

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И  
ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ  
№ 1, 2012  
Электронный журнал,  
рег. Эл № ФС77-39410 от 15.04.2010  
ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>  
e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Общая теория управления

## Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Лагерра

К.А. Рыбаков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
кафедра «Математическая кибернетика»,  
[rkoffice@mail.ru](mailto:rkoffice@mail.ru)

В работе получены соотношения для расчета спектральных характеристик операторов умножения, дифференцирования и интегрирования относительно обобщенных функций Лагерра. Приведены различные примеры их применения.

*Ключевые слова:* базис; полиномы Лагерра; обобщенные функции Лагерра; спектральный метод; спектральная характеристика

### Введение

Одной из форм математического описания систем управления является спектральная [5, 6, 9, 15, 17]. В ее основе лежит представление сигналов совокупностью коэффициентов разложения их в ряды по полной ортонормированной системе функций (базисной системе), а ее базовыми понятиями являются спектральные характеристики функций (нестационарные спектральные характеристики) и спектральные характеристики линейных операторов (нестационарные передаточные функции). Использование спектральной формы математического описания позволяет формализовать процесс решения задач анализа, синтеза и идентификации при различных областях изменения времени и координат вектора состояния системы управления.

Для таких задач, как, например, синтез оптимальных стохастических систем управления при неполной информации о векторе состояния [8], в некоторых случаях требуется выбирать базисную систему, функции которой интегрируемы на множестве действительных чисел, но при этом в виде сходящегося в среднеквадратическом (с весом) ряда по таким функциям могут быть представлены многочлены. При отсутствии ограничений на координаты вектора состояния в работе [11] было предложено использовать систему функций, определенных на основе

полиномов Эрмита. При условии неотрицательности координат вектора состояния может быть использована система функций, которая определяется на основе полиномов Лагерра – система обобщенных функций Лагерра. Они заданы таким образом, что являются интегрируемыми на множестве  $[0, +\infty)$  и ортогональными с весовой функцией, аналогичной по структуре весовой функции полиномов Лагерра.

Структура статьи аналогична [11], а именно приведены рекуррентные соотношения для обобщенных функций Лагерра, их производных и первообразных, найдены соотношения для расчета спектральных характеристик операторов умножения, дифференцирования и интегрирования (двумерных нестационарных передаточных функций элементарных звеньев систем управления: усилительного, дифференцирующего и интегрирующего).

Изучены частные случаи и приведены примеры применения спектральной формы математического описания с использованием рассмотренной базисной системы в задачах представления функций, их производных, первообразных и в задаче анализа выходных процессов линейных детерминированных систем управления.

### Обобщенные функции Лагерра

Рассмотрим полиномы Лагерра [2, 13, 18], которые определяются соотношениями

$$L_j^\alpha(x) = (-1)^j x^{-\alpha} e^x \frac{d^j}{dx^j} (x^{\alpha+j} e^{-x}) \quad (1)$$

или

$$L_j^\alpha(x) = \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} x^k, \quad (2)$$

где  $\alpha > -1$  – заданное число,  $C_j^k = \frac{j!}{k!(j-k)!}$ ,  $(\alpha + j)^{[j-k]}$  – факториальный многочлен ( $t^{[k]} = t(t-1)\dots(t-k+1)$ ,  $t^{[0]} = 1$ ). Они являются ортогональными с весом  $\rho(x) = x^\alpha e^{-x}$  на множестве неотрицательных чисел, т.е.

$$(L_i^\alpha(x), L_j^\alpha(x))_{L_2([0, +\infty); \rho(x))} = \begin{cases} j! \Gamma(\alpha + j + 1), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

где  $(\cdot, \cdot)_{L_2([0, +\infty); \rho(x))}$  – скалярное произведение в пространстве  $L_2([0, +\infty); \rho(x))$  [3]:

$$(f(x), h(x))_{L_2([0, +\infty); \rho(x))} = \int_0^{+\infty} \rho(x) f(x) h(x) dx, \quad f(x), h(x) \in L_2([0, +\infty); \rho(x)),$$

а  $\Gamma(\alpha)$  – гамма-функция:  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ .

Функции Лагерра задаются следующим образом:  $\Psi_j^\alpha(x) = \rho^{\frac{1}{2}}(x) L_j^\alpha(x)$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ . Они ортогональны на множестве неотрицательных чисел с единичным весом, поскольку

$$(\Psi_i^\alpha(x), \Psi_j^\alpha(x))_{L_2([0, +\infty))} = (L_i^\alpha(x), L_j^\alpha(x))_{L_2([0, +\infty); \rho(x))} = \begin{cases} j! \Gamma(\alpha + j + 1), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

где  $(\cdot, \cdot)_{L_2([0, +\infty))}$  – скалярное произведение в пространстве  $L_2([0, +\infty))$ :

$$(f(x), h(x))_{L_2([0, +\infty))} = \int_0^{+\infty} f(x) h(x) dx, \quad f(x), h(x) \in L_2([0, +\infty)).$$

Для представления функций рядами удобнее использовать ортонормированные системы [3, 9], поэтому обозначим через  $l_j^\alpha(x)$  нормированные полиномы Лагерра, а через  $\psi_j^\alpha(x)$  – нормированные функции Лагерра [13]:

$$l_j^\alpha(x) = \frac{L_j^\alpha(x)}{\sqrt{h_j}}, \quad \psi_j^\alpha(x) = \frac{\Psi_j^\alpha(x)}{\sqrt{h_j}}, \quad h_j = j! \Gamma(\alpha + j + 1), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Далее рассмотрим функции

$$F_j^{\alpha, \beta}(x) = \rho^{\frac{1-\beta}{2}}(x) L_j^\alpha(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где числовой параметр  $\beta$  может принимать любые значения из отрезка  $[0, 1]$ .

Очевидно, что при  $\beta = 1$  функции  $F_j^{\alpha, \beta}(x)$  совпадают с полиномами Лагерра  $L_j^\alpha(x)$ , а при  $\beta = 0$  – с функциями Лагерра  $\Psi_j^\alpha(x)$ . Функции  $F_j^{\alpha, \beta}(x)$  будем называть *обобщенными функциями Лагерра*. Они ортогональны на множестве неотрицательных чисел с весом  $\rho^\beta(x)$ , при этом

$$\left( F_i^{\alpha, \beta}(x), F_j^{\alpha, \beta}(x) \right)_{L_2([0, +\infty); \rho^\beta(x))} = \left( L_i^\alpha(x), L_j^\alpha(x) \right)_{L_2([0, +\infty); \rho(x))} = \begin{cases} j! \Gamma(\alpha + j + 1), & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь  $(\cdot, \cdot)_{L_2([0, +\infty); \rho^\beta(x))}$  – скалярное произведение в пространстве  $L_2([0, +\infty); \rho^\beta(x))$ :

$$\left( f(x), h(x) \right)_{L_2([0, +\infty); \rho^\beta(x))} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) f(x) h(x) dx, \quad f(x), h(x) \in L_2([0, +\infty); \rho^\beta(x)).$$

Функции  $f_j^{\alpha, \beta}(x) = \frac{F_j^{\alpha, \beta}(x)}{\sqrt{h_j}}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ , будем называть *нормированными обобщенными функциями Лагерра* (при  $\beta = 1$  они совпадают с нормированными полиномами Лагерра  $l_j^\alpha(x)$ , а при  $\beta = 0$  – с нормированными функциями Лагерра  $\psi_j^\alpha(x)$ ). Доказательство полноты системы функций  $\{f_j^{\alpha, \beta}(x)\}_{j=0}^\infty$  при  $\beta \in (0, 1)$  аналогично доказательству полноты систем функций Лагерра и Эрмита в [3].

Для упрощения обозначений в случае полиномов  $L_j^\alpha(x)$  и  $l_j^\alpha(x)$ , а также функций  $\Psi_j^\alpha(x)$ ,  $F_j^{\alpha, \beta}(x)$ ,  $\psi_j^\alpha(x)$  и  $f_j^{\alpha, \beta}(x)$  не будем указывать параметры  $\alpha$  и  $\beta$ .

Известно [2, 18], что для полиномов Лагерра  $L_j(x)$  справедлива рекуррентная формула

$$L_{j+1}(x) = (x - \alpha - 2j - 1)L_j(x) - j(\alpha + j)L_{j-1}(x), \quad L_0(x) = 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots,$$

но обобщенные функции Лагерра  $F_j(x)$  (и функции Лагерра  $\Psi_j(x)$ , которые являются их частным случаем) от полиномов  $L_j(x)$  отличаются множителем, не зависящим от номера функции, следовательно, аналогичная рекуррентная формула справедлива и для функций  $F_j(x)$ :

$$F_{j+1}(x) = (x - \alpha - 2j - 1)F_j(x) - j(\alpha + j)F_{j-1}(x), \quad F_0(x) = \rho^{\frac{1-\beta}{2}}(x), \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Для приведенных рекуррентных формул следует дополнительно определить функции  $L_{-1}(x) = 0$  и  $F_{-1}(x) = 0$ . Эти соотношения удобны для получения явных формул, если  $j$  невелико. Так, например, первые четыре обобщенные функции Лагерра имеют вид

$$F_0(x) = (x^\alpha e^{-x})^{\frac{1-\beta}{2}},$$

$$F_1(x) = (x^\alpha e^{-x})^{\frac{1-\beta}{2}} (x - \alpha - 1),$$

$$F_2(x) = (x^\alpha e^{-x})^{\frac{1-\beta}{2}} (x^2 - (2\alpha + 4)x + \alpha^2 + 3\alpha + 2),$$

$$F_3(x) = (x^\alpha e^{-x})^{\frac{1-\beta}{2}} (x^3 - (3\alpha + 9)x^2 + (3\alpha^2 + 15\alpha + 18)x - \alpha^3 - 6\alpha^2 - 11\alpha - 6).$$

Графики нормированных обобщенных функций Лагерра при  $\alpha = 0$  и различных значениях  $\beta$  изображены на рис. 1–4.

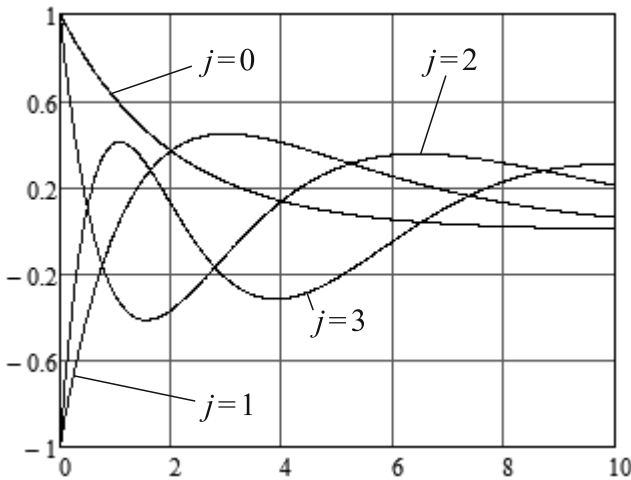


Рис. 1. Графики обобщенных функций Лагерра при  $\beta = 0$  (функций Лагерра)

