О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДУНКАНА – МОРТЕНСЕНА – ЗАКАИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ДИФФУЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

К.А. Рыбаков[1]

[1] *Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва*

УДК 519.217.4 + 519.633.2

В статье рассматривается решение задачи оптимальной фильтрации сигналов в нестационарных стохастических дифференциальных системах с пуассоновской составляющей. Для приближенного нахождения апостериорной плотности вероятности вектора состояния объекта наблюдения применяется спектральный метод, в основе метода лежит представление решения робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи в виде ряда по функциям полной ортонормированной системы.

Ключевые слова: апостериорная плотность вероятности, оптимальная фильтрация, стохастическая система, спектральный метод, уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи.

1 Введение

В продолжение исследований, начатых в [6, 8, 9], рассматривается задача оптимальной фильтрации сигналов в стохастических дифференциальных системах диффузионно-скачкообразного типа. В этой задаче требуется оценить вектор состояния динамической системы (объекта наблюдения) по результатам измерений с учетом помех. Предполагается, что объект наблюдения описывается стохастическим дифференциальным уравнением с пуассоновской составляющей, а измерительная система — стохастическим дифференциальным уравнением без пуассоновской составляющей.

Для вспомогательной ненормированной плотности вероятности, по которой можно найти распределение вектора состояния объекта наблюдения с учетом измерений, в статье представлено робастное уравнение Дункана - -Мортенсена – Закаи и предложен метод его решения на основе спектральной формы математического описания [1, 2, 3, 12], т.е. спектральный метод. Такой подход более универсален по сравнению с другими подходами, использующими математический аппарат ортогональных рядов для представления плотностей вероятности [5, 11, 14, 15]. В задачах анализа, синтеза, идентификации и фильтрации в стохастических дифференциальных системах его универсальность и удобство реализации алгоритмов расчета обусловлены тем, что ортонормированный базис не фиксируется и все соотношения записываются в матричной форме, вид этих соотношений не зависит от базиса.

В работе [9] спектральный метод применялся для решения задачи оптимальной фильтрации в случае, когда коэффициенты уравнений объекта наблюдения и измерительной системы не зависят от времени, т.е. рассматривались стационарные системы, здесь этот подход применяется для более общей задачи — оптимальной фильтрации сигналов для нестационарных систем.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-08-00323-а).

2 Постановка задачи

Пусть модель системы наблюдения описывается стохастическими дифференциальными уравнениями Ито [5]:

$$\begin{gathered} dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t) + dQ(t) \quad \text{(объект наблюдения)}, \quad X(t_0) = X_0, \\ dY(t) = c\big(t, X(t)\big)dt + \zeta(t)dV(t) \quad \text{(измерительная система)}, \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния объекта наблюдения, $Y \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений; $t \in T = [t_0, t_1]$ — отрезок времени функционирования системы; $f(t,x)$ — вектор-функция $n \times 1$, $\sigma(t,x)$ — матричная функция $n \times s$, $c(t,x)$ — вектор-функция $m \times 1$, $\zeta(t)$ — матричная функция $m \times d$; $W(t)$ и $V(t)$ — s-мерный и d-мерный стандартные винеровские процессы. Процессы $W(t)$, $V(t)$ и начальное состояние X_0, заданное плотностью вероятности $\varphi_0(x)$, независимы.

Через $Q(t)$ обозначен общий пуассоновский процесс, т.е.

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k,$$

где $P(t)$ — пуассоновский процесс с параметром λ, считающий число разрывов для случайного процесса $X(t)$ к моменту времени t, Δ_k — независимые случайные величины из $\mathbb{R}^n$, распределение которых задано плотностью вероятности $\eta(t,\Delta)$. Следовательно, $Q(t)$ — случайный процесс с кусочно-постоянными траекториями, траектории случайного процесса $X(t)$ имеют разрывы в те же моменты времени, что и соответствующие траектории $Q(t)$. Время между двумя последовательными разрывами траекторий $X(t)$ и $Q(t)$ — случайная величина, имеющая показательное распределение с параметром λ, задающим интенсивность появления разрывов траекторий:

$$X(\tau_k) = X(\tau_k - 0) + \Delta_k, \quad \Delta_k \sim \eta(\tau_k, \Delta); \quad \tau_k - \tau_{k-1} \sim E(\lambda), \quad \tau_0 = t_0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

В более сложном случае интенсивность появления разрывов траекторий зависит от времени и текущего вектора состояния объекта наблюдения: $\lambda = \lambda(t,x)$. Если величина приращения Δ также зависит от вектора состояния объекта наблюдения, то используется условная плотность вероятности $\eta(t, x \,|\, \xi)$, характеризующая распределение $X(\tau_k)$ при условии $X(\tau_k - 0) = \xi$. В частном случае $\eta(t, x \,|\, \xi) = \eta(t, x - \xi) = \eta(t, \Delta)$, $\Delta = x - \xi$.

