МОДИФИЦИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ СПЕЦИАЛЬНОГО ВЕТВЯЩЕГОСЯ ПРОЦЕССА

К.А. Рыбаков, канд. физ.-мат. наук, доцент
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»
Москва, Российская Федерация
E-mail: rkoffice@mail.ru

Предлагается новый подход к решению задачи оптимальной нелинейной фильтрации методом статистических испытаний. В его основе лежит переход от задачи фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий с помощью интерпретации одного из слагаемых в уравнении Дункана–Мортенсена–Закаи (уравнении оптимальной нелинейной фильтрации, которому удовлетворяет ненормированная апостериорная плотность вероятности вектора состояния для объекта наблюдения) как функции поглощения и восстановления реализаций некоторого вспомогательного случайного процесса. Решение такой задачи анализа можно найти приближенно, используя методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков. В работе приведен алгоритм совместного моделирования системы наблюдения и приближенного оценивания, основанный на применении метода «максимального сечения». Преимущества разработанного алгоритма состоят в простоте реализации и универсальности, а именно возможности решения задачи оптимальной фильтрации для линейных и нелинейных моделей объекта наблюдения и измерительной системы, для одномерного и многомерного случаев.

Ключевые слова: апостериорная плотность вероятности, ветвящиеся процессы, метод статистических испытаний, оптимальная фильтрация, стохастическая система, уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи.

MODIFIED ALGORITHM FOR OPTIMAL SIGNAL FILTERING BASED ON MODELING SPECIAL BRANCHING PROCESS

K.A. Rybakov, Cand. of Phys.-Math. Sciences, Associate professor
Moscow Aviation Institute (National Research University)
Moscow, Russian Federation
E-mail: rkoffice@mail.ru

New approach for solving the optimal nonlinear filtering problem by statistical modeling is described. It is based on the reducing the filtration problem to the analysis of stochastic systems with terminating and branching paths by the interpretation of the term in Duncan–Mortensen–Zakai equation (nonlinear filtering equation for unnormalized conditional density of the state vector for the observation object) as an absorption and recovery function of sample paths for some auxiliary random process. The solution of *analysis problem can be found approximately by using numerical methods for solving stochastic differential equations and methods for modeling inhomogeneous Poisson flows. The modeling algorithm for observation system and optimal estimation of its state based on the maximal section method is given in the paper. The main advantages of this algorithm are easy implementation and universality, namely the possibility of solving the optimal filtering problem for linear and non-linear models of the observation system, for one-dimensional and multidimensional case.*

Key words: branching processes, conditional density, Duncan–Mortensen–Zakai equation, Monte Carlo method, optimal filtering problem, stochastic system.

Введение

Теория оптимальной фильтрации имеет много приложений в самых разных областях, одна из важнейших областей – управление подвижными объектами (надводными и подводными судами, наземными средствами передвижения, летательными аппаратами) и обработка информации, получаемой с автономных, спутниковых и гибридных навигационных систем [1…4]. Разработка новых методов и алгоритмов оптимальной фильтрации не теряет своей актуальности, что связано с развитием глобальных (GPS, ГЛОНАСС, Galileo, COMPASS) и региональных (BeiDou, IRNSS, QZSS) навигационных спутниковых систем, систем повышения точности позиционирования (WAAS, СДКМ, EGNOS) [5]. Задача оптимальной фильтрации состоит в оценивании вектора состояния объекта наблюдения (параметров движения, координат на местности и т.п.) по результатам измерений со случайными ошибками в соответствии с заданным критерием оптимальности.

Предлагается решать задачу оптимальной фильтрации с помощью моделирования траекторий специального ветвящегося процесса. Каждая из ветвей, рассматриваемая отдельно, представляет собой часть траектории процесса, описываемого тем же уравнением, что и объект наблюдения, результат измерений оцениваемого вектора состояния влияет на распределение моментов времени обрывов и появления новых ветвей.