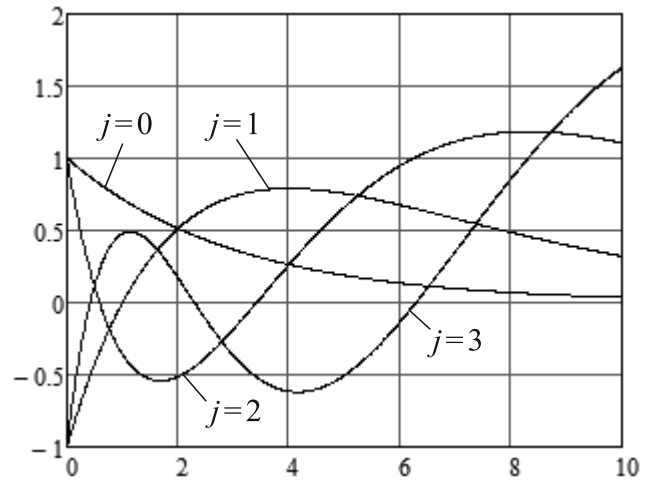


Рис. 2. Графики обобщенных функций Лагерра при  $\beta = \frac{1}{3}$

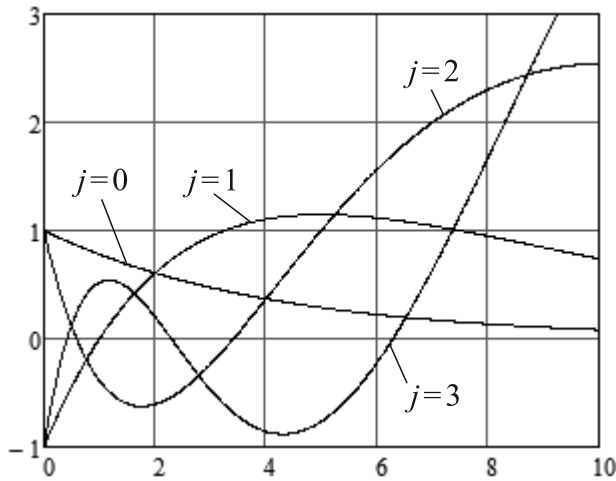


Рис. 3. Графики обобщенных функций Лагерра при  $\beta = \frac{1}{2}$

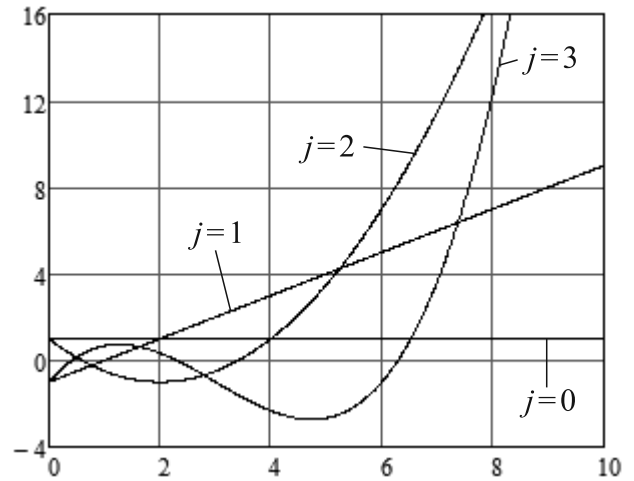


Рис. 4. Графики обобщенных функций Лагерра при  $\beta = 1$  (полиномов Лагерра)

Прежде, чем вывести соотношения для расчета спектральных характеристик операторов дифференцирования и интегрирования, необходимо получить соотношения, связывающие обобщенные функции Лагерра и их производные, а также первообразные.

Из определения обобщенных функций Лагерра следует, что

$$F_j(x) = (x^\alpha e^{-x})^{\frac{1-\beta}{2}} L_j(x) = x^{\frac{1-\beta}{2}} e^{-\frac{1-\beta}{2}x} L_j(x) = x^\mu e^{-\delta x} L_j(x),$$

где  $\mu = \alpha \frac{1-\beta}{2} = \alpha\delta$ ,  $\delta = \frac{1-\beta}{2}$ , поэтому

$$F_j(x) = x^\mu e^{-\delta x} (-1)^j x^{-\alpha} e^x \frac{d^j}{dx^j} (x^{\alpha+j} e^{-x}) = (-1)^j x^{\mu-\alpha} e^{(1-\delta)x} \frac{d^j}{dx^j} (x^{\alpha+j} e^{-x}) = (-1)^j x^{-\eta} e^{\lambda x} \frac{d^j}{dx^j} (x^{\alpha+j} e^{-x}),$$

где  $\eta = \alpha - \mu = \alpha \frac{1+\beta}{2} = \alpha \lambda$ ,  $\lambda = 1 - \delta = \frac{1+\beta}{2}$  (новые параметры  $\mu$ ,  $\delta$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$  введены для удобства записи формул), или, учитывая (2),

$$F_j(x) = x^\mu e^{-\delta x} \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} x^k. \quad (6)$$

Таким образом,

$$F_{j+1}(x) = (-1)^{j+1} x^{-\eta} e^{\lambda x} \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}} (x^{\alpha+j+1} e^{-x}) = (-1)^{j+1} x^{-\eta} e^{\lambda x} \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}} (x x^{\alpha+j} e^{-x}).$$

Применяя формулу Лейбница [2], получаем

$$\begin{aligned} F_{j+1}(x) &= (-1)^{j+1} x^{-\eta} e^{\lambda x} \left( x \frac{d^{j+1}}{dx^{j+1}} (x^{\alpha+j} e^{-x}) + (j+1) \frac{d^j}{dx^j} (x^{\alpha+j} e^{-x}) \right) = -(j+1) (-1)^j x^{-\eta} e^{\lambda x} \frac{d^j}{dx^j} (x^{\alpha+j} e^{-x}) - \\ &- (-1)^j x^{-\eta} e^{\lambda x} x \frac{d}{dx} \frac{d^j}{dx^j} (x^{\alpha+j} e^{-x}) = -(j+1) F_j(x) - (-1)^j x^{-\eta} e^{\lambda x} x \left( (-1)^j x^\eta e^{-\lambda x} F_j(x) \right)' = -(j+1) F_j(x) - \\ &- x^{-\eta} e^{\lambda x} x \left( \eta x^{\eta-1} e^{-\lambda x} F_j(x) - \lambda x^\eta e^{-\lambda x} F_j(x) + x^\eta e^{-\lambda x} F_j'(x) \right) = (\lambda x - \eta - j - 1) F_j(x) - x F_j'(x). \end{aligned}$$

Затем, умножая на  $\lambda$  левую и правую части (5) и вычитая полученный результат из последнего равенства, имеем

$$(1 - \lambda) F_{j+1}(x) = (-\eta - j - 1 + \lambda \alpha + 2\lambda j + \lambda) F_j(x) + \lambda j(\alpha + j) F_{j-1}(x) - x F_j'(x),$$

или

$$\delta F_{j+1}(x) = (\beta j - \delta) F_j(x) + \lambda j(\alpha + j) F_{j-1}(x) - x F_j'(x). \quad (7)$$

Дифференцируя левую и правую части (5), находим

$$F'_{j+1}(x) = F_j(x) + x F_j'(x) - (\alpha + 2j + 1) F'_j(x) - j(\alpha + j) F'_{j-1}(x),$$

а затем подставляем  $x F_j'(x)$  из (7):

$$F'_{j+1}(x) = -\delta F_{j+1}(x) + (\beta j + \lambda) F_j(x) + \lambda j(\alpha + j) F_{j-1}(x) - (\alpha + 2j + 1) F'_j(x) - j(\alpha + j) F'_{j-1}(x). \quad (8)$$

Далее получим рекуррентные соотношения для первообразных обобщенных функций Лагерра. Проинтегрируем левую и правую части (7):

$$\delta \int_0^x F_{j+1}(\xi) d\xi = (\beta j - \delta) \int_0^x F_j(\xi) d\xi + \lambda j(\alpha + j) \int_0^x F_{j-1}(\xi) d\xi - \int_0^x \xi F'_j(\xi) d\xi.$$

Используя правило интегрирования по частям для последнего слагаемого в правой части, получаем

$$\begin{aligned} \int_0^x F_{j+1}(\xi) d\xi &= \frac{1}{\delta} \left( (\beta j - \delta + 1) \int_0^x F_j(\xi) d\xi + \lambda j(\alpha + j) \int_0^x F_{j-1}(\xi) d\xi - x F_j(x) \right) = \\ &= \frac{1}{\delta} \left( (\beta j + \lambda) \int_0^x F_j(\xi) d\xi + \lambda j(\alpha + j) \int_0^x F_{j-1}(\xi) d\xi - x F_j(x) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

В случае  $\delta = 0$  (т.е. при  $\beta = 1$ ,  $F_j(x) = L_j(x)$  – полиномы Лагерра)

$$\int_0^x F_j(\xi) d\xi = \frac{1}{j+1} \left( x F_j(x) - j(\alpha + j) \int_0^x F_{j-1}(\xi) d\xi \right). \quad (10)$$

При многократном интегрировании удобнее воспользоваться соотношением (8), в частности

$$F_{j+1}(x) - F_{j+1}(0) = -\delta \int_0^x F_{j+1}(\xi) d\xi + (\beta j + \lambda) \int_0^x F_j(\xi) d\xi + \lambda j(\alpha + j) \int_0^x F_{j-1}(\xi) d\xi - (\alpha + 2j + 1)(F_j(x) - F_j(0)) - j(\alpha + j)(F_{j-1}(x) - F_{j-1}(0)).$$

Поскольку  $F_{j+1}(0) = -(\alpha + 2j + 1)F_j(0) - j(\alpha + j)F_{j-1}(0)$  (см. (5)),

$$F_{j+1}(x) = -\delta \int_0^x F_{j+1}(\xi) d\xi + (\beta j + \lambda) \int_0^x F_j(\xi) d\xi + \lambda j(\alpha + j) \int_0^x F_{j-1}(\xi) d\xi - (\alpha + 2j + 1)F_j(x) - j(\alpha + j)F_{j-1}(x),$$

или (такой же результат получается при подстановке  $x F_j(x)$  из (5) в (9))

$$\int_0^x F_{j+1}(\xi) d\xi = \frac{1}{\delta} \left( (\beta j + \lambda) \int_0^x F_j(\xi) d\xi + \lambda j(\alpha + j) \int_0^x F_{j-1}(\xi) d\xi \right) - \frac{1}{\delta} (F_{j+1}(x) + (\alpha + 2j + 1)F_j(x) + j(\alpha + j)F_{j-1}(x)). \quad (11)$$

Если  $\delta = 0$  ( $\beta = 1$ , полиномы Лагерра), то

$$\int_0^x F_j(\xi) d\xi = \frac{1}{j+1} \left( F_{j+1}(x) + (\alpha + 2j + 1)F_j(x) + j(\alpha + j)F_{j-1}(x) - j(\alpha + j) \int_0^x F_{j-1}(\xi) d\xi \right). \quad (12)$$

Далее рассмотрим задачу представления функции  $y(x) \in L_2([0, +\infty); \rho^\beta(x))$  в виде ряда по нормированным обобщенным функциям Лагерра [3, 9]:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} y_j f_j(x), \quad x \in [0, +\infty), \quad (13)$$

где числа

$$y_j = (f_j(x), y(x))_{L_2([0, +\infty); \rho^\beta(x))} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) f_j(x) y(x) dx, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

называются *коэффициентами разложения* функции  $y(x)$  относительно системы функций  $\{f_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ .

Упорядоченная совокупность коэффициентов разложения  $y_j$  образует спектральную характеристику [6, 9, 15–17] функции  $y(x)$ :  $[y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots]^T$  ( $T$  означает транспонирование).

*Пример 1.* Рассмотрим задачу приближенного представления плотности вероятности для

распределения Рэлея  $y(x) = \begin{cases} \frac{x}{\zeta^2} e^{-\frac{x^2}{2\zeta^2}}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$  с параметром  $\zeta = 1$  в виде частичной суммы ряда

по нормированным обобщенным функциям Лагерра.