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t)$ по результатам измерений $Y_0^t = \{Y(\tau),\ \tau \in [t_0, t)\}$, т.е. $\hat{X}(t) = \psi(t, Y_0^t)$, где $\psi(t, Y_0^t)$ — функция, обеспечивающая в каждый момент времени t выполнение следующих условий [1, 4, 5, 11]:

$$\mathrm{M}\big[X(t) - \hat{X}(t)\big] = 0, \quad \mathrm{M}\big[\big(X(t) - \hat{X}(t)\big)^{\mathrm{T}}\big(X(t) - \hat{X}(t)\big)\big] \to \min_{\psi(t,\cdot)},$$

где M — знак математического ожидания (условие несмещенности оценки и условие минимума среднеквадратической ошибки оценивания).

Решение этой задачи определяется соотношением

$$\psi(t, Y_0^t) = \mathrm{M}\big[X(t) \,|\, Y_0^t\big] = \int_{\mathbb{R}^n} x p(t, x \,|\, Y_0^t) dx,$$

в котором $p(t, x \,|\, Y_0^t)$ — апостериорная плотность вероятности вектора состояния объекта наблюдения.

3 Соотношения для апостериорной плотности вероятности

Как известно [4, 11], уравнение Стратоновича–Кушнера непосредственно описывает эволюцию апостериорной плотности вероятности $p(t, x \,|\, Y_0^t)$, но его решение затруднительно из-за того, что оно нелинейное. Более предпочтительным оказывается уравнение Дункана - -Мортенсена – Закаи [4, 11]. Оно линейно относительно ненормированной апостериорной плотности вероятности $\varphi(t, x \,|\, Y_0^t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t, x \,|\, Y_0^t)}{dt} &= \mathcal{L}\varphi(t, x \,|\, Y_0^t) - \lambda(t,x)\varphi(t, x \,|\, Y_0^t) + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \lambda(t,\xi)\eta(t, x \,|\, \xi)\varphi(t, \xi \,|\, Y_0^t) d\xi + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} c_\alpha(t,x) q_{\alpha\beta}(t) \frac{dY_\beta(t)}{dt}\varphi(t, x \,|\, Y_0^t), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) = \mathcal{A}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} c_\alpha(t,x)q_{\alpha\beta}(t)c_\beta(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t), \quad q^{-1}(t) = \zeta(t)\zeta^{\mathrm{T}}(t),$$

$$\mathcal{A}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\big[f_i(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)\big] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\big[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)\big], \quad g(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^{\mathrm{T}}(t,x).$$

Уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи — стохастическое интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, его можно записывать в разных формах (приведенное уравнение записано в форме Стратоновича). Как и уравнение Стратоновича–Кушнера, оно содержит процесс типа белого шума в последних слагаемых или траекторию белого шума при фиксированных измерениях, что вносит дополнительные сложности в применении приближенных методов решения интегро-дифференциальных уравнений, например, спектральных методов, основанных на ортогональных разложениях плотности вероятности.

Введем обозначение: $h(t,x) = q(t)c(t,x)$ — вектор-функция $m\times 1$. Тогда уравнение (2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{d\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)}{dt} = \mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) - \lambda(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) + \int_{\mathbb{R}^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\varphi(t,\xi\,|\,Y_0^t)d\xi +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{m} h_\alpha(t,x)\frac{dY_\alpha(t)}{dt}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t), \quad \mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) = \mathcal{A}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m} h_\alpha(t,x)c_\alpha(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t),$$

и с помощью замены

$$\rho(t,x\,|\,Y_0^t) = \exp\biggl\{-\sum_{\alpha=1}^{m} h_\alpha(t,x)Y_\alpha(t)\biggr\}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) \tag{3}$$

