АЛГОРИТМ АНАЛИЗА МНОГОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.

Целью работы является разработка приближенно-аналитического метода анализа многомерных стохастических непрерывно-дискретных систем, основанного на спектральной форме математического описания. Рассматриваемые системы состоят из нескольких подсистем, переключение между которыми осуществляется в заданные моменты времени. Область применения таких систем широка – это и управление летальными аппаратами в различных режимах функционирования, и анализ систем, в которых возможен отказ оборудования, и т.д. Общим для систем данного класса является скачкообразное изменение параметров или смена структуры, т.е. переход в другой режим функционирования.

Существующие аналитические и приближенно-аналитические методы анализа применимы лишь в частных случаях (при существенном упрощении математической модели системы), а численные методы требуют проведения слишком большого объема вычислений. В связи с этим возникает необходимость в разработке нового метода анализа стохастических непрерывно-дискретных систем.

Предложенный метод является развитием спектрального метода [4], использование которого позволяет свести исходную задачу, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями или дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными и разностными соотношениями к системе линейных алгебраических уравнений и получить решение в явном виде. Это существенно упрощает процесс решения и предельно формализует алгоритм решения задачи, что делает этот метод удобным для применения на ЭВМ.

1. Постановка задачи.

Поведение модели объекта описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито:

$$dX = f\left(t, X(t), u_k(t)\right)dt + \sigma\left(t, X(t), u_k(t)\right)\cdot dW(t),$$
$$k = 0,1,\ldots,N-1, \qquad (1)$$
$$X(t_0) = X_0,$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния, $u_k \in U \subseteq \mathbb{R}^q$ - вектор управления, $t \in T = \left[t_0, t_N\right) = \bigcup_{k=0}^{N-1} T_k, T_k = \left[t_k, t_{k+1}\right)$, моменты времени $t_0, t_1, .., t_N$ заданы; $W(t)$ - α-мерный стандартный винеровский случайный процесс, не зависящий от X_0; $f(t, x, u_k)$ - вектор-функция размера $n \times 1$, $\sigma(t, x, u_k)$ - матричная функция размера $n \times \alpha$.

Начальное состояние объекта задается плотностью вероятности:

$$X_0 \sim p(t_0, x) = p_0(x). \qquad (2)$$

На траекториях системы производятся измерения вида:

$$Y(t_k) = h\left(t_k, X(t_k)\right) + \eta(t_k)\cdot V(t_k),$$
$$k = 0,1,\ldots,N-1, \qquad (3)$$

где $Y \in \mathbb{R}^m$ - вектор измерений, $\left\{V(t_k)\right\}_{k=0}^{N-1} \subset \mathbb{R}^\beta$ - последовательность стандартных гауссовских случайных величин, $\eta(t_k)$ - матрица размерности $m \times \beta$, для которой существует обратная матрица $\left[\eta(t_k)\eta^T(t_k)\right]^{-1}$.

По известному выражению (3) можно получить условную плотность вероятности $p^{<k>}(y\,|\,x)$:

$$p^{<k>}(y\,|\,x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^m \sqrt{\left|\eta(t_k)\eta^T(t_k)\right|}} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{\left(y - h(t_k, x)\right)^T \left(\eta(t_k)\eta^T(t_k)\right)^{-1} \left(y - h(t_k, x)\right)}{2}\right), \qquad (4)$$
$$k = 0,1,\ldots,N-1.$$

Обозначим через $p^{<k>}(t, x, y)$ совместную плотность вероятности при $t \in T_k = \left[t_k, t_{k+1}\right)$ ($k = 0,1,\ldots,N-1$).

Задача теоретико-вероятностного анализа состоит в следующем: по заданному уравнению системы (1), управлению $u_k(t) = u_k\left(t, Y(t_k)\right)$ ($k = 0,1,\ldots,N-1$), распределению начального состояния (2) и уравнению измерителя (3) найти совместную плотность вероятности $p^{<k>}(t,x,y)$ ($k=0,1,\ldots,N-1$).