Найдем численно коэффициенты разложения, используя формулу (14), ограничившись конечным числом первых  $N$  членов ряда (13). В этом случае функция

$$y_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} y_j f_j(x) \quad (15)$$

является наилучшим приближением  $y(x)$  в пространстве  $L_2([0, +\infty); \rho^\beta(x))$  [18]:

$$y(x) \approx y_N(x), \quad \|y(x) - y_N(x)\|_{L_2([0, +\infty); \rho^\beta(x))} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Коэффициенты разложения зависят от числовых параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Сравним погрешности аппроксимации функции  $y(x)$  функцией  $y_N(x)$  при различных  $N$  и  $\beta$ , положив  $\alpha = 0$ . Погрешность аппроксимации будем вычислять, используя три критерия:

$$J_1(y, y_N) = \|y(x) - y_N(x)\|_{L_2([0, +\infty); \rho^\beta(x))} = \left\{ \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) (y(x) - y_N(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$J_2(y, y_N) = \|y(x) - y_N(x)\|_{L_2([0, +\infty))} = \left\{ \int_0^{+\infty} (y(x) - y_N(x))^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (16)$$

$$J_3(y, y_N) = \|y(x) - y_N(x)\|_{C([0, +\infty))} = \sup_{0 \leq x < +\infty} |y(x) - y_N(x)|.$$

Результаты расчетов приведены на рис. 5–8 и в таблице 1.

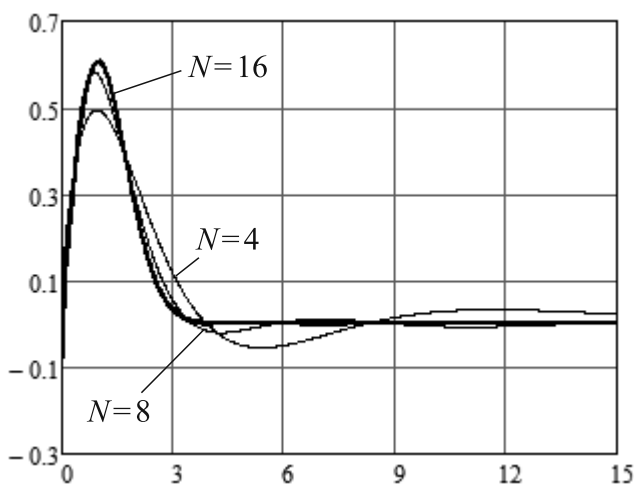


Рис. 5. Графики функций  $y(x)$  и  $y_N(x)$  при  $\beta = 0$  и различных значениях  $N$

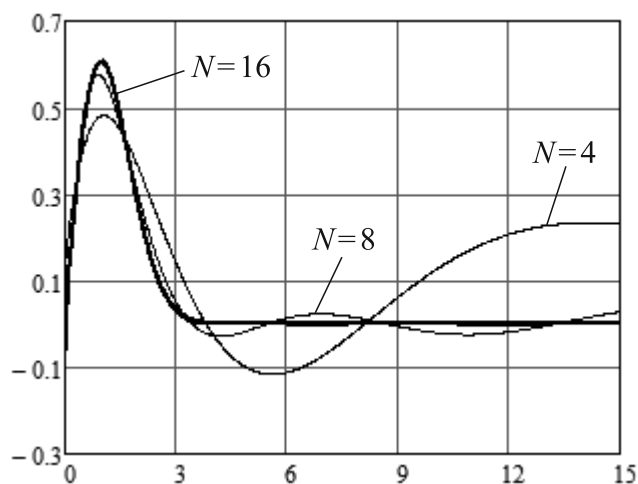


Рис. 6. Графики функций  $y(x)$  и  $y_N(x)$  при  $\beta = \frac{1}{3}$  и различных значениях  $N$

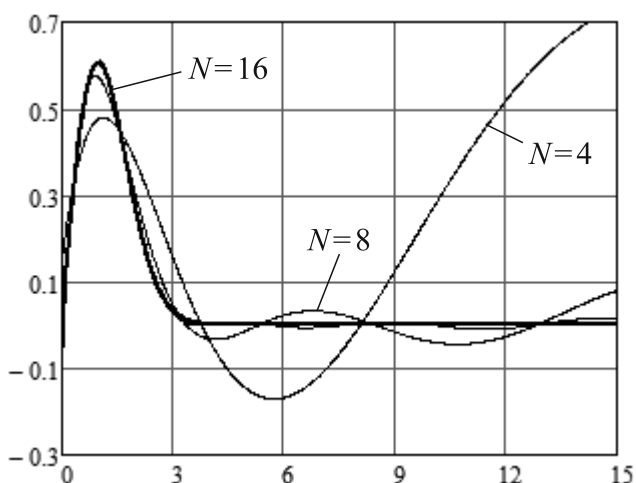


Рис. 7. Графики функций  $y(x)$  и  $y_N(x)$  при  $\beta = \frac{1}{2}$  и различных значениях  $N$

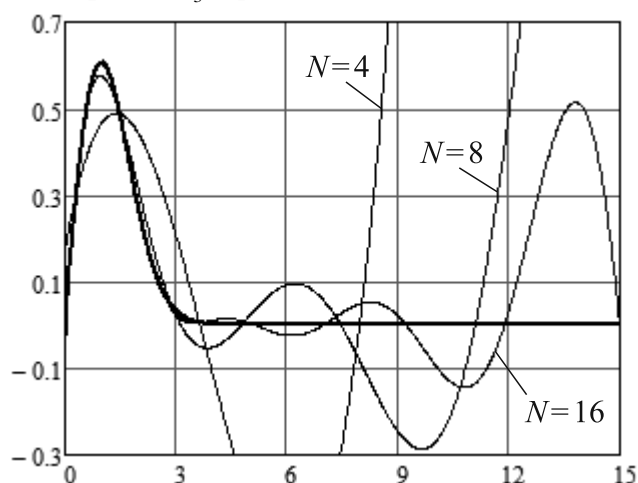


Рис. 8. Графики функций  $y(x)$  и  $y_N(x)$  при  $\beta = 1$  и различных значениях  $N$

На представленных рисунках толстой линией показан график функции  $y(x)$ , а тонкой — графики функций  $y_N(x)$  при различных  $N$ , в следующих примерах принята такая же система

обозначений: толстая линия для аппроксимируемой функции, тонкие – для ее приближений. В таблице 1 и в последующих таблицах, если это не оговорено особо, данные (погрешности, вычисленные по различным критериям) представлены в форме  $J_1 / J_2 / J_3$ .

Критерии  $J_2$  и  $J_3$  характеризуют среднеквадратическое и равномерное приближение функции  $y(x)$  функциями  $y_N(x)$  без учета веса; погрешность, рассчитанная по этим критериям, приведена для сравнения. Если при решении задачи аппроксимации функции ориентироваться на подобные критерии, то имеет смысл (особенно с ростом  $\beta$ ) рассчитывать погрешности по формулам, аналогичным для  $J_2$  и  $J_3$  в (16), но только для конечных подмножеств  $[0, +\infty)$ .

Таблица 1

Погрешности аппроксимации функции  $y(x)$  при различных  $\beta$  и  $N$

	$\beta = 0$	$\beta = \frac{1}{3}$	$\beta = \frac{1}{2}$	$\beta = 1$
$N = 4$	0.183243/	0.164519/	0.156149/	0.133897/
	0.183243/	0.732944/	2.663500/	–/
	0.114075	0.233488	0.765335	–
$N = 8$	0.070569/	0.051684/	0.044064/	0.028029/
	0.070569/	0.556821/	2.738899/	–/
	0.129654	0.157466	0.793647	–
$N = 16$	0.012135/	0.008276/	0.007124/	0.004335/
	0.012135/	3.364286/	8110.535929/	–/
	0.027530	0.943857	1593.571427	–

*Пример 2.* Рассмотрим задачу представления функции  $z(x) = x^n$  ( $n$  – заданное целое неотрицательное число) в виде ряда по нормированным обобщенным функциям Лагерра.

Найдем коэффициенты разложения (в отличие от предыдущего примера получим для них аналитические выражения). Согласно (14)

$$z_j^n = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) f_j(x) z(x) dx = \frac{1}{\sqrt{h_j}} \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_j(x) x^n dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{j! \Gamma(\alpha + j + 1)}} \int_0^{+\infty} x^{\alpha\beta} e^{-\beta x} x^\mu e^{-\delta x} \left( \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} x^k \right) x^n dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{j! \Gamma(\alpha + j + 1)}} \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} \int_0^{+\infty} x^{\alpha\beta + \mu + n + k} e^{-\lambda x} dx.$$

Учитывая равенства  $\alpha\beta + \mu = \alpha\lambda = \eta$ , а также

$$\int_0^{+\infty} x^{\xi-1} e^{-\omega x} dx = \frac{1}{\omega^\xi} \int_0^{+\infty} u^{\xi-1} e^{-u} du = \frac{\Gamma(\xi)}{\omega^\xi} \quad (\omega, \xi > 0), \tag{17}$$

получаем

$$z_j^n = \frac{1}{\sqrt{j! \Gamma(\alpha + j + 1)}} \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} \frac{\Gamma(\eta + n + k + 1)}{\lambda^{\eta + n + k + 1}}. \tag{18}$$

При  $\alpha = \eta = 0$  эта формула упрощается, а именно

$$z_j^n = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k j^{[j-k]} \frac{(n+k)!}{\lambda^{n+k+1}} = \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k \frac{(n+k)!}{k! \lambda^{n+k+1}} = \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k \frac{(n+k)^{[n]}}{\lambda^{n+k+1}}.$$



Если, как и в примере 1, ограничиться первыми  $N$  членами ряда (13), то функция  $z_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} z_j^n f_j(x)$  будет приближенно представлять  $z(x)$  в пространстве  $L_2([0, +\infty); \rho^\beta(x))$ , однако отметим, что при  $\beta = 0$   $z_N(x)$  не будет сходиться в среднеквадратическом к  $z(x)$ , так как  $z(x) \notin L_2([0, +\infty))$ .

Воспользуемся другим способом для расчета  $z_j^n$ :

$$z_j^n = \frac{\tilde{z}_j^n}{\sqrt{h_j}}, \quad \tilde{z}_j^n = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_j(x) z(x) dx = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_j(x) x^n dx. \quad (19)$$

Так как  $F_j(x)x^{n+1} = (F_{j+1}(x) + (\alpha + 2j + 1)F_j(x) + j(\alpha + j)F_{j-1}(x))x^n$  (см. (5)),

$$\tilde{z}_j^{n+1} = \tilde{z}_{j+1}^n + (\alpha + 2j + 1)\tilde{z}_j^n + j(\alpha + j)\tilde{z}_{j-1}^n, \quad (20)$$

а начальные условия ( $n = 0$ ) можно получить из (18):

$$\tilde{z}_j^0 = \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} \frac{\Gamma(\eta + k + 1)}{\lambda^{\eta+k+1}}. \quad (21)$$

При  $\alpha = \eta = 0$  последнее выражение преобразуется к виду  $\tilde{z}_j^0 = j! \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^{j+k} C_j^k}{\lambda^{k+1}}$ , а при дополни-

тельном условии  $\lambda = 1$  ( $\beta = 1$ , полиномы Лагерра)  $\tilde{z}_j^0 = (-1)^j j! \sum_{k=0}^j (-1)^k C_j^k = \begin{cases} 1, & j = 0, \\ 0, & j > 0; \end{cases}$  при  $\lambda = \frac{1}{2}$

( $\beta = 0$ , функции Лагерра)  $\tilde{z}_j^0 = 2j! \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} 2^k C_j^k = 2j!$ ; в остальных случаях –  $\tilde{z}_j^0 = \frac{j!}{\lambda} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right)^j$ .