В работе [6] описан разработанный автором алгоритм совместного моделирования системы наблюдения и приближенного оценивания ее вектора состояния по результатам измерений на основе стохастического метода Эйлера [7] и метода «максимального сечения» [8]. Апробация проводилась на решении модельных задач. В этой работе представлен модифицированный алгоритм, не имеющий жестких ограничений на выбор шага численного интегрирования, но более сложный для реализации.

Постановка задачи

Будем рассматривать модель объекта наблюдения, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито [7]

$$\begin{aligned} &d\mathbf{X}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{X}(t))dt + \boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{X}(t))d\mathbf{W}(t), \\ &\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{X} \in R^n$ – вектор состояния; $t \in T = [t_0, t_1]$ – отрезок времени функционирования; $\mathbf{W}(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $\mathbf{X}_0$; $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$: $T \times R^n \to R^n$, $\boldsymbol{\sigma}(t, \mathbf{x})$: $T \times R^n \to R^{n\times s}$ – заданные функции. Начальное состояние $\mathbf{X}_0$ определяется заданной плотностью вероятности $\varphi_0(\mathbf{x})$.

Модель измерительной системы записывается в форме

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{c}(t, \mathbf{X}(t)) + \boldsymbol{\zeta}(t)\mathbf{N}(t),$$

где $\mathbf{Z} \in R^m$ – вектор измерений; $\mathbf{N}(t)$ – d-мерный стандартный гауссовский белый шум; $\mathbf{c}(t, \mathbf{x})$: $T \times R^n \to R^m$, $\boldsymbol{\zeta}(t)$: $T \to R^{m\times d}$ – заданные функции.

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки $\hat{\mathbf{X}}(t)$ по результатам измерений $Z_0^t = \{\mathbf{Z}(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$. При использовании критерия минимума среднеквадратической ошибки оценивания имеем:

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \mathrm{M}\left[\mathbf{X}(t) \mid Z_0^t\right] = \int_{\mathrm{R}^n} \mathbf{x} p(t, \mathbf{x} \mid Z_0^t) d\mathbf{x},$$

где $p(t, \mathbf{x} \mid Z_0^t)$ – апостериорная плотность вероятности вектора состояния $\mathbf{X}$, удовлетворяющая уравнению Стратоновича–Кушнера

[7]. Уравнение Стратоновича–Кушнера – это нелинейное стохастическое интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, найти его аналитическое решение в общем случае не представляется возможным, более простым является уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи [7] – линейное стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных, оно описывает динамику ненормированной апостериорной плотности вероятности $\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)$ вектора состояния $\mathbf{X}$:

$$p(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)=\frac{\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)}{\int_{\mathrm{R}^n}\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)d\mathbf{x}}. \tag{2}$$

Уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи в форме Стратоновича имеет вид

$$\frac{d_{1/2}\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)}{dt}=A\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)+F_{\mathbf{Z}(t)}\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t),$$

$$\varphi(t_0,\mathbf{x})=\varphi_0(\mathbf{x}),$$

где

$$A\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[f_i(t,\mathbf{x})\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)\Big]+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Big[g_{ij}(t,\mathbf{x})\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)\Big],$$

$$F_{\mathbf{Z}(t)}\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}c_k(t,\mathbf{x})q_{kr}(t)\times$$

$$\times\left(Z_r(t)-\frac{c_r(t,\mathbf{x})}{2}\right)\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)=$$

$$=\lambda(t,\mathbf{x},\mathbf{Z}(t))\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t),$$

$$\mathbf{g}(t,\mathbf{x})=\boldsymbol{\sigma}(t,\mathbf{x})\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}(t,\mathbf{x}),\quad \mathbf{q}(t)=\left(\boldsymbol{\zeta}(t)\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\right)^{-1}.$$

Далее будем представлять его следующим образом:

$$\frac{d_{1/2}\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)}{dt}=A\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)-$$

$$-\lambda^-(t,\mathbf{x},\mathbf{Z}(t))\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)+ \tag{3}$$

$$+\lambda^+(t,\mathbf{x},\mathbf{Z}(t))\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t),$$