2. Анализ стохастических непрерывно-дискретных систем в классе обобщенных характеристических функций.

Введем элементы матрицы диффузии

$$g_{ij}(t,x,u_k)=\sum_{r=1}^{\alpha}\sigma_{ir}(t,x,u_k)\sigma_{jr}(t,x,u_k)$$

и перепишем коэффициенты сноса и диффузии следующим образом:

$$f_i^{<k>}(t,x,y)=f_i(t,x,u_k(t,y)),$$

$$g_{ij}^{<k>}(t,x,y)=g_{ij}(t,x,u_k(t,y)),$$

$$t\in T_k,\ i=1\div n,\ j=1\div n,\ k=0,1,..,N-1.$$

Совместная плотность вероятности на каждом временном полуинтервале T_k удовлетворяет уравнению типа Фоккера-Планка-Колмогорова (ФПК) [5]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p^{<k>}(t,x,y)\right)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i^{<k>}(t,x,y)\,p^{<k>}(t,x,y)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(g_{ij}^{<k>}(t,x,y)\,p^{<k>}(t,x,y)\right), \tag{5}$$
$$t\in T_k,\ k=0,1,..,N-1.$$

Начальное условие для (5) определяется следующим образом:

$$p^{<0>}(t_0,x,y)=p_0(x)\cdot p^{<0>}(y\,|\,x), \tag{6}$$

а для перехода к следующему временному полуинтервалу используется формула:

$$p^{<k+1>}(t_{k+1},x,y)=\int_{\mathbb{R}^m}p^{<k>}(t_{k+1}-0,x,y)dy\cdot p^{<k+1>}(y\,|\,x),$$
$$k=0,1,\ldots,N-2. \tag{7}$$

Необходимо также задать краевые условия для уравнения ФПК, например, $p^{<k>}(t,x,y)\big|_{x=\pm\infty}=0$ ($t\in T_k,\ k=0,1,..,N-1$).

Аналогом уравнения ФПК (5) в спектральной области является уравнение обобщенной характеристической функции [4]:

$$
\begin{aligned}
&P^{t}\left(\xi,\xi\right)\cdot \Phi^{<k>}\left(\xi,0\right)-q\left(1,0;t_{k}\right)\otimes \Phi_{0}^{<k>}\left(\xi-1,0\right)= \\
&=-\sum_{i=1}^{n}P_{i}^{x}\left(\xi,\xi\right)\cdot F_{i}^{<k>}\left(\xi,\xi\right)\cdot \Phi^{<k>}\left(\xi,0\right)+ \\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}^{xx}\left(\xi,\xi\right)\cdot G_{i,j}^{<k>}\left(\xi,\xi\right)\cdot \Phi^{<k>}\left(\xi,0\right),\ k=0,1,\ldots N-1,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

где $\xi=n+m+1$ - общее число переменных задачи; под записью $M\left(p,q\right)$ понимается многомерная матрица [2] размерности $p+q$ (имеющая p строчных и q столбцовых индексов), а именно, $P^{t}\left(\xi,\xi\right)$ соответствует оператору $\frac{\partial}{\partial t}[\cdots]$, а $P_{i}^{x}\left(\xi,\xi\right)$ и $P_{ij}^{xx}\left(\xi,\xi\right)$ операторам $\frac{\partial}{\partial x_{i}}[\cdots]$ и $\frac{\partial^{2}}{\partial x_{i}\partial x_{j}}[\cdots]$ соответственно; $F_{i}^{<k>}\left(\xi,\xi\right)$ и $G_{ij}^{<k>}\left(\xi,\xi\right)$ - многомерные нестационарные передаточные функции [3,4] усилительных звеньев с коэффициентами усиления $f_{i}^{<k>}\left(t,x,y\right)$ и $g_{ij}^{<k>}\left(t,x,y\right)$; $\Phi^{<k>}\left(\xi,0\right)$ - нестационарная спектральная характеристика [3,4] искомой плотности вероятности.