Элементы  $z_j^n$  образуют спектральные характеристики  $Z = [z_0^n \quad z_1^n \quad z_2^n \quad \dots]^T$  функций  $z(x) = x^n$ , в то же время они являются элементами спектральных характеристик линейных функционалов  $\mathcal{J}^n$ , ставящих в соответствие функции  $y(x)$  интеграл от произведения этой функции на  $x^n$  по множеству неотрицательных чисел:

$$\mathcal{J}^n y(x) = \int_0^{+\infty} x^n y(x) dx.$$

Согласно свойствам спектральных характеристик линейных функционалов [9, 12], определенных относительно базисной системы функций, которые ортогональны с тождественно равной единице весовой функцией (в данном случае параметр  $\beta$  должен быть равен нулю),

справедливо соотношение  $\mathcal{J}^n y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j^n y_j$ , где  $y_j$  – коэффициенты разложения функции

$y(x)$ . Воспользуемся этим соотношением, чтобы проверить условие нормировки для плотности вероятности распределения Рэля (см. пример 1) и чтобы вычислить соответствующее математическое ожидание ( $n = 0$  и  $n = 1$ ). Будем использовать усеченные спектральные характеристики,

т.е.  $\mathcal{J}^n y(x) \approx \sum_{j=0}^{N-1} z_j^n y_j$ . Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Если весовая функция тождественно не равна единице ( $\beta > 0$ ), то выражение для вычисления  $\mathcal{J}^n y(x)$  более сложное [9]. В подобном случае требуется найти спектральную характери-

стику оператора умножения на функцию  $\rho^\beta(x)$  или  $\rho^{-\beta}(x)$ . Соотношения для расчета таких спектральных характеристик приведены ниже.

Таблица 2

	$n = 0$	$n = 1$
$N = 4$	1.187811	4.336639
$N = 8$	0.970396	0.321910
$N = 16$	1.004176	1.518009
$N = 24$	1.000447	1.297062
$N = 32$	0.999453	1.181923
Точное значение	1.000000	$\sqrt{\pi/2} \approx 1.253314$

### Спектральные характеристики линейных операторов

На основе определения и рекуррентных формул для обобщенных функций Лагерра получим соотношения для расчета спектральных характеристик линейных операторов: умножения, дифференцирования и интегрирования. Эти соотношения необходимы для применения спектральной формы математического описания в различных задачах анализа, синтеза, идентификации и др. при использовании нормированных обобщенных функций Лагерра в качестве базисной системы. Аналогичные соотношения можно получить и для расчета спектральных характеристик других линейных операторов.

### Спектральные характеристики операторов умножения

Рассмотрим оператор умножения на функцию  $a(x)$ , т.е. линейный оператор, ставящий в соответствие функции  $f(x)$  произведение  $a(x)f(x)$ . Напомним [9, 17], что *спектральной характеристикой оператора умножения на функцию  $a(x)$  (двумерной нестационарной передаточной функцией усилительного звена)* называется бесконечная двумерная матрица  $A$ , элементы которой вычисляются следующим образом:

$$A_{ij} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) a(x) f_i(x) f_j(x) dx = \frac{\tilde{A}_{ij}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\tilde{A}_{ij} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) a(x) F_i(x) F_j(x) dx. \quad (22)$$

Для получения рекуррентных формул, требующихся при вычислении элементов  $\tilde{A}_{ij+1}$ , преобразуем произведение  $F_i(x)F_{j+1}(x)$ , используя соотношение (5):

$$\begin{aligned} F_i(x)F_{j+1}(x) &= F_i(x)\left((x - \alpha - 2j - 1)F_j(x) - j(\alpha + j)F_{j-1}(x)\right) = xF_i(x)F_j(x) - (\alpha + 2j + 1)F_i(x)F_j(x) - \\ &- j(\alpha + j)F_i(x)F_{j-1}(x) = (F_{i+1}(x) + (\alpha + 2i + 1)F_i(x) + i(\alpha + i)F_{i-1}(x))F_j(x) - (\alpha + 2j + 1)F_i(x)F_j(x) - \\ &- j(\alpha + j)F_i(x)F_{j-1}(x) = F_{i+1}(x)F_j(x) + 2(i - j)F_i(x)F_j(x) + i(\alpha + i)F_{i-1}(x)F_j(x) - j(\alpha + j)F_i(x)F_{j-1}(x), \end{aligned}$$

следовательно,

$$\tilde{A}_{ij+1} = \tilde{A}_{i+1j} + 2(i - j)\tilde{A}_{ij} + i(\alpha + i)\tilde{A}_{i-1j} - j(\alpha + j)\tilde{A}_{ij-1}. \quad (23)$$

Это выражение не зависит от величины  $\beta$  и поэтому совпадает с рекуррентной формулой для элементов спектральных характеристик оператора умножения в случае полиномов Лагерра ( $\beta = 1$ ) и функций Лагерра ( $\beta = 0$ ), полученной в [13].

Наряду с найденным соотношением можно использовать свойство симметричности спектральной характеристики оператора умножения:  $A_{ij} = A_{ji}$  ( $\tilde{A}_{ij} = \tilde{A}_{ji}$ ).

Элементы  $\tilde{A}_{i0}$  и  $\tilde{A}_{0j}$  – начальные условия для (23) – вычисляются по определению:

$$\tilde{A}_{i0} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) a(x) F_i(x) F_0(x) dx, \quad \tilde{A}_{0j} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) a(x) F_0(x) F_j(x) dx = \tilde{A}_{j0}.$$

Например, если  $a(x) = F_0(x)$ , то  $\tilde{A}_{0j} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_0^2(x) F_j(x) dx$ . Подставим в эту формулу выражения для  $F_0(x)$  и  $F_j(x)$ , используя (6):

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{0j} &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha\beta} e^{-\beta x} x^{2\mu} e^{-2\delta x} x^\mu e^{-\delta x} \left( \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} x^k \right) dx = \\ &= \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} \int_0^{+\infty} x^{\alpha\beta+2\mu+\mu+k} e^{(-\beta-2\delta-\delta)x} dx = \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+\mu+k} e^{-(1+\delta)x} dx. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (17), получаем выражение

$$\tilde{A}_{0j} = \tilde{A}_{j0} = \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} \frac{\Gamma(\alpha + \mu + k + 1)}{(1 + \delta)^{\alpha + \mu + k + 1}}. \quad (24)$$

Например, при  $\alpha = \mu = 0$  имеем

$$\tilde{A}_{0j} = \tilde{A}_{j0} = j! \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^{j+k} C_j^k}{(1 + \delta)^{k+1}} = \frac{j!}{1 + \delta} \left( -\frac{\delta}{1 + \delta} \right)^j,$$

а при условии  $\delta = \mu = 0$  ( $\beta = 1$ , полиномы Лагерра)

$$\tilde{A}_{0j} = \tilde{A}_{j0} = \sum_{k=0}^j (-1)^{j+k} C_j^k (\alpha + j)^{[j-k]} \Gamma(\alpha + k + 1) = (-1)^j (\alpha + j)^{[j]} \Gamma(\alpha + 1) \sum_{k=0}^j (-1)^k C_j^k = \begin{cases} \Gamma(\alpha + 1), & j = 0, \\ 0, & j > 0. \end{cases}$$

Рассмотрим важный для приложений случай, когда  $a(x) = x^n$  ( $n$  – заданное целое неотрицательное число). Умножая левую и правую части соотношения (5) на  $x^n F_i(x)$ , имеем

$$x^n F_i(x) F_{j+1}(x) = x^{n+1} F_i(x) F_j(x) - (\alpha + 2j + 1) x^n F_i(x) F_j(x) - j(\alpha + j) x^n F_i(x) F_{j-1}(x),$$

или

$$x^{n+1} F_i(x) F_j(x) = x^n F_i(x) F_{j+1}(x) + (\alpha + 2j + 1) x^n F_i(x) F_j(x) + j(\alpha + j) x^n F_i(x) F_{j-1}(x),$$

следовательно, элементы  $A_{ij}^n$  спектральной характеристики оператора умножения на функцию

$x^n$  связаны соотношением  $A_{ij}^n = \frac{\hat{A}_{ij}^n}{\sqrt{h_i h_j}}$ , в котором

$$\hat{A}_{ij}^{n+1} = \hat{A}_{ij+1}^n + (\alpha + 2j + 1) \hat{A}_{ij}^n + j(\alpha + j) \hat{A}_{ij-1}^n. \quad (25)$$

Для  $n = 0$   $\hat{A}_{ij}^n = \Delta_{ij}$ , где

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} h_j, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad \text{или} \quad \Delta_{ij} = \begin{cases} j! \Gamma(\alpha + j + 1), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad (26)$$

что является следствием ортогональности обобщенных функций Лагерра (см. (4)). При  $\alpha = 0$

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} (j!)^2 & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Так как матрица с элементами  $\Delta_{ij}$  (ненормированная спектральная характеристика оператора умножения на функцию  $x^0 = 1$ ) представляет собой диагональную матрицу, с учетом (25) получаем, что матрицы с элементами  $\hat{A}_{ij}^n$  (ненормированные спектральные характеристики операторов умножения на функции  $x^n$ ) при  $n > 0$  являются ленточными матрицами (при  $n = 1$  – трехдиагональной, при  $n = 2$  – пятидиагональной и т.д.). Подобная структура является характерной для спектральных характеристик операторов умножения на функции  $x^n$ , определенных относительно базисных систем на основе ортогональных полиномов [11, 15, 17].

Таким образом, принимая во внимание свойство  $\hat{A}_{ij}^n = \hat{A}_{ji}^n$ , находим

$$\hat{A}_{ij}^n = \left. \begin{cases} \Delta_{ij}, & n = 0, \\ 0, & |i - j| > n, \\ \hat{A}_{ij+1}^{n-1} + (\alpha + 2j + 1)\hat{A}_{ij}^{n-1} + j(\alpha + j)\hat{A}_{ij-1}^{n-1}, & i \leq j, \\ \hat{A}_{ji}^n, & i > j. \end{cases} \right\} \begin{matrix} |i - j| \leq n \\ n > 0 \end{matrix} \quad (27)$$

Для примера приведем спектральную характеристику оператора умножения на функцию  $a(x) = x$  при  $\alpha = 0, \beta \in [0, 1]$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots \\ 0 & 0 & 3 & 7 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Соотношения для элементов спектральной характеристики множительного звена (трехмерной нестационарной передаточной функции множительного звена), необходимость в которой возникает при анализе и синтезе нелинейных систем управления, аналогичны полученным в [13]. По определению

$$V_{ijk} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) f_i(x) f_j(x) f_k(x) dx, \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots,$$

или

$$V_{ijk} = \frac{\tilde{V}_{ijk}}{\sqrt{h_i h_j h_k}}, \quad \tilde{V}_{ijk} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) F_j(x) F_k(x) dx, \quad i, j, k = 0, 1, 2, \dots,$$

т.е.  $\tilde{V}_{ijk}$  – это элемент ненормированной спектральной характеристики оператора умножения на функцию  $a(x) = F_i(x)$ , поэтому с учетом (23) имеем

$$\tilde{V}_{ijk+1} = \tilde{V}_{ij+1k} + 2(j-k)\tilde{V}_{ijk} + j(\alpha + j)\tilde{V}_{ij-1k} - k(\alpha + k)\tilde{V}_{ijk-1}.$$

При  $\beta = 1$   $V_{0jk}, V_{i0k}, V_{ij0}$  – это элементы единичной матрицы, умноженной на  $\frac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha + 1)}}$

( $\tilde{V}_{0jk}, \tilde{V}_{i0k}, \tilde{V}_{ij0}$  – элементы (26) диагональной матрицы  $\Delta$ ), а при  $\beta \neq 1$  – они вычисляются как

элементы спектральной характеристики оператора умножения на функцию  $a(x) = F_0(x)$ , для этого используется рекуррентная формула (23) с начальными условиями (24). Кроме того, при вычислении этой характеристики нужно использовать свойство симметричности:

$$V_{ijk} = V_{ikj} = V_{jik} = V_{jki} = V_{kij} = V_{kji} \quad (\tilde{V}_{ijk} = \tilde{V}_{ikj} = \tilde{V}_{jik} = \tilde{V}_{jki} = \tilde{V}_{kij} = \tilde{V}_{kji}).$$

*Пример 3.* Рассмотрим задачу приближенного представления функции  $w(x) = x y(x)$  в виде частичной суммы ряда по нормированным обобщенным функциям Лагерра, где  $y(x)$  – плотность вероятности для распределения Рэлея (см. пример 1).