где

$$\lambda^-(t,\mathbf{x},\mathbf{z})=\begin{cases}-\lambda(t,\mathbf{x},\mathbf{z}), & \lambda(t,\mathbf{x},\mathbf{z})<0,\\ 0, & \lambda(t,\mathbf{x},\mathbf{z})\ge 0,\end{cases}$$

$$\lambda^+(t,\mathbf{x},\mathbf{z})=\begin{cases}\lambda(t,\mathbf{x},\mathbf{z}), & \lambda(t,\mathbf{x},\mathbf{z})>0,\\ 0, & \lambda(t,\mathbf{x},\mathbf{z})\le 0.\end{cases}$$

Сведение к задаче анализа стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий

При фиксированных измерениях Z_0^t стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных (3) можно рассматривать как детерминированное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)}{\partial t}=A\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)-$$

$$-\lambda^-(t,\mathbf{x},\mathbf{Z}(t))\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)+$$

$$+\lambda^+(t,\mathbf{x},\mathbf{Z}(t))\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t).$$

Оно по структуре соответствует обобщенному уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова или уравнению Колмогорова–Феллера [9, 10]. Тогда функции $\lambda^-(t)=\lambda^-(t,\mathbf{X}(t),\mathbf{Z}(t))$ и $\lambda^+(t)=\lambda^+(t,\mathbf{X}(t),\mathbf{Z}(t))$ можно интерпретировать как интенсивности обрывов и ветвлений траекторий процесса $\mathbf{X}(t)$ соответственно. Следовательно, функции $p(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)$ и $\varphi(t,\mathbf{x}\,|\,Z_0^t)$, связанные соотношением (2), характеризуют распределение вектора $\mathbf{X}$ – состояния объекта наблюдения, описываемого уравнением (1), – с учетом того, что часть траекторий случайного процесса $\mathbf{X}(t)$ обрывается, а часть – разветвляется в случайные моменты времени. Обрывы и ветвления траекторий образуют неоднородные пуассоновские потоки событий, при ветвлении в фиксированный момент времени может появиться только одна новая ветвь, при обрыве прекращается моделирование только одной ветви. Для удобства моделирования каждая из новых ветвей рассматривается как самостоятельная траектория.

При приближенном определении оптимальной оценки $\hat{\mathbf{X}}(t)$ предлагается использовать метод статистических испытаний: моделирование вспомогательных траекторий случайного процесса $\mathbf{X}(t)$ с учетом обрывов и ветвлений при фиксированных измерениях Z_0^t с последующим усреднением. При этом можно применять различные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков. Далее приведен алгоритм совместного моделирования системы наблюдения и приближенного оценивания на основе численного метода решения стохастических дифференциальных уравнений [7] и метода «максимального сечения» [8].

Шаг 1. Задать M – число моделируемых вспомогательных траекторий; h – шаг численного интегрирования; величину λ^*: $|\lambda(t,\mathbf{X}(t),\mathbf{Z}(t))|\leq\lambda^*$. Получить реализации начальных состояний $\mathbf{X}_0$ и $\mathbf{X}_0^i$ согласно заданной плотности вероятности $\varphi_0(\mathbf{x})$, где $\mathbf{X}_0$ – начальное состояние для основной траектории, для которой проводятся измерение и оценивание, $\mathbf{X}_0^i$ – для вспомогательных траекторий, по которым приближенно вычисляется оптимальная оценка, и моменты времени ξ^i, через которые могут произойти обрывы или ветвления траекторий:

$$\xi^i=-\frac{\ln\beta}{\lambda^*},\quad i=1,2,\ldots,M.$$

Здесь и далее β – различные реализации (для всех i) случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале (0, 1).

Положить k=0, $t_*^i=t_0$, F^i=1 (в случае обрыва траектории с номером i при последующем моделировании F^i=0), i=1, 2, …, M.