перейти к робастному уравнению Дункана – Мортенсена – Закаи [10, 13, 16] для ненормированной апостериорной плотности $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$, вообще говоря, характеризующей распределение вектора состояния другой стохастической системы, отличной от (1):

$$\frac{\partial\rho(t,x\,|\,Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{L}\rho(t,x\,|\,Y_0^t) - \lambda(t,x)\rho(t,x\,|\,Y_0^t) +$$
$$+\int_{\mathbb{R}^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\exp\biggl\{\sum_{\alpha=1}^{m}\big(h_\alpha(t,\xi) - h_\alpha(t,x)\big)Y_\alpha(t)\biggr\}\rho(t,\xi\,|\,Y_0^t)d\xi -$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{m} Y_\alpha(t)\mathcal{L}_\alpha\rho(t,x\,|\,Y_0^t) + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} Y_\alpha(t)Y_\beta(t)\mathcal{L}_{\alpha\beta}\rho(t,x\,|\,Y_0^t) - \sum_{\alpha=1}^{m} Y_\alpha(t)\frac{\partial h_\alpha(t,x)}{\partial t}\rho(t,x\,|\,Y_0^t). \tag{4}$$

В уравнении (4) $\mathcal{L}_\alpha = [\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{L}]$, $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{L}_\beta] = \frac{1}{2}[\mathcal{H}_\alpha,[\mathcal{H}_\beta,\mathcal{L}]]$, а $[\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{L}]$ и $[\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{L}_\beta]$ — коммутаторы, $\mathcal{H}_\alpha$ — оператор умножения на функцию $h_\alpha(t,x)$, $\alpha,\beta = 1,2,\ldots,m$. Начальное условие для этого уравнения $\rho(t_0,x) = \varphi_0(x)$, что следует из формулы замены ненормированной апостериорной плотности вероятности (3) при $t = t_0$ с учетом начального условия $Y(t_0) = 0$.

Принимая во внимание, что два оператора умножения на скалярные функции являются коммутирующими, получаем $\mathcal{L}_\alpha = [\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{A}] = \mathcal{H}_\alpha\circ\mathcal{A} - \mathcal{A}\circ\mathcal{H}_\alpha$, где $\mathcal{H}_\alpha\circ\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\circ\mathcal{H}_\alpha$ — композиции линейных операторов, следовательно, $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\mathcal{H}_\alpha,[\mathcal{H}_\beta,\mathcal{A}]]$.

Робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи не содержит процессов типа белого шума или их траекторий, т.е. оно не относится к классу стохастических дифференциальных уравнений, оно удобнее для приближенного решения с помощью различных методов, в том числе и спектрального [6, 8, 9].

Переход от функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$ к апостериорной плотности вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^t)$ вектора состояния объекта наблюдения осуществляется в два этапа: обратная замена и нормировка, т.е.

$$\varphi(t,x\,|\,Y_0^t) = \exp\biggl\{\sum_{\alpha=1}^{m} h_\alpha(t,x)Y_\alpha(t)\biggr\}\rho(t,x\,|\,Y_0^t), \quad p(t,x\,|\,Y_0^t) = \frac{\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)}{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)dx}. \tag{5}$$

Отметим, что во многих публикациях авторы ограничиваются рассмотрением только стационарной модели измерительной системы: $c(t,x) = c(x)$ и $\zeta(t) = \zeta$. Кроме того, для удобства матрица ζ полагается равной единичной матрице, т.е. $h(t,x) = h(x) = c(x)$. При такой постановке задачи робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи проще, оно не содержит последнего слагаемого с производными координат функции $h(t,x)$ по времени [6, 9, 10, 13]. Стационарность модели объекта наблюдения, т.е. $f(t,x)=f(x)$ и $\sigma(t,x)=\sigma(x)$, робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи не упрощает. Нестационарный случай рассмотрен в [8, 16], но только для стохастических дифференциальных систем диффузионного типа.

4 Спектральный метод решения робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи

В [8] спектральный метод был применен к решению робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи, соответствующего нестационарной системе наблюдения диффузионного типа, т.е. без пуассоновской составляющей в уравнении объекта наблюдения, а в [9] — для стационарной системы наблюдения диффузионно-скачкообразного типа. Объединяя эти результаты, применим спектральный метод для решения задачи фильтрации в классе нестационарных систем наблюдения диффузионно-скачкообразного типа.

Определения и основные свойства спектральных характеристик функций и линейных операторов, используемые далее, изложены в [2, 3]. Там же приведены многочисленные примеры применения спектрального метода в задачах анализа и синтеза непрерывных стохастических систем.