Коэффициенты разложения функции  $y(x)$  относительно системы нормированных обобщенных функций Лагерра были получены в ходе решения примера 1. Эти коэффициенты образуют спектральную характеристику  $Y$  функции  $y(x)$ , которая представляет собой бесконечную (или конечную в случае представления функции конечным отрезком ряда) матрицу-столбец:

$$Y = [ y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \dots ]^T. \quad (28)$$

Используя свойства спектральных характеристик операторов умножения [9, 17], можно вычислить спектральную характеристику  $W$  функции  $w(x)$  как произведение спектральной характеристики  $A$  оператора умножения на функцию  $a(x) = x$  и спектральной характеристики  $Y$  функции  $y(x)$ :

$$W = A \cdot Y = [ w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad \dots ]^T,$$

и, таким образом, приближенно получить коэффициенты разложения  $w_j$  функции  $w(x)$  относительно системы нормированных обобщенных функций Лагерра:

$$w(x) \approx w_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} w_j f_j(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{i=0}^{N-1} A_{ji} y_i \right) f_j(x).$$

Здесь важно подчеркнуть, что спектральные характеристики  $F$ ,  $A$  и  $W$  определены относительно одной и той же системы функций  $\{f_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  (имеющих фиксированные параметры  $\alpha$  и  $\beta$ ). Эти спектральные характеристики при приближенном решении задачи имеют одинаковый порядок усечения  $N$ , т.е.  $A$  – квадратная матрица размеров  $N \times N$ ,  $Y$  и  $W$  – матрицы-столбцы размеров  $N \times 1$ . Для получения точного решения спектральные характеристики не усекаются, в этом случае  $Y$ ,  $A$  и  $W$  – бесконечные матрицы [4, 6, 9].

Как и в примере 1, положим  $\alpha = 0$  и найдем функцию  $w_N(x)$  при различных  $N$  и  $\beta$ . Погрешности аппроксимации функции  $w(x)$  функцией  $w_N(x)$  будем вычислять по критериям (16). Результаты расчетов приведены на рис. 9–12 и в таблице 3.

Заметим, что значение функционала  $\mathcal{J}^n y(x)$  при  $n > 0$  и  $\beta = 0$  (см. пример 2) можно выразить через элементы  $w_j$  спектральной характеристики  $W$ :

$$\mathcal{J}^n y(x) = \sum_{j=0}^{\infty} z_j^{n-1} w_j \quad \text{или} \quad \mathcal{J}^n y(x) \approx \sum_{j=0}^{N-1} z_j^{n-1} w_j.$$

Например, при  $n = 1$  и различных  $N$  имеем: 2.619924 ( $N = 4$ ), 0.591879 ( $N = 8$ ), 1.440247 ( $N = 16$ ), 1.253637 ( $N = 24$ ), 1.222645 ( $N = 32$ ). Эти результаты точнее, чем приведенные в табл. 2.

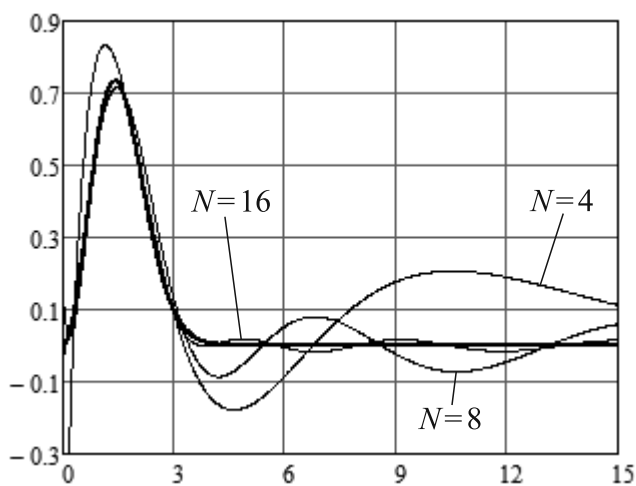


Рис. 9. Графики функций  $w(x)$  и  $w_N(x)$  при  $\beta = 0$  и различных значениях  $N$

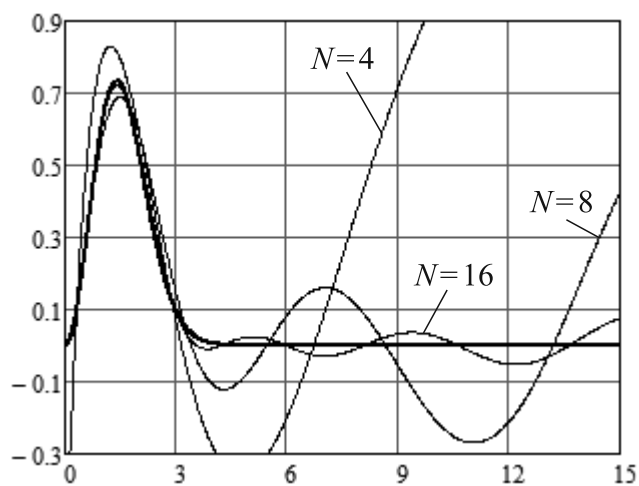


Рис. 10. Графики функций  $w(x)$  и  $w_N(x)$  при  $\beta = \frac{1}{3}$  и различных значениях  $N$

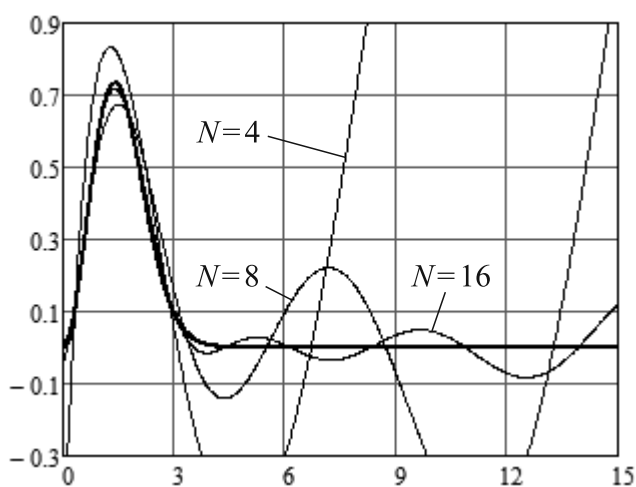


Рис. 11. Графики функций  $w(x)$  и  $w_N(x)$  при  $\beta = \frac{1}{2}$  и различных значениях  $N$

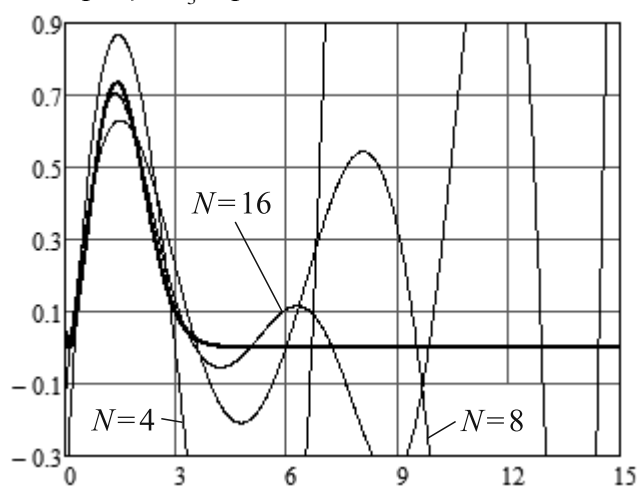


Рис. 12. Графики функций  $w(x)$  и  $w_N(x)$  при  $\beta = 1$  и различных значениях  $N$

Таблица 3

Погрешности аппроксимации функции  $w(x)$  при различных  $\beta$  и  $N$

	$\beta = 0$	$\beta = \frac{1}{3}$	$\beta = \frac{1}{2}$	$\beta = 1$
$N = 4$	0.638857/ 0.638857/ 0.858358	0.559199/ 3.853083/ 1.277039	0.522185/ 13.813711/ 3.964826	0.422375/ -/ -
$N = 8$	0.311555/ 0.311555/ 0.134985	0.194463/ 16.227003/ 4.486995	0.149676/ 228.003353/ 53.671640	0.080111/ -/ -
$N = 16$	0.088622/ 0.088622/ 0.038881	0.039897/ 644.829930/ 149.709593	0.023519/ 138761.354077/ 27136.038269	0.036964/ -/ -

### Спектральные характеристики операторов дифференцирования

Согласно определению [9, 17] спектральной характеристикой  $\mathcal{P}$  оператора дифференцирования, ставящего в соответствие функции  $f(x)$  ее производную  $f'(x)$ , называется бесконечная двумерная матрица, элементы которой задаются в виде

$$\mathcal{P}_{ij} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) f_i(x) f_j'(x) dx = \frac{\tilde{\mathcal{P}}_{ij}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) F_j'(x) dx. \quad (29)$$

Матрица  $\mathcal{P}$  также называется *двумерной нестационарной передаточной функцией дифференцирующего звена*.

Используя соотношение (8), находим

$$F_i(x) F_{j+1}'(x) = -\delta F_i(x) F_{j+1}(x) + (\beta j + \lambda) F_i(x) F_j(x) + \lambda j(\alpha + j) F_i(x) F_{j-1}(x) - (\alpha + 2j + 1) F_i(x) F_j'(x) - j(\alpha + j) F_i(x) F_{j-1}'(x),$$

следовательно,

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij+1} = -\delta \Delta_{ij+1} + (\beta j + \lambda) \Delta_{ij} + \lambda j(\alpha + j) \Delta_{ij-1} - (\alpha + 2j + 1) \tilde{\mathcal{P}}_{ij} - j(\alpha + j) \tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}. \quad (30)$$

Применяя такую же методику, получим соотношения для *спектральной характеристики  $\mathcal{P}^n$  оператора дифференцирования порядка  $n$* :

$$\mathcal{P}_{ij}^n = \frac{\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) F_j^{(n)}(x) dx. \quad (31)$$

Для этого продифференцируем левую и правую части соотношения (8)  $(n-1)$  раз, тогда

$$F_{j+1}^{(n)}(x) = -\delta F_{j+1}^{(n-1)}(x) + (\beta j + \lambda) F_j^{(n-1)}(x) + \lambda j(\alpha + j) F_{j-1}^{(n-1)}(x) - (\alpha + 2j + 1) F_j^{(n)}(x) - j(\alpha + j) F_{j-1}^{(n)}(x).$$

Отсюда

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij+1}^n = -\delta \tilde{\mathcal{P}}_{ij+1}^{n-1} + (\beta j + \lambda) \tilde{\mathcal{P}}_{ij}^{n-1} + \lambda j(\alpha + j) \tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{n-1} - (\alpha + 2j + 1) \tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n - j(\alpha + j) \tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^n. \quad (32)$$

При  $\beta = 1$  (в случае полиномов Лагерра) можно применить другую рекуррентную формулу [18]:  $L_j'(x) = j(L_{j-1}(x) - L_{j-1}'(x))$ , из которой следует, что  $\tilde{\mathcal{P}}_{ij} = j(\Delta_{ij-1} - \tilde{\mathcal{P}}_{ij-1})$ . В частности,  $\tilde{\mathcal{P}}_{i0} = 0$  (так как  $L_0'(x) \equiv 0$ ). Таким образом,

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j+1} j! \Gamma(\alpha + i + 1), & i < j, \\ 0, & i \geq j. \end{cases}$$

Для ненормированной спектральной характеристики  $\tilde{\mathcal{P}}^n$  оператора дифференцирования порядка  $n$  имеем  $\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n = j(\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{n-1} - \tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^n)$ , так как  $L_j^{(n)}(x) = j(L_{j-1}^{(n-1)}(x) - L_{j-1}^{(n)}(x))$ . Наряду с этим  $\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n = 0$  при  $i > j - n$ .