Из уравнения (8) можно выразить неизвестную обобщенную характеристическую функцию, т.к. она входит линейно (сокращенная запись):

$$
\begin{aligned}
&\Phi^{<k>}\left(\xi,0\right)=\left(A^{<k>}\left(\xi,\xi\right)\right)^{-1}\cdot\left(q\left(1,0;t_{k}\right)\otimes \Phi_{0}^{<k>}\left(\xi-1,0\right)\right), \\
&k=0,1,\ldots,N-1,
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $q\left(1,0;t_{k}\right)$ - вектор значений базисных функций пространства $L_{2}\left(T\right)$ в точке t_{k}, а $\Phi_{0}^{<k>}\left(\xi-1,0\right)$ определяется с помощью спектрального аналога формулы (7):

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{0}^{<k+1>}\left(\xi-1,0\right)=\Phi_{усл}^{<k+1>}\left(\xi-1,\xi-1\right)\times \\
&\times\left\{\left[q(0,1;t_{k+1})\otimes E^{x}\left(n,n\right)\otimes \underbrace{P^{-1}\left(1,1\right)\otimes\ldots\otimes P^{-1}\left(1,1\right)}_{m}\right]\cdot \Phi^{<k>}\left(\xi,0\right)\right\}, \\
&k=0,1,\ldots,N-2,
\end{aligned}
\tag{10}
$$

а также начальным условием:

$$
\Phi_{0}^{<0>}\left(\xi-1,0\right)=\Phi_{усл}^{<0>}\left(\xi-1,\xi-1\right)\cdot \Phi_{нач}\left(\xi-1,0\right), \tag{11}
$$

где $\Phi_{усл}^{<k>}(\xi-1,\xi-1)$ - многомерная нестационарная передаточная функция усилительного звена с коэффициентом усиления $p^{<k>}(y\,|\,x)$, где $\Phi_{нач}(\xi-1,0)$ - нестационарная спектральная характеристика функции $p_0(x)$, $E^x(n,n)$ - многомерная единичная матрица соответствующей размерности, $P^{-1}(1,1)$ - плоская матрица, которая соответствует оператору интегрирования по всему пространству $\mathbb{R}$.

Таким образом исходная задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений (8), решение которой найдено в общем виде (9). Для получения совместной плотности распределения в пространственно-временной области следует применить формулу обратного спектрального преобразования:

$$
\begin{gathered}
p^{<k>}(t,x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}..\sum_{i_n=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}..\sum_{k_m=0}^{\infty}\Phi_{j,i_1,..,i_n,k_1,..,k_m}^{<k>}q(j,t,T)\times \\
\times p_1(i_1,x_1)...p_n(i_n,x_n)h_1(k_1,y_1)...h_m(k_m,y_m), \\
k=0,1,..,N-1,
\end{gathered}
\tag{12}
$$

где $\{q(j,t,t_N)\}_{j=0}^{\infty}$ - ортонормированный базис пространства $L_2(T)$, $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, …, $\{p_n(i_n,x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$, $\{h_1(k_1,y_1)\}_{k_1=0}^{\infty}$, …, $\{h_m(k_m,y_m)\}_{k_m=0}^{\infty}$ - ортонормированные базисы пространства $L_2(\mathbb{R})$.