Шаг 2. Положить

$$M_k=\sum_{i=1}^{M}F^i$$

и найти оптимальную оценку $\hat{\mathbf{X}}_k$ как выборочное среднее реализаций $\mathrm{X}_k=\{\mathbf{X}_k^i\}_{i=1,\ldots,M\,;\,F^i=1}$:

$$\hat{\mathbf{X}}_k=\frac{1}{M_k}\sum_{i=1,\ldots,M\,;\,F^i=1}\mathbf{X}_k^i.$$

Проверить условия:

а) если 0<T–t_k<h, то скорректировать шаг численного интегрирования: h=T–t_k;

б) если T–t_k=0, то завершить процесс.

Получить реализацию оцениваемого вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k=t_0+kh\}$:

$$\mathbf{X}_{k+1}=\mathbf{F}(t_k,\mathbf{X}_k,\Delta\mathbf{W},h),$$

и получить вектор измерений:

$$\mathbf{Z}_k=\mathbf{G}(t_k,\mathbf{X}_k,\Delta\mathbf{V},h).$$

В этих формулах и далее $\mathbf{F}(t_k,\mathbf{X}_k,\Delta\mathbf{W},h)$ – функция, ставящая в соответствие реализации вектора состояния $\mathbf{X}_k$ в узле t_k новую реализацию в узле t_k+h, $\mathbf{G}(t_k,\mathbf{X}_k,\Delta\mathbf{V})$ – функция, ставящая в соответствие реализации вектора состояния $\mathbf{X}_k$ вектор измерений с учетом величины шага h, $\Delta\mathbf{W}$ и $\Delta\mathbf{V}$ – различные для всех k и i (а также для промежуточных расчетов) реализации случайных векторов размеров $s\times1$ и $d\times1$ соответственно, координаты которых имеют стандартное нормальное распределение.

Например,

$$\mathbf{F}(t_k,\mathbf{X}_k,\Delta\mathbf{W},h)=\mathbf{X}_k+h\mathbf{f}(t_k,\mathbf{X}_k)+$$
$$+\sqrt{h}\boldsymbol{\sigma}(t_k,\mathbf{X}_k)\Delta\mathbf{W},$$

$$\mathbf{G}(t_k,\mathbf{X}_k,\Delta\mathbf{V},h)=\mathbf{c}(t_k,\mathbf{X}_k)+\frac{\zeta(t_k)}{\sqrt{h}}\Delta\mathbf{V}$$

для стохастического метода Эйлера [7].

Положить i=1, j=0 (j – количество новых ветвей на шаге k).

Шаг 3. Проверить условие F^i=0. Если оно выполнено, то перейти к шагу 10, иначе: при $t_*^i+\xi^i\geq t_k+h$ перейти к шагу 4, а при $t_*^i+\xi^i<t_k+h$ – к шагу 5.

Шаг 4. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$\mathbf{X}_{k+1}^i=\mathbf{F}(t_k,\mathbf{X}_k^i,\Delta\mathbf{W},h).$$

Перейти к шагу 8.

Шаг 5. Проверить условие $t_*^i+\xi^i\geq t_k+h$. Если оно выполнено, то перейти к шагу 9, иначе: положить $\tilde{\mathbf{X}}^i=\mathbf{X}_k^i$, $\tau^i=t_k$ и перейти к шагу 6.

Шаг 6. Получить реализацию вектора состояния в дополнительном узле сетки:

$$\tilde{\mathbf{X}}^i=\mathbf{F}(\tau^i,\tilde{\mathbf{X}}^i,\Delta\mathbf{W},h^i),\quad h^i=t_*^i+\xi^i-\tau^i.$$

Положить $\tau^i=\tau^i+h^i$ и получить реализацию α случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале (0, 1). Проверить условие

$$\alpha\leq\frac{|\lambda(\tau^i)|}{\lambda^*},$$

где $\lambda(\tau^i)=\lambda(\tau^i,\tilde{\mathbf{X}}^i,\mathbf{Z}_k)$, и если оно выполнено, то перейти к шагу 7, иначе – к шагу 8.