Другой частный случай:  $\alpha = 0$ ,  $\beta < 1$ , т.е.  $F_0(x) = e^{-\delta x}$ . Тогда функции  $F_0'(x) = -\delta e^{-\delta x}$  и  $F_0^{(n)}(x) = (-\delta)^n e^{-\delta x}$  отличаются от  $F_0(x)$  числовым коэффициентом, поэтому ортогональны с  $F_i(x)$ ,  $i > 0$ . Таким образом, легко найти начальные условия для рекуррентных соотношений

$$(30) \text{ и } (32): \tilde{\mathcal{P}}_{i0} = \begin{cases} -\delta, & i = 0, \\ 0, & i > 0, \end{cases} \quad \tilde{\mathcal{P}}_{i0}^n = \begin{cases} (-\delta)^n, & i = 0, \\ 0, & i > 0. \end{cases}$$

Перейдем к общему случаю  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta < 1$  для расчета начальных условий. При этих параметрах  $F_0(x) = x^\mu e^{-\delta x}$ ,  $F_0'(x) = \mu x^{\mu-1} e^{-\delta x} - \delta x^\mu e^{-\delta x}$  и в выражении  $\rho^\beta(x) F_i(x) F_0'(x)$  минимальная степень переменной  $x$  будет равна  $\alpha\beta + 2\mu - 1 = \alpha - 1$ , следовательно, при нецелом  $\mu$  условием сходимости интеграла  $\int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) F_0'(x) dx$  является условие  $\alpha > 0$ . Аналогично, при  $n$ -кратном дифференцировании условие сходимости  $\alpha > n - 1$ . При целых  $\mu$  (для  $\beta = 0$  это условие заменяется на условие четности  $\alpha$  [13]) минимальная степень переменной  $x$  определяется иначе, она равна  $\alpha\beta + \mu + \max\{\mu - n, 0\}$ , поэтому условие сходимости формально записывается в виде  $\max\{\alpha - n, \eta\} > -1$ , однако если  $\alpha > 0$ , то  $\eta > 0 > -1$ , поэтому это условие выполнено.

Далее рассмотрим произведение  $F_{i+1}(x) F_0'(x)$ , необходимое для вычисления  $\tilde{\mathcal{P}}_{i+10}$ :

$$\begin{aligned} F_{i+1}(x) F_0'(x) &= (x F_i(x) - (\alpha + 2i + 1) F_i(x) - i(\alpha + i) F_{i-1}(x)) F_0'(x) = \\ &= x F_i(x) F_0'(x) - (\alpha + 2i + 1) F_i(x) F_0'(x) - i(\alpha + i) F_{i-1}(x) F_0'(x), \end{aligned}$$

т.е.

$$\tilde{\mathcal{P}}_{i+10} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) x F_i(x) F_0'(x) dx - (\alpha + 2i + 1) \tilde{\mathcal{P}}_{i0} - i(\alpha + i) \tilde{\mathcal{P}}_{i-10}.$$

Обозначим первое слагаемое в правой части последнего выражения через  $M_i^1$ . Преобразуем произведение  $x F_0'(x)$ :  $x F_0'(x) = x(\mu x^{\mu-1} e^{-\delta x} - \delta x^\mu e^{-\delta x}) = \mu F_0(x) - \delta x F_0(x)$ , или с учетом (5)

$$x F_0'(x) = \mu F_0(x) - \delta F_1(x) - \delta(\alpha + 1) F_0(x) = -\delta(F_0(x) + F_1(x)), \quad (33)$$

поэтому

$$\begin{aligned} M_i^1 &= \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) (-\delta(F_0(x) + F_1(x))) dx = \\ &= -\delta \left( \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) F_0(x) dx + \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) F_1(x) dx \right) = -\delta(\Delta_{i0} + \Delta_{i1}) \quad (M_i^1 = 0 \text{ при } i > 1). \end{aligned} \quad (34)$$

Аналогично,

$$\tilde{\mathcal{P}}_{i+10}^n = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) x F_i(x) F_0^{(n)}(x) dx - (\alpha + 2i + 1) \tilde{\mathcal{P}}_{i0}^n - i(\alpha + i) \tilde{\mathcal{P}}_{i-10}^n = M_i^n - (\alpha + 2i + 1) \tilde{\mathcal{P}}_{i0}^n - i(\alpha + i) \tilde{\mathcal{P}}_{i-10}^n.$$

Продифференцируем  $(n-1)$  раз левую и правую части (33):

$$(n-1) F_0^{(n-1)}(x) + x F_0^{(n)}(x) = -\delta(F_0^{(n-1)}(x) + F_1^{(n-1)}(x)), \quad \text{или} \quad x F_0^{(n)}(x) = -\delta F_1^{(n-1)}(x) + (\lambda - n) F_0^{(n-1)}(x),$$

тогда

$$\begin{aligned} M_i^n &= \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) (-\delta F_1^{(n-1)}(x) + (\lambda - n) F_0^{(n-1)}(x)) dx = -\delta \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) F_1^{(n-1)}(x) dx + \\ &+ (\lambda - n) \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) F_0^{(n-1)}(x) dx = -\delta \tilde{\mathcal{P}}_{i1}^{n-1} + (\lambda - n) \tilde{\mathcal{P}}_{i0}^{n-1}. \end{aligned}$$

Последнее выражение при  $n = 1$  совпадает с (34), если положить  $\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^0 = \Delta_{ij}$ .

Осталось найти значение  $\tilde{\mathcal{P}}_{00}^n$ . Для этого воспользуемся определением (31) и формулой Лейбница:



$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{00}^n &= \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_0(x) F_0^{(n)}(x) dx = \int_0^{+\infty} x^{\alpha\beta} e^{-\beta x} x^\mu e^{-\delta x} \sum_{k=0}^n C_n^k (x^\mu)^{(k)} (e^{-\delta x})^{(n-k)} dx = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(\beta+2\delta)x} \sum_{k=0}^n C_n^k \mu^{[k]} x^{\alpha\beta+2\mu-k} (-\delta)^{n-k} dx = \sum_{k=0}^n C_n^k \mu^{[k]} (-\delta)^{n-k} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha-k} dx = \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k \mu^{[k]} (-\delta)^{n-k} \Gamma(\alpha - k + 1). \end{aligned} \quad (35)$$

Например, при  $n = 1$ :  $\tilde{\mathcal{P}}_{00}^1 = -\delta\Gamma(\alpha + 1) + \mu\Gamma(\alpha) = (-\alpha\delta + \mu)\Gamma(\alpha) = 0$ .

Заметим также, что при целых  $\mu < n$  часть слагаемых в (35) равны нулю, так как  $\mu^{[k]} = 0$ , начиная с  $k = \mu + 1$ , поэтому можно переписать (35):

$$\tilde{\mathcal{P}}_{00}^n = \sum_{k=0}^{\mu} C_n^k \mu^{[k]} (-\delta)^{n-k} \Gamma(\alpha - k + 1).$$

Начальные условия можно получить и другим способом, а именно с помощью определения (31) и формулы (6), однако это представляется более трудоемким при больших  $n$ . Рассмотрим ненормированную спектральную характеристику оператора дифференцирования первого порядка ( $n = 1$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{P}}_{i0} &= \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) F_0'(x) dx = \int_0^{+\infty} x^{\alpha\beta} e^{-\beta x} x^\mu e^{-\delta x} \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} C_i^k (\alpha + i)^{[i-k]} x^k (\mu x^{\mu-1} e^{-\delta x} - \delta x^\mu e^{-\delta x}) dx = \\ &= \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} C_i^k (\alpha + i)^{[i-k]} \int_0^{+\infty} e^{-(\beta+2\delta)x} x^k (\mu x^{\alpha\beta+2\mu-1} - \delta x^{\alpha\beta+2\mu}) dx = \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} C_i^k (\alpha + i)^{[i-k]} \times \\ &\times \left( \mu \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha+k-1} dx - \delta \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\alpha+k} dx \right) = \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} C_i^k (\alpha + i)^{[i-k]} (\mu\Gamma(\alpha + k) - \delta\Gamma(\alpha + k + 1)). \end{aligned}$$

Учитывая свойство гамма-функции

$$\Gamma(\alpha + k + 1) = (\alpha + k)\Gamma(\alpha + k),$$

а также равенство  $\mu - \alpha\delta = 0$ , получаем

$$\tilde{\mathcal{P}}_{i0}^n = \delta \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k+1} C_i^k (\alpha + i)^{[i-k]} k\Gamma(\alpha + k) = (-1)^{i+1} \delta (\alpha + i)^{[i]} \Gamma(\alpha + 1) \sum_{k=0}^i (-1)^k C_i^k \frac{k}{\alpha + k} = (-1)^i i! \delta \Gamma(\alpha + 1).$$

Таким образом,

$$\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n = \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{ij}, \quad n = 0, \\ j(\tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{n-1} - \tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^n), \quad \beta = 1, \\ \left. \begin{array}{l} (-\delta)^n, \quad i = j = 0, \\ 0, \quad i > 0, \quad j = 0, \end{array} \right\} \alpha = 0 \\ \left. \begin{array}{l} \sum_{k=0}^n C_n^k \mu^{[k]} (-\delta)^{n-k} \Gamma(\alpha - k + 1), \quad i = j = 0, \\ -\delta \tilde{\mathcal{P}}_{i-11}^{n-1} + (\lambda - n) \tilde{\mathcal{P}}_{i-10}^{n-1} - (\alpha + 2i - 1) \tilde{\mathcal{P}}_{i-10}^n - \\ \quad - (i - 1)(\alpha + i - 1) \tilde{\mathcal{P}}_{i-20}^n, \quad i > 0, \quad j = 0, \\ -\delta \tilde{\mathcal{P}}_{ij}^{n-1} + (\beta(j - 1) + \lambda) \tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^{n-1} + \lambda(j - 1)(\alpha + j - 1) \tilde{\mathcal{P}}_{ij-2}^{n-1} - \\ \quad - (\alpha + 2j - 1) \tilde{\mathcal{P}}_{ij-1}^n - (j - 1)(\alpha + j - 1) \tilde{\mathcal{P}}_{ij-2}^n, \quad j > 0. \end{array} \right\} \alpha > 0 \end{array} \right\} \beta < 1 \left. \vphantom{\tilde{\mathcal{P}}_{ij}^n} \right\} n > 0$$

Кроме приведенных выше соотношений при вычислении можно использовать общие свойства спектральных характеристик операторов дифференцирования, определенных относительно базисных систем на  $[0, +\infty)$  [9], а также свойства, характерные для спектральных характеристик операторов дифференцирования, определенных относительно обобщенных функции Лагерра. Так, например, матрица  $\mathcal{P}$  является верхней треугольной при  $\alpha = 0$  или  $\beta = 1$ . При  $\alpha > 0$  диагональные элементы  $\mathcal{P}$  равны нулю, а в случае  $\alpha > 0$  и  $\beta = 0$  матрица  $\mathcal{P}$  – кососимметрическая. Подобные свойства важны, если использовать соотношения

$$\mathcal{P}^2 = \mathcal{P} \cdot \mathcal{P}, \quad \dots, \quad \mathcal{P}^n = \underbrace{\mathcal{P} \cdot \mathcal{P} \dots \mathcal{P}}_n$$

при усечении спектральных характеристик (которое применяется, например, для приближенного решения задачи представления функций и их производных).

В качестве примера приведем спектральные характеристики операторов дифференцирования первого и второго порядков при  $\alpha = 0$  и  $\beta = \frac{1}{3}$ :

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 1 & -1 & 1 & \dots \\ 0 & -\frac{1}{3} & 1 & -1 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & \dots \\ 0 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

*Пример 4.* Рассмотрим задачу приближенного представления производной  $w(x) = y'(x)$  плотности распределения Рэля (см. пример 1) в виде частичной суммы ряда по нормированным обобщенным функциям Лагерра.