Другой подход решения поставленной задачи базируется на использовании обобщенного уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова [1]:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t}\left(p^{<k>}(t,x,y)\right)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i^{<k>}(t,x,y)\,p^{<k>}(t,x,y)\right)+ \\
+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(g_{ij}^{<k>}(t,x,y)\,p^{<k>}(t,x,y)\right)- \\
-\sum_{r=0}^{N-1}v_{kr}(t,x,y)+\sum_{r=0}^{N-1}u_{rk}(t,x,y),\ k=0,1,...,N-1.
\end{gathered}
\tag{13}
$$

При данной постановке задачи (1)-(3) матрицы поглощения и восстановления [1] примут следующий вид в силу последовательной смены подсистем:

$$v(t,x,y)=\begin{bmatrix} 0 & v_{0,1}(t,x,y) & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & v_{1,2}(t,x,y) & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & v_{N-2,N-1}(t,x,y) \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$u(t,x,y)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ u_{0,1}(t,x,y) & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & u_{1,2}(t,x,y) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & u_{N-2,N-1}(t,x,y) & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

где

$$v_{k,k+1}(t,x,y)=u_{k,k+1}(t,x,y)=$$
$$=\delta(t-t_{k+1}+0)\,p^{<k+1>}(y\,|\,x)\int\limits_{\mathbb{R}^m} p^{<k>}(t_{k+1}-0,x,y)\,dy.$$

С учетом (14) и (15) уравнение (13) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(p^{<k>}(t,x,y)\right)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i^{<k>}(t,x,y)\,p^{<k>}(t,x,y)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(g_{ij}^{<k>}(t,x,y)\,p^{<k>}(t,x,y)\right)-$$
$$-\left(1-\delta(k-N+1)\right)\delta(t-t_{k+1}+0)\,p^{<k+1>}(y\,|\,x)\int\limits_{\mathbb{R}^m} p^{<k>}(t_{k+1}-0,x,y)\,dy\cdot \quad (16)$$
$$+\left(1-\delta(k)\right)\delta(t-t_k+0)\,p^{<k>}(y\,|\,x)\int\limits_{\mathbb{R}^m} p^{<k-1>}(t_k-0,x,y)\,dy,$$
$$k=0,1,\ldots,N-1.$$

Таким образом получена замкнутая система дифференциальных уравнений в частных производных.

В этом случае условие нормировки будет таким (см. [1]):

$$\sum_{k=0}^{N-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\int\limits_{\mathbb{R}^m} p^{<k>}(t,x,y)\,dxdy=1.$$

Из формулы (6) получим начальные условия для обобщенного уравнения ФПК:

$$p^{<k>}(t_0,x,y)=\begin{Bmatrix} p_0(x)\,p^{<0>}(y\,|\,x), k=0 \\ 0, k=1,..,N-1 \end{Bmatrix}= \qquad (17)$$
$$=\delta(k)\,p_0(x)\,p^{<0>}(y\,|\,x).$$

Необходимо также задать краевые условия:

$$p^{<k>}(t,x,y)\Big|_{x=\pm\infty}=0,\ k=0,..,N-1. \qquad (18)$$

Аналогично первому подходу построим спектральный аналог обобщенного уравнения ФПК, учитывая, что добавляется новая дискретная переменная – номер шага:

$$\begin{aligned} &P^t(\eta,\eta)\cdot\Phi(\eta,0)-q(1,0;t_0)\otimes\psi(1,0;0)\otimes\Phi_0(\eta-2,0)= \\ &=-\sum_{i=1}^{n}P_i^x(\eta,\eta)\cdot F_i\ (\eta,\eta)\cdot\Phi(\eta,0)+ \\ &+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}P_{ij}^{xx}(\eta,\eta)\cdot G_{i,j}(\eta,\eta)\cdot\Phi(\eta,0)- \\ &-V(\eta,\eta)\cdot\Phi(\eta,0)+U(\eta,\eta)\cdot\Phi(\eta,0), \end{aligned} \qquad (19)$$

