\sqrt{3}}{3} & \dots \\ \frac{2\sqrt{6}}{3} & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Заключение

В данной работе получены алгоритмы расчета нестационарных передаточных функций элементарных звеньев относительно системы полиномов и функций Лагерра, а также полиномов и функции Эрмита для решения различных прикладных задач теории управления с использованием спектральной формы математического описания систем в случае полубесконечных или бесконечных интервалов изменения времени и фазовых переменных, в частности, для решения задачи теоретико-вероятностного анализа нелинейных стохастических систем. Выбор базисных функций определяется условиями конкретной задачи: полиномы и функции Эрмита удобно применять при спектральном преобразовании по фазовым переменным, а для переменной времени целесообразно применять полиномы и функции Лагерра. При решении задач спектральным методом на ЭВМ можно оперировать только с конечными векторами и матрицами, поэтому необходимо усекать спектральные характеристики функций и операторов до некоторого выбранного порядка, что сказывается на точности результатов. Однако точность можно повысить не только с помощью увеличения порядка усечения характеристик, но и правильным выбором базисной системы. Очевидно, что многочлен $P_n(x)$ лучше всего представлять конечным отрезком ряда Фурье по ортогональным полиномам, т.к. в этом случае все коэффициенты ряда, начиная с $(n+1)$ -ого, обращаются в нуль. Для аппроксимации плотности вероятности лучше использовать функции Эрмита, а функции Лагерра предпочтительны для приближения функций вида $e^{-x}x^n$. Кроме того, при расчете можно использовать как полиномы, так и функции Лагерра для полубесконечных интервалов (полиномы и функции Эрмита для бесконечных интервалов), и, таким образом, контролировать правильность и точность расчета спектральным методом [2].

Приложение

Определение нестационарных спектральных характеристик функций и операторов

Пусть $\{Q_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ – полная ортогональная система функций в $L_2(\Omega; \sigma(x))$, тогда любую функцию $h(x) \in L_2(\Omega; \sigma(x))$ можно представить рядом Фурье, сходящимся к $h(x)$ по норме $L_2(\Omega; \sigma(x))$:

$$h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} H_j \frac{Q_j(x)}{\sqrt{u_j}},$$

где

$$u_j = \|Q_j(x)\|_{L_2(\Omega; \sigma(x))}^2 = \int_{\Omega} \sigma(x) Q_j^2(x) dx,$$

$$H_j = \frac{1}{\sqrt{u_j}} (h(x), Q_j(x))_{L_2(\Omega; \sigma(x))} = \frac{1}{\sqrt{u_j}} \int_{\Omega} \sigma(x) h(x) Q_j(x) dx,$$

и, следовательно, сопоставить ей нестационарную спектральную характеристику $H = (H_j)_{j=0}^{\infty}$, а для вычисления элементов матриц ненормированных нестационарных передаточных функций элементарных звеньев относительно системы $\{Q_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ справедливы следующие правила:

1. Дифференцирующее звено второго рода:

$$\tilde{P}_{ij} = \int_{\Omega} \sigma(x) Q_i(x) \frac{dQ_j(x)}{dx} dx; \quad (\text{П1})$$

2. Дифференцирующее звено первого рода:

$$\tilde{P}_{ij} = \sigma^*(0) Q_i(0) Q_j(0) + \tilde{P}_{ij}, \quad (\text{П2})$$

где $\sigma^*(x)$ – регуляризация весовой функции $\sigma(x)$ (см. [3]);

3. Дифференцирующее звено порядка n :

$$\tilde{P}_{ij}^n = \int_{\Omega} \sigma(x) Q_i(x) \frac{d^n Q_j(x)}{dx^n} dx; \quad (\text{П3})$$

4. Интегрирующее звено:

$$\tilde{P}_{ij}^{-1} = \int_{\Omega} \sigma(x) Q_i(x) dx \int_0^x Q_j(\xi) d\xi; \quad (\text{П4})$$

5. Интегрирующее звено порядка n :

$$\tilde{P}_{ij}^{-n} = \int_{\Omega} \sigma(x) Q_i(x) dx \int_0^x \int_0^{\xi_1} \dots \int_0^{\xi_{n-1}} Q_j(\xi_n) d\xi_n \dots d\xi_2 d\xi_1; \quad (\text{П5})$$

6. Усилительное звено с коэффициентом передачи $w(x)$:

$$\tilde{W}_{ij} = \int_{\Omega} \sigma(x) w(x) Q_i(x) Q_j(x) dx; \quad (\text{П6})$$

7. Множительное звено:

$$\tilde{V}_{ijk} = \int_{\Omega} \sigma(x) Q_i(x) Q_j(x) Q_k(x) dx. \quad (\text{П7})$$

Чтобы получить нормированные нестационарные передаточные функции, ординаты, вычисляемые по правилам (П1)-(П6), необходимо умножить на $\frac{1}{\sqrt{u_i u_j}}$, а для (П7) – на $\frac{1}{\sqrt{u_i u_j u_k}}$.

Список литературы

1. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
2. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
3. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. – М.: МАИ, 1984. – 84 с.
4. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.: ГИИЛ, 1948. – 260 с.
5. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
6. Пугачев В.С. Лекции по функциональному анализу. – М.: МАИ, 1996. – 744 с.

*Рыбаков Константин Александрович, аспирант кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета);
e-mail: rkoffice@mail.ru, dep805@mai.ru;
контактный телефон: 158-48-11;*

*Сотскова Ирина Леонидовна, доцент кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета), к.ф.-м.н;
e-mail: dep805@mai.ru;
контактный телефон: 158-48-11.*