Далее определим базисные системы и получим спектральный аналог робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи в предположении, что отрезок времени T и измерения Y_0^t зафиксированы ($t=t_1$). Пусть $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис пространства $L_2(T\times\mathbb{R}^n)$, причем функции
$e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)$ порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисные системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространств $L_2(T)$ и $L_2(\mathbb{R}^n)$ соответственно, т.е.

$$e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)=q(i_0,t)\cdot p(i_1,\ldots,i_n,x),\quad i_0,i_1,\ldots,i_n=0,1,2,\ldots$$

Будем придерживаться обозначений из [2, 3, 8], а именно пусть $P(n+1,n+1)$ — спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент t_0; $A(n+1,n+1)$ — спектральная характеристика оператора $\mathcal{A}$, $C_\alpha(n+1,n+1)$ и $H_\alpha(n+1,n+1)$ — спектральные характеристики операторов $\mathcal{C}_\alpha$ и $\mathcal{H}_\alpha$ соответственно, где $\mathcal{C}_\alpha$ — оператор умножения на функцию $c_\alpha(t,x)$, $\alpha=1,2,\ldots,m$:

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}]=A(n+1,n+1),\quad \mathbb{S}[\mathcal{C}_\alpha]=C_\alpha(n+1,n+1),\quad \mathbb{S}[\mathcal{H}_\alpha]=H_\alpha(n+1,n+1).$$

Эти спектральные характеристики определены относительно базиса $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Тогда спектральные характеристики $L(n+1,n+1)$, $L_\alpha(n+1,n+1)$ и $L_{\alpha\beta}(n+1,n+1)$ операторов $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}_\alpha$ и $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ соответственно, $\alpha,\beta=1,2,\ldots,m$, определенные относительно того же базиса, выражаются через спектральные характеристики $A(n+1,n+1)$, $C_\alpha(n+1,n+1)$ и $H_\alpha(n+1,n+1)$:

$$\mathbb{S}[\mathcal{L}]=L(n+1,n+1)=A(n+1,n+1)-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}H_\alpha(n+1,n+1)\cdot C_\alpha(n+1,n+1),$$
$$\mathbb{S}[\mathcal{L}_\alpha]=L_\alpha(n+1,n+1)=\big[H_\alpha(n+1,n+1),A(n+1,n+1)\big],$$
$$\mathbb{S}[\mathcal{L}_{\alpha\beta}]=L_{\alpha\beta}(n+1,n+1)=\frac{1}{2}\big[H_\alpha(n+1,n+1),\big[H_\beta(n+1,n+1),A(n+1,n+1)\big]\big],$$

где $[H_\alpha(n+1,n+1),A(n+1,n+1)]$, как и в [6], будем называть коммутатором спектральных характеристик линейных операторов:

$$\big[H_\alpha(n+1,n+1),A(n+1,n+1)\big]=H_\alpha(n+1,n+1)\cdot A(n+1,n+1)-A(n+1,n+1)\cdot H_\alpha(n+1,n+1).$$

Напомним [2, 3], что спектральную характеристику $A(n+1,n+1)$ можно выразить с помощью спектральных характеристик операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам вектора состояния, а также операторов умножения на функции $f_i(t,x)$ и $g_{ij}(t,x)$, $i,j=1,2,\ldots,n$, однако для краткости изложения такое представление $A(n+1,n+1)$ здесь не приводится.

Далее, $\Lambda(n+1,n+1)$ — спектральная характеристика оператора умножения на интенсивность $\lambda(t,x)$ появления разрывов в траекториях объекта наблюдения, а $H(n+1,n+1)$ — спектральная характеристика интегрального оператора $\mathcal{H}$, задаваемого соотношением

$$\mathcal{H}\rho(t,x)=\int_{\mathbb{R}^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\exp\Big\{\sum_{\alpha=1}^{m}\big(h_\alpha(t,\xi)-h_\alpha(t,x)\big)Y_\alpha(t)\Big\}\rho(t,\xi)d\xi.$$

Для выражения спектральной характеристики оператора умножения на функцию

$$Y_\alpha(t)\frac{\partial h_\alpha(t,x)}{\partial t}$$

воспользуемся результатом из [8], тогда

$$\mathbb{S}\left[Y_\alpha(t)\frac{\partial h_\alpha(t,x)}{\partial t}\right] = Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot \dot{H}_\alpha(n+1,n+1),$$

где $Y_\alpha(n+1,n+1)$ — спектральная характеристика оператора умножения на функцию $Y_\alpha(t)$ (см. дополнительно [8]), $\dot{H}_\alpha(n+1,n+1)$ — спектральная характеристика оператора умножения на производную функции $h_\alpha(t,x)$ по времени, $\alpha = 1,2,\ldots,m$. Спектральные характеристики $\Lambda(n+1,n+1)$, $H(n+1,n+1)$, а также $Y_\alpha(n+1,n+1)$ и $\dot{H}_\alpha(n+1,n+1)$, как и обозначенные выше, определены относительно системы функций $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^\infty$.