где $\eta=n+m+2$, $\psi(1,0;0)$ - вектор значений базисных функций $\{\psi(l,k,N)\}_{l=0}^{\infty}$ пространства квадратично-суммируемых функций дискретного аргумента при k=0, $V(\eta,\eta)$ и $U(\eta,\eta)$ - многомерные нестационарные передаточные функции поглощения и восстановления соответственно, вычисляемые таким образом:

$$\begin{aligned} &V(\eta,\eta)=\left(\varDelta^v(2,2)\otimes E^x(n,n)\otimes E^y(m,m)\right)\times \\ &\times\left(E^t(1,1)\otimes\left(\left[T_{+1}^k(1,1)\otimes E^x(n,n)\otimes E^y(m,m)\right]\cdot\Phi_{усл}(\eta-1,\eta-1)\right)\right)\times \\ &\times\left(E^t(1,1)\otimes E^k(1,1)\otimes E^x(n,n)\otimes\underbrace{P^{-1}(1,1)\otimes...\otimes P^{-1}(1,1)}_{m}\right), \end{aligned} \qquad (20)$$

$$U(\eta,\eta)=\left(\Delta^{u}(2,2)\otimes E^{x}(n,n)\otimes E^{y}(m,m)\right)\times$$
$$\times\left(E^{t}(1,1)\otimes \Phi_{усл}(\eta-1,\eta-1)\right)\times$$
$$\times\left(E^{t}(1,1)\otimes T^{k}_{-1}(1,1)\otimes E^{x}(n,n)\otimes \underbrace{P^{-1}(1,1)\otimes\ldots\otimes P^{-1}(1,1)}_{m}\right), \quad (21)$$

где $\mathrm{T}^{k}_{+1}(1,1)$ и $\mathrm{T}^{k}_{-1}(1,1)$ - двумерные нестационарные передаточные функции чистого упреждения и чистого запаздывания на один шаг соответственно [3], $\Delta^{v}(2,2)$ и $\Delta^{u}(2,2)$ - многомерные нестационарные передаточные функции усилительных звеньев с коэффициентами передачи $\left(1-\delta(k-N+1)\right)\delta(t-t_{k+1}+0)$ и $\left(1-\delta(k)\right)\delta(t-t_{k}+0)$ соответственно.

Из уравнения (19) также можно выразить неизвестную обобщенную характеристическую функцию:

$$\Phi(\eta,0)=\left(A(\eta,\eta)\right)^{-1}\cdot\left(q(1,0;t_0)\otimes\psi(1,0;0)\otimes\Phi_0(\eta-2,0)\right). \quad (22)$$

Далее с помощью обратного спектрального преобразования [3] получаем решение уравнения (16):

$$p^{<k>}(t,x,y)=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}..\sum_{i_n=0}^{\infty}\sum_{k_1=0}^{\infty}..\sum_{k_m=0}^{\infty}\Phi_{j,l,i_1,..,i_n,k_1,..,k_m}q(j,t,T)\times$$
$$\times\psi(l,k,N)\,p_1(i_1,x_1)...p_n(i_n,x_n)h_1(k_1,y_1)...h_m(k_m,y_m). \quad (23)$$

Основным итогом работы является разработка нового приближенно-аналитического метода решения задачи анализа многомерных стохастических непрерывно-дискретных систем на основе спектральной формы математического описания, это выражается в следующих результатах: разработаны два алгоритма решения поставленной задачи спектральным методом, первый алгоритм основан на применении классического уравнения ФПК, а второй – обобщенного уравнения ФПК, позволяющего учесть факт смены структур динамической системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Казаков И.Е., Статистическая динамика систем с переменной структурой, М.: Наука, 1977.
2. Соколов Н.П., Введение в теорию многомерных матриц, М.: Наука, 1972.

3. Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д., Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы, М.: Машиностроение, 1979.
4. Сотскова И.Л., Применение аппарата обобщенной характеристической функции к анализу стохастических систем управления ЛА, Сб. “Задачи стохастического управления”, М.: Изд-во МАИ, 1986, с. 71-78.
5. Тихонов В.И., Миронов М.А., Марковские процессы, М.: Советское радио, 1977.