Воспользуемся результатами примера 1, в котором приведена формула расчета коэффициентов разложения  $y_j$  относительно системы нормированных обобщенных функций Лагерра. Эти коэффициенты образуют спектральную характеристику  $Y$  функции  $y(x)$ , представляющую собой бесконечную (или конечную в случае представления функции конечным отрезком ряда) матрицу-столбец (28).

Используя свойства спектральных характеристик оператора дифференцирования [9, 17], получаем

$$W = \mathcal{P} \cdot Y = [w_0 \quad w_1 \quad w_2 \quad \dots]^T,$$

где  $W$  – спектральная характеристика функции  $w(x) = y'(x)$ , элементы которой представляют собой коэффициенты разложения этой функции относительно системы  $\{f_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ . Следовательно,

$$w(x) \approx w_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} w_j f_j(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{P}_{ji} y_i \right) f_j(x).$$

Как и в примере 3, спектральные характеристики  $Y$ ,  $\mathcal{P}$  и  $W$  определены относительно одной и той же системы функций  $\{f_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ . Эти спектральные характеристики при приближенном решении задачи имеют одинаковый порядок усечения  $N$ :  $\mathcal{P}$  – квадратная матрица размеров  $N \times N$ ,  $Y$  и  $W$  – матрицы-столбцы размеров  $N \times 1$ . Для получения точного решения спектральные характеристики не усекаются, тогда  $Y$ ,  $\mathcal{P}$  и  $W$  – бесконечные матрицы.

Положим  $\alpha = 0$  и найдем функцию  $w_N(x)$  при различных  $N$  и  $\beta$ . Погрешности аппроксимации функции  $w(x)$  функцией  $w_N(x)$  будем вычислять по критериям (16). Результаты расчетов приведены на рис. 13–16 и в таблице 4.

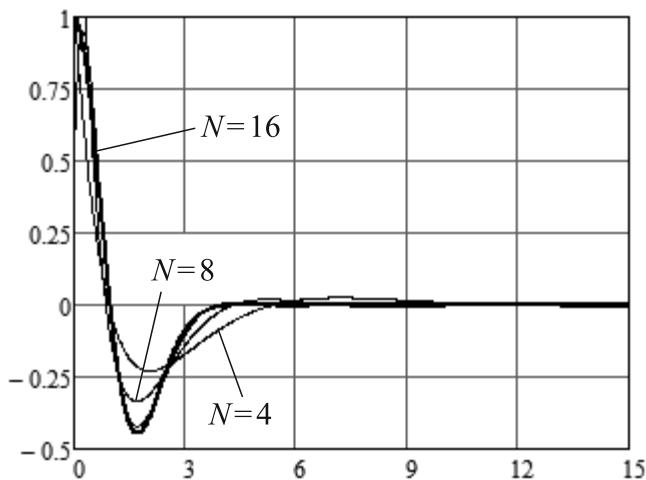


Рис. 13. Графики функций  $w(x)$  и  $w_N(x)$  при  $\beta = 0$  и различных значениях  $N$

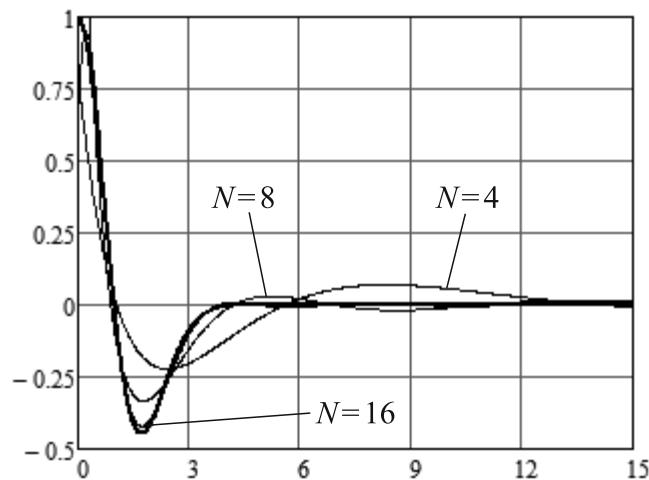


Рис. 14. Графики функций  $w(x)$  и  $w_N(x)$  при  $\beta = \frac{1}{3}$  и различных значениях  $N$

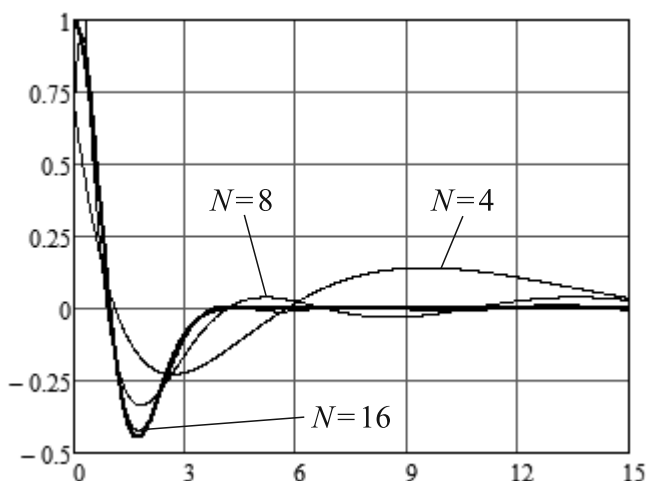


Рис. 15. Графики функций  $w(x)$  и  $w_N(x)$  при  $\beta = \frac{1}{2}$  и различных значениях  $N$

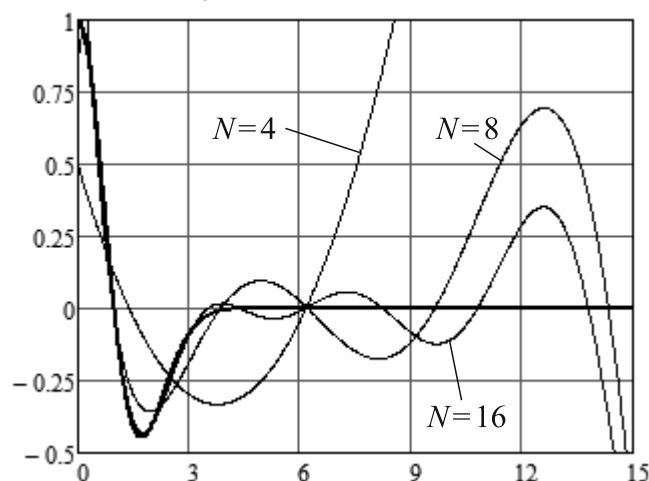


Рис. 16. Графики функций  $w(x)$  и  $w_N(x)$  при  $\beta = 1$  и различных значениях  $N$

Таблица 4

Погрешности аппроксимации функции  $w(x)$  при различных  $\beta$  и  $N$

	$\beta = 0$	$\beta = \frac{1}{3}$	$\beta = \frac{1}{2}$	$\beta = 1$
$N = 4$	0.329105/ 0.329105/ 0.560960	0.337466/ 0.432674/ 0.387938	0.346071/ 0.578936/ 0.422462	0.369171/ -/ -
$N = 8$	0.398043/ 0.398043/ 1.646493	0.327366/ 0.354423/ 1.481419	0.292336/ 0.470097/ 1.392527	0.193753/ -/ -
$N = 16$	0.116694/ 0.116694/ 0.477768	0.086949/ 0.411541/ 0.367585	0.072249/ 409.848143/ 85.813070	0.033236/ -/ -

**Спектральные характеристики операторов интегрирования**

Перейдем к оператору интегрирования, ставящему в соответствие функции  $f(x)$  ее первообразную  $\int_0^x f(\xi)d\xi$ . Спектральной характеристикой оператора интегрирования (двумерной нестационарной передаточной функцией интегрирующего звена) называется бесконечная двумерная матрица  $P^{-1}$ , элементы которой вычисляются следующим образом [9, 17]:

$$P_{ij}^{-1} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) f_i(x) \left( \int_0^x f_j(\xi) d\xi \right) dx = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-1}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\tilde{P}_{ij}^{-1} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) \left( \int_0^x F_j(\xi) d\xi \right) dx. \tag{36}$$

С учетом (36) и соотношений (9) и (22) при  $a(x) = x$  (см. также (27)) можно записать рекуррентную формулу

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-1} = \frac{1}{\delta} \left( (\beta j + \lambda) \tilde{P}_{ij}^{-1} + \lambda j(\alpha + j) \tilde{P}_{ij-1}^{-1} - \hat{A}_{ij}^1 \right), \tag{37}$$

или при  $\delta = 0$  ( $\beta = 1$ , полиномы Лагерра), принимая во внимание (10), имеем

$$\tilde{P}_{ij}^{-1} = \frac{1}{j+1} \left( \hat{A}_{ij}^1 - j(\alpha + j) \tilde{P}_{ij-1}^{-1} \right). \tag{38}$$

Рассмотрим общий случай  $n$ -кратного интегрирования. Соотношения для расчета элементов спектральной характеристики  $P^{-n}$  оператора интегрирования порядка  $n$  имеют вид

$$P_{ij}^{-n} = \frac{\tilde{P}_{ij}^{-n}}{\sqrt{h_i h_j}}, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$\tilde{P}_{ij}^{-n} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) \left( \int_0^x \int_0^{\xi_1} \dots \int_0^{\xi_{n-1}} F_j(\xi_n) d\xi_n \dots d\xi_2 d\xi_1 \right) dx. \tag{39}$$

Здесь целесообразно воспользоваться соотношением (11), тогда

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-n} = \frac{1}{\delta} \left( (\beta j + \lambda) \tilde{P}_{ij}^{-n} + \lambda j(\alpha + j) \tilde{P}_{ij-1}^{-n} - \tilde{P}_{ij+1}^{-n+1} - (\alpha + 2j + 1) \tilde{P}_{ij}^{-n+1} - j(\alpha + j) \tilde{P}_{ij-1}^{-n+1} \right),$$

или при  $\delta = 0$  ( $\beta = 1$ , полиномы Лагерра) – соотношением (12) (см. также [13]):

$$\tilde{P}_{ij}^{-n} = \frac{1}{j+1} \left( \tilde{P}_{ij+1}^{-n+1} + (\alpha + 2j + 1) \tilde{P}_{ij}^{-n+1} + j(\alpha + j) \tilde{P}_{ij-1}^{-n+1} - j(\alpha + j) \tilde{P}_{ij-1}^{-n} \right).$$

Заметим, что последние два выражения при  $n = 1$  принимают соответственно вид

$$\tilde{P}_{ij+1}^{-1} = \frac{1}{\delta} \left( (\beta j + \lambda) \tilde{P}_{ij}^{-1} + \lambda j(\alpha + j) \tilde{P}_{ij-1}^{-1} - \Delta_{ij+1} - (\alpha + 2j + 1) \Delta_{ij} - j(\alpha + j) \Delta_{ij-1} \right)$$

и

$$\tilde{P}_{ij}^{-1} = \frac{1}{j+1} \left( \Delta_{ij+1} + (\alpha + 2j + 1) \Delta_{ij} + j(\alpha + j) \Delta_{ij-1} - j(\alpha + j) \tilde{P}_{ij-1}^{-1} \right).$$

Они совпадают с (37) и (38), так как  $\hat{A}_{ij}^1 = \Delta_{ij+1} + (\alpha + 2j + 1) \Delta_{ij} + j(\alpha + j) \Delta_{ij-1}$  (см. (27)).

Таким образом,

$$\tilde{P}_{ij}^{-n} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta_{ij}, \quad n=0, \\ \frac{1}{\delta} \left( (\beta(j-1) + \lambda) \tilde{P}_{ij-1}^{-n} + \lambda(j-1)(\alpha + j-1) \tilde{P}_{ij-2}^{-n} - \tilde{P}_{ij}^{-n+1} - \right. \\ \left. - (\alpha + 2j-1) \tilde{P}_{ij-1}^{-n+1} - (j-1)(\alpha + j-1) \tilde{P}_{ij-2}^{-n+1} \right), \quad j > 0, \quad \beta < 1, \\ \frac{1}{j+1} \left( \tilde{P}_{ij+1}^{-n+1} + (\alpha + 2j+1) \tilde{P}_{ij}^{-n+1} + j(\alpha + j) \tilde{P}_{ij-1}^{-n+1} - j(\alpha + j) \tilde{P}_{ij-1}^{-n} \right), \quad \beta = 1. \end{array} \right\} \quad n > 0$$

Начальные условия  $\tilde{P}_{i0}^{-1}$  и  $\tilde{P}_{i0}^{-n}$  вычисляются по определениям (36) и (39) соответственно.