Кроме того, пусть $q(1,0;t_0)$ — матрица-столбец значений функций системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^\infty$ при $t=t_0$:

$$q(1,0;t_0) = \left[\ q(0,t_0)\ \ q(1,t_0)\ \ q(2,t_0)\ \ \ldots\ \right]^{\mathrm{T}};$$

$\Phi_0(n,0)$ — спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно базиса $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^\infty$; $R(n+1,0)$ — спектральная характеристика функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$, определенная относительно базиса $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^\infty$.

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения (4). Учитывая линейность спектрального преобразования, получаем

$$\begin{gathered}
\mathbb{S}\left[\frac{\partial\rho(t,x\,|\,Y_0^t)}{\partial t}\bigg|_{\rho(t_0,x)=\varphi_0(x)}\right] = \mathbb{S}\big[\mathcal{L}\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\big] - \mathbb{S}\big[\lambda(t,x)\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\big] + \\
+\mathbb{S}\left[\int_{\mathbb{R}^n}\lambda(t,\xi)\eta(t,x\,|\,\xi)\exp\left\{\sum_{\alpha=1}^m\big(h_\alpha(t,\xi)-h_\alpha(t,x)\big)Y_\alpha(t)\right\}\rho(t,\xi\,|\,Y_0^t)d\xi\right] - \\
-\sum_{\alpha=1}^m\mathbb{S}\big[Y_\alpha(t)\mathcal{L}_\alpha\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\big] + \sum_{\alpha=1}^m\sum_{\beta=1}^m\mathbb{S}\big[Y_\alpha(t)Y_\beta(t)\mathcal{L}_{\alpha\beta}\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\big] - \sum_{\alpha=1}^m\mathbb{S}\left[Y_\alpha(t)\frac{\partial h_\alpha(t,x)}{\partial t}\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\right].
\end{gathered}$$

С учетом введенных обозначений запишем спектральный аналог робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи, т.е. уравнение относительно неизвестной спектральной характеристики $R(n+1,0)$:

$$\begin{gathered}
P(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0) - q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0) = L(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0) - \Lambda(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0) + \\
+H(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0) - \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot L_\alpha(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0) + \\
+\sum_{\alpha=1}^m\sum_{\beta=1}^m Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot Y_\beta(n+1,n+1)\cdot L_{\alpha\beta}(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0) - \\
-\sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot\dot{H}_\alpha(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0). \qquad (6)
\end{gathered}$$

Сгруппируем все слагаемые с множителем $R(n+1,0)$ в левой части равенства, а тензорное произведение $q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)$ перенесем в правую часть:

$$\begin{gathered}
\Bigg(P(n+1,n+1) - L(n+1,n+1) + \Lambda(n+1,n+1) - H(n+1,n+1) + \\
+\sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot L_\alpha(n+1,n+1) - \sum_{\alpha=1}^m\sum_{\beta=1}^m Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot Y_\beta(n+1,n+1)\cdot L_{\alpha\beta}(n+1,n+1) + \\
+\sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot\dot{H}_\alpha(n+1,n+1)\Bigg)\cdot R(n+1,0) = q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0).
\end{gathered}$$

Тогда решение робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи в спектральной форме математического описания имеет вид

$$R(n+1,0) = \Big(P(n+1,n+1) - L(n+1,n+1) + \Lambda(n+1,n+1) - H(n+1,n+1) + \\ + \sum_{\alpha=1}^{m} Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot L_\alpha(n+1,n+1) - \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot Y_\beta(n+1,n+1)\cdot L_{\alpha\beta}(n+1,n+1) + \\ + \sum_{\alpha=1}^{m} Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot \dot{H}_\alpha(n+1,n+1)\Big)^{-1}\cdot \big(q(1,0;t_0)\otimes \Phi_0(n,0)\big). \quad (7)$$