Шаг 7. Проверить условия:

а) если $\lambda(\tau^i) < 0$ $(\lambda^-(\tau^i, \tilde{\mathbf{X}}^i, \mathbf{Z}_k) > 0$, обрыв траектории), то положить F^i=0 (траектория далее не моделируется) и перейти к шагу 10;

б) если $\lambda(\tau^i) > 0$ $(\lambda^+(\tau^i, \tilde{\mathbf{X}}^i, \mathbf{Z}_k) > 0$, ветвление траектории), то положить j=j+1, F^{M+j}=1, $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$, $\tilde{\mathbf{X}}^{M+j} = \tilde{\mathbf{X}}^i$, $\tau^{M+j} = \tau^i$ и получить реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или новое ветвление:

$$\xi^{M+j} = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*}.$$

Шаг 8. Положить $t_*^i = t_*^i + \xi^i$ и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или ветвление рассматриваемой траектории:

$$\xi^i = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*}.$$

Перейти к шагу 5.

Шаг 9. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки $\{t_k\}$:

$$\mathbf{X}_{k+1}^i = \mathbf{F}(\tau^i, \tilde{\mathbf{X}}^i, \Delta\mathbf{W}, h^i), \quad h^i = t_k + h - \tau^i.$$

Положить F^i=1.

Шаг 10. Проверить условия:

а) если i=M+j, то положить M=M+j, t_{k+1}=t_k+h, k=k+1 и перейти к шагу 2;

б) если i<M, то положить i=i+1 и перейти к шагу 3;

в) если M≤i≤M+j (новые ветви), то положить $i = i + 1$ и перейти к шагу 5.

Замечания.

1. Величину λ^* можно оценить, например, по результатам пробного моделирования траекторий системы наблюдения.

2. На шаге 2 можно получить ковариационную матрицу ошибки оценивания для момента времени t_k:

$$\mathbf{\Gamma}_k = \frac{1}{M_k - 1} \sum_{i=1,\dots,M;\, F^i=1} (\mathbf{X}_k^i - \hat{\mathbf{X}}_k)(\mathbf{X}_k^i - \hat{\mathbf{X}}_k)^{\mathrm{T}}.$$

На этом же шаге по выборке X_k можно найти оценку апостериорной плотности вероятности $p(t_k, \mathbf{x} \,|\, Z_0^{t_k})$. Это дает возможность использовать другие критерии при нахождении оценки вектора состояния, а не только критерий минимума среднеквадратической ошибки, или вычислять оптимальную оценку $\hat{\mathbf{X}}_k$ следующим образом:

$$\hat{\mathbf{X}}_k = \int_{\mathrm{R}^n} \mathbf{x} p(t_k, \mathbf{x} \,|\, Z_0^{t_k}) d\mathbf{x}.$$

3. Для повышения точности расчетов могут применяться различные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений. Однако точность оценивания определяется не только выбранным методом численного решения стохастических дифференциальных уравнений, но и методом моделирования неоднородных пуассоновских потоков, а также свойствами используемых генераторов псевдослучайных чисел.

Преимущества предлагаемой методики оптимального оценивания:

а) получение оценки в темпе с поступлением измерений;

б) простота реализации, так как можно применять известные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков, вычислительная сложность алгоритма напрямую зависит от вычислительной сложности применяемых численных методов и генераторов псевдослучайных чисел;

в) универсальность, а именно возможность решения задачи оптимальной фильтрации для линейных и нелинейных моделей объекта наблюдения и измерительной системы, для одномерного и многомерного случаев.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Современные информационные технологии в задачах навигации и наведения беспилотных маневренных летательных аппаратов* / Под ред. М.Н. Красильщикова, Г.Г. Себрякова. М.: Физматлит, 2009.
2. Соловьев Ю.А. Комплексная обработка информации в навигационных системах (обзор методов) // *Радиотехника*. 2010. № 10. С. 4…8.
3. Grewal M.S., Weill L.R., Andrews A.P. Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration. John Wiley & Sons, 2007.
4. Pany T. Navigation Signal Processing for GNSS Software Receivers. Artech House, 2010.
5. Global Positioning System [Электронный ресурс]. – http://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System (20.01.2013).
6. Рыбаков К.А. Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с