Следовательно,

$$\rho(t,x\,|\,Y_0^t) = \mathbb{S}^{-1}\big[R(n+1,0)\big] = \sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty} r_{i_0 i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \quad (t,x)\in T\times\mathbb{R}^n, \quad (8)$$

где $r_{i_0 i_1\ldots i_n}$ — элементы спектральной характеристики $R(n+1,0)$, т.е. коэффициенты разложения функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$ в ряд по функциям базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Найти точное значение всех коэффициентов разложения $r_{i_0 i_1\ldots i_n}$ вряд ли возможно, поэтому имеет смысл рассматривать приближенное решение в виде частичной суммы ряда (8). В этом случае индексы $i_0,i_1,\ldots,i_n$ должны принимать лишь конечное число значений, а все введенные ранее спектральные характеристики будут конечными матрицами:

$$\rho(t,x\,|\,Y_0^t) \approx \sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\ldots\sum_{i_n=0}^{L_n-1} r_{i_0 i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),$$

где натуральные числа $L_0,L_1,\ldots,L_n$ — это заданные порядки усечения спектральных характеристик.

Базисные системы для представления функций времени и вектора состояния могут формироваться различным образом из базисных функций одной переменной [2, 3, 7, 12], их выбор определяется конкретной задачей. После определения функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$, используя (5), можно получить апостериорную плотность вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^t)$ и найти оптимальную оценку $\hat{X}(t)$.

Используя спектральную форму математического описания, можно выразить спектральные характеристики функций $\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)$ и $p(t,x\,|\,Y_0^t)$, а также спектральную характеристику оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ через спектральную характеристику $R(n+1,0)$. Тем не менее, это вряд ли целесообразно из-за возможного снижения точности оценивания, вызванного усечением спектральных характеристик. По этой же причине не следует выражать спектральные характеристики операторов умножения на функции $h_\alpha(t,x)$ через спектральные характеристики операторов умножения на функции $c_\alpha(t,x)$ и $q_{\alpha\beta}(t)$, $\alpha,\beta=1,2,\ldots,m$.

В рассматриваемой задаче оптимальной фильтрации при выводе спектрального аналога робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи предполагалось, что отрезок времени функционирования зафиксирован вместе с измерениями Y_0^t, однако можно воспользоваться и базисными системами, заданными на нестационарном отрезке времени [12], что позволит решать задачу оценивания текущего состояния объекта наблюдения в темпе с поступлением измерений.

Список литературы

[1] Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. М.: Вузовская книга, 2008.

[2] Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.

[3] Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 2012.

[4] Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. М.: Советское радио, 1976.

[5] Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990.

[6] Рыбаков К.А. Решение робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи спектральным методом // Системи обробки інформації. 2013. Вип. 7 (114), с. 139–143.

[7] Рыбаков К.А. Многопараметрические базисные системы для представления функций в неограниченных областях // Научный вестник МГТУ ГА. 2013. № 195 (9), с. 45–50.

[8] Рыбаков К.А. О решении робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи для нестационарных систем // Информационные и телекоммуникационные технологии. 2014. № 22, с. 9–15.

[9] Рыбаков К.А. Решение робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи для систем диффузионно-скачкообразного типа на основе спектрального метода // Системи обробки інформації. 2014. Вип. 7 (123), с. 143–147.

[10] Рыбаков К.А. Фильтрация сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа на основе метода статистических испытаний // Научный вестник МГТУ ГА. 2015. № 220, с. 69–76.

[11] Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. М.: Логос, 2007.

[12] Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974.

[13] Hazewinkel M. Lectures on linear and nonlinear filtering // Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems (ed. by W.O. Schiehlen, W. Wedig). Springer-Verlag, 1988, p. 103–136.

[14] Lototsky S., Mikulevicius R., Rozovskii B.L. Nonlinear filtering revisited: A spectral approach // SIAM Journal on Control and Optimization. 1997. V. 35, № 2, p. 435–461.

[15] Luo X., Yau S.S.-T. Hermite spectral method to 1-D forward Kolmogorov equation and its application to nonlinear filtering problems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2013. V. 58, № 10, p. 2495–2507.

[16] Luo X., Yau S.S.-T. Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory // IEEE Transactions on Automatic Control. 2013. V. 58, № 10, p. 2563–2578.

Константин Александрович Рыбаков — к.ф.-м.н.,
доцент Московского авиационного института
(национального исследовательского университета);
Москва, 125993; e-mail: rkoffice@mail.ru.
Дата поступления — 28 августа 2015