обрывами и ветвлениями траекторий // *Дифференциальные уравнения и процессы управления*. – 2012. № 3. С. 91…110. – http://www.math.spbu.ru/diffjournal (30.09.12).
7. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. *Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез*. М.: Вузовская книга, 2008.
8. Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // *Доклады АН*. 2009. Т. 428. № 2. С. 163…165.
9. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. *Анализ систем случайной структуры*. М.: Физматлит, 1993.
10. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. *Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления*. М.: Вузовская книга, 2006.

REFERENCES

1. *Sovremennye informatsionnye tekhnologii v zadachakh navigatsii i navedeniya bespilotnykh manevrennykh letatelnykh apparatov* [Modern Information Technologies in Problems of Navigation and Guidance for Unmanned Maneuver Aerial Vehicles]. Ed. by M.N. Krasilshchikov, G.G. Sebryakov]. M.: Fizmatlit [Moscow: Fizmatlit Publishing Company, Nauka Publishers], 2009.
2. Solov’ev Yu.A. Kompleksnaya obrabotka informatsii v navigatsionnykh sistemakh (obzor metodov) [Complex Information Processing in Navigation Systems (Survey of Methods)]. *Radiotekhnika* [Radio Engineering]. 2010. № 10. Pp. 4…8.
3. Grewal M.S., Weill L.R., Andrews A.P. Global Positioning Systems, Inertial Navigation, and Integration. John Wiley & Sons, 2007.
4. Pany T. Navigation Signal Processing for GNSS Software Receivers. Artech House, 2010.
5. Global Positioning System. URL: http://en.wikipedia.org/wiki/Global_Positioning_System
6. Rybakov K.A. Svedenie zadachi nelineynoy filtratsii k zadache analiza stokhasticheskikh sistem s obryvami i vetvleniyami traektoriy [Reducing the Nonlinear Filtering Problem to the Analysis of Stochastic Systems with Terminating and Branching Paths]. *Differentsialnye uravneniya i protsessy upravleniya* [Differential Equations and Control Processes]. 2012. № 3. Pp. 91…110. http://www.math.spbu.ru/diffjournal.
7. Panteleev A.V., Rudenko Ye.A., Bortakovskiy A.S. *Nelineynye sistemy upravleniya: opisanie, analiz i sintez* [Nonlinear Control Systems: Description, Analysis, and Synthesis]. M.: Vuzovskaya kniga [Moscow: University Book], 2008.
8. Mikhaylov G.A., Averina T.A. The Maximal Section Algorithm in the Monte Carlo Method. Doklady Mathematics. 2009. Vol. 80. № 2. Pp. 671…673.
9. Kazakov I.Ye., Artem’ev V.M., Bukhalev V.A. *Analiz sistem sluchaynoy struktury* [Analysis of Systems with Random Structure]. M.: Fizmatlit [Moscow: Fizmatlit Publishing Company, Nauka Publishers], 1993.
10. Panteleev A.V., Rybakov K.A., Sotskova I.L. *Spektralnyy metod analiza nelineynykh stokhasticheskikh sistem upravleniya* [Spectral Method of Nonlinear Stochastic Control System Analysis]. M.: Vuzovskaya kniga [Moscow: University Book], 2006.

Сведения об авторах

Рыбаков Константин Александрович*, канд. физ.-мат. наук, доцент*
E-mail: rkoffice@mail.ru
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»
125993, Москва, Российская Федерация, Волоколамское ш., 4

Information about authors

Rybakov Konstantin Alexandrovich*, Cand. of Phys.-Math. Sciences, Associate professor*
E-mail: rkoffice@mail.ru
Moscow Aviation Institute (National Research University)
125993, Moscow, Russian Federation, Volokolamskoe, 4