В качестве примера рассмотрим ненормированную спектральную характеристику оператора интегрирования первого порядка ( $n = 1$ ):

$$\tilde{P}_{i0}^{-1} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) \left( \int_0^x F_0(\xi) d\xi \right) dx = \int_0^{+\infty} x^{\alpha\beta} e^{-\beta x} x^\mu e^{-\delta x} \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} C_i^k (\alpha + i)^{[i-k]} x^k \left( \int_0^x \xi^\mu e^{-\delta \xi} d\xi \right) dx.$$

Преобразуем интеграл  $\int_0^x \xi^\mu e^{-\delta \xi} d\xi$  с помощью замены переменных:  $t = \delta \xi$ , тогда

$$\int_0^x \xi^\mu e^{-\delta \xi} d\xi = \frac{1}{\delta^{\mu+1}} \int_0^{\delta x} t^\mu e^{-t} dt = \frac{1}{\delta^{\mu+1}} \gamma(\mu + 1, \delta x),$$

где  $\gamma(\alpha, x)$  – неполная гамма-функция:  $\gamma(\alpha, x) = \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$ , т.е.

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{i0}^{-1} &= \frac{1}{\delta^{\mu+1}} \int_0^{+\infty} x^{\alpha\beta+\mu} e^{-(\beta+\delta)x} \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} C_i^k (\alpha + i)^{[i-k]} x^k \gamma(\mu + 1, \delta x) dx = \frac{1}{\delta^{\mu+1}} \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} C_i^k (\alpha + i)^{[i-k]} \times \\ &\times \int_0^{+\infty} x^{\eta+k} e^{-\lambda x} \gamma(\mu + 1, \delta x) dx = \frac{1}{\mu + 1} \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} C_i^k (\alpha + i)^{[i-k]} \Gamma(\alpha + k + 2) {}_2F_1(1, \alpha + k + 2, \mu + 2, \delta) = \\ &= \frac{(\alpha + i)^{[i]} \Gamma(\alpha + 1)}{\mu + 1} \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} C_i^k (\alpha + k + 1) {}_2F_1(1, \alpha + k + 2, \mu + 2, \delta), \end{aligned}$$

где  ${}_2F_1(\alpha, \beta, \gamma, z)$  – гипергеометрическая функция [1, 10]. Эти формулы используются при  $\delta \neq 0$  (т.е. при  $\beta < 1$ ), в противном случае вычислять начальные условия нет необходимости.

При  $\beta < 1$  в ряде частных случаев начальные условия можно найти проще (в том числе и при  $n > 1$ ), а именно если  $\alpha = 0$ , то  $F_0(x) = e^{-\delta x}$  и  $\int_0^x F_0(\xi) d\xi = \int_0^x e^{-\delta \xi} d\xi = \frac{1}{\delta} - \frac{e^{-\delta x}}{\delta}$ , поэтому

$$\tilde{P}_{i0}^{-1} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) \left( \frac{1}{\delta} - \frac{e^{-\delta x}}{\delta} \right) dx = \frac{1}{\delta} \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) dx - \frac{1}{\delta} \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) F_0(x) dx.$$

Первое слагаемое в правой части последнего соотношения вычисляется с использованием формулы (21) при  $\alpha = \eta = 0$ :

$$\int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) dx = i! \sum_{k=0}^i \frac{(-1)^{i+k} C_i^k}{\lambda^{k+1}} = \frac{i!}{\lambda} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right)^i,$$

следовательно,

$$\tilde{P}_{i0}^{-1} = \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) \left( \frac{1}{\delta} - \frac{e^{-\delta x}}{\delta} \right) dx = \frac{1}{\delta} \left( \frac{i!}{\lambda} \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right)^i - \Delta_{i0} \right).$$

При  $n > 1$  имеем

$$\int_0^x \int_0^{\xi_1} \dots \int_0^{\xi_{n-1}} F_0(\xi_n) d\xi_n \dots d\xi_2 d\xi_1 = \int_0^x \int_0^{\xi_1} \dots \int_0^{\xi_{n-1}} e^{-\delta \xi_n} d\xi_n \dots d\xi_2 d\xi_1 = \frac{(-1)^n e^{-\delta x}}{\delta^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} x^k}{\delta^{n-k} k!},$$

а далее, принимая во внимание результаты примера 2 (см. (19)–(21)), получаем

$$\tilde{P}_{i0}^{-n} = \frac{(-1)^n}{\delta^n} \Delta_{i0} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{\delta^{n-k} k!} \tilde{z}_i^k.$$

Если  $\alpha \neq 0$ , но  $\mu$  является целым, то целесообразно воспользоваться следующим соотношением [1]:  $\int_0^x \xi^\mu e^{-\delta \xi} d\xi = \frac{\mu!}{\delta^{\mu+1}} - \frac{e^{-\delta x}}{\delta} \sum_{l=0}^{\mu} \frac{\mu^{[l]}}{\delta^l} x^{\mu-l}$ . Тогда, например, при  $n = 1$  получаем

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{i0}^{-1} &= \int_0^{+\infty} \rho^\beta(x) F_i(x) \left( \int_0^x F_0(\xi) d\xi \right) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} x^{\alpha\beta} e^{-\beta x} x^\mu e^{-\delta x} \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} C_i^k (\alpha+i)^{[i-k]} x^k \left( \frac{\mu!}{\delta^{\mu+1}} - \frac{e^{-\delta x}}{\delta} \sum_{l=0}^{\mu} \frac{\mu^{[l]}}{\delta^l} x^{\mu-l} \right) dx = \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} C_i^k (\alpha+i)^{[i-k]} \left( \frac{\mu!}{\delta^\mu} \int_0^{+\infty} x^{\alpha\beta+\mu+k} e^{-(\beta+\delta)x} dx - \sum_{l=0}^{\mu} \frac{\mu^{[l]}}{\delta^l} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+k-l} e^{-x} dx \right) = \\ &= \frac{1}{\delta} \sum_{k=0}^i (-1)^{i+k} C_i^k (\alpha+i)^{[i-k]} \left( \frac{\mu!}{\delta^\mu} \frac{\Gamma(\eta+k+1)}{\lambda^{\eta+k+1}} - \sum_{l=0}^{\mu} \frac{\mu^{[l]}}{\delta^l} \Gamma(\alpha+k-l+1) \right). \end{aligned}$$

Помимо приведенных соотношений можно дополнительно использовать свойства спектральных характеристик операторов интегрирования, определенных относительно нормированных обобщенных функций Лагерра. Так, матрица  $P^{-1}$  является нижней треугольной при  $\alpha = 0$ . Например, при  $\beta = \frac{1}{3}$  получаем

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{9}{4} & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{9}{8} & \frac{9}{4} & \frac{3}{2} & 0 & \dots \\ \frac{9}{16} & \frac{9}{8} & \frac{9}{4} & \frac{3}{2} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

При  $\alpha = 0$  и  $\beta = 1$   $P^{-1}$  представляет собой bidiagonalную матрицу [13]:

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix};$$

при  $\alpha \neq 0$  и  $\beta = 1$  ненулевыми элементами матрицы  $P^{-1}$  являются  $P_{ij}^{-1}$  при  $i = j$ ,  $i = j+1$  и  $i = 0$ .

*Пример 5.* Рассмотрим задачу приближенного представления функции распределения Рэлея  $\Phi(x) = \int_0^x y(\xi) d\xi$ , где  $y(\xi)$  – соответствующая плотность вероятности (см. пример 1), в виде частичной суммы ряда по нормированным обобщенным функциям Лагерра.

Для решения этой задачи будем использовать свойства спектрального преобразования операторов интегрирования [9, 17] и результаты, полученные в примере 1.

Поскольку рассматривается задача приближенного представления функции, то  $Y$  – матрица-столбец с конечным числом элементов (напомним, что для точного представления необходимо вычислять всю совокупность коэффициентов разложения  $y_j$ , тогда  $Y$  будет представлять собой матрицу-столбец (28) с бесконечным числом элементов).

Спектральная характеристика функции  $\Phi(x)$  определяется выражением

$$\Phi = P^{-1} \cdot Y = [\varphi_0 \quad \varphi_1 \quad \varphi_2 \quad \dots]^T,$$

где  $\varphi_j$  – коэффициенты разложения этой функции относительно системы нормированных обобщенных функций Лагерра, т.е.

$$\Phi(x) \approx \Phi_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_j f_j(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{i=0}^{N-1} P_{ji}^{-1} y_i \right) f_j(x).$$

Здесь, как и в двух предыдущих примерах, предполагается, что спектральные характеристики  $\Phi$ ,  $P^{-1}$  и  $Y$  определены относительно одной и той же системы функций  $\{f_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  и имеют одинаковые порядки усечения.

Положим  $\alpha = 0$  и найдем функцию  $\Phi_N(x)$  при различных  $N$  и  $\beta$ . Погрешность аппроксимации функции  $\Phi(x)$  функцией  $\Phi_N(x)$  будем вычислять только по критерию  $J_1$  (см. (16)), так как функция распределения не является элементом пространства  $L_2([0, +\infty))$  и, следовательно, вычислять значения критерия  $J_2$  не имеет смысла. Кроме того, нетрудно показать, что  $|\Phi(x) - \Phi_N(x)| \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow +\infty$  и  $\beta < 1$ ,  $|\Phi(x) - \Phi_N(x)|$  неограниченно возрастает при  $x \rightarrow +\infty$  и  $\beta = 1$ , поэтому значения критерия  $J_3$  также не вычисляются. Результаты расчетов приведены на рис. 17–20 и в таблице 5.

### Применение обобщенных функций Лагерра

#### для анализа линейных детерминированных систем управления

Напомним постановку задачи анализа выходных процессов линейных детерминированных систем [5]. Пусть модель системы управления описывается дифференциальным уравнением

$$a_n(x)u^{(n)}(x) + \dots + a_1(x)u'(x) + a_0(x)u(x) = g(x), \quad (40)$$

в котором  $g(x)$  – входной сигнал,  $u(x)$  – выходной сигнал,  $a_n(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$  – заданные функции,  $x$  – независимая переменная (время).

Задача анализа состоит в нахождении выходного сигнала  $u(x)$  по уравнению системы, заданным входному сигналу  $g(x)$  и начальным условиям

$$u(0) = \hat{u}_0, \quad u'(0) = \hat{u}'_0, \quad \dots, \quad u^{(n-1)}(0) = \hat{u}_0^{(n-1)}.$$

При нулевых начальных условиях ( $\hat{u}_0 = \hat{u}'_0 = \dots = \hat{u}_0^{(n-1)} = 0$ ) спектральная характеристика  $U$  выходного сигнала  $u(x)$  определяется выражением [5, 15–17]

$$U = W \cdot G = [u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots]^T, \quad (41)$$

в котором  $G$  – спектральная характеристика входного сигнала  $g(x)$ , а  $W$  – двумерная нестационарная передаточная функция:

$$W = P^{-n}(A_n + \dots + A_1 P^{-n+1} + A_0 P^{-n})^{-1},$$

где  $P^{-1}, \dots, P^{-n+1}, P^{-n}$  – спектральные характеристики операторов интегрирования, а  $A_n, \dots, A_1, A_0$  – спектральные характеристики операторов умножения на функции  $a_n(x), \dots, a_1(x), a_0(x)$  соответственно (все перечисленные спектральные характеристики определены относительно одной и той же базисной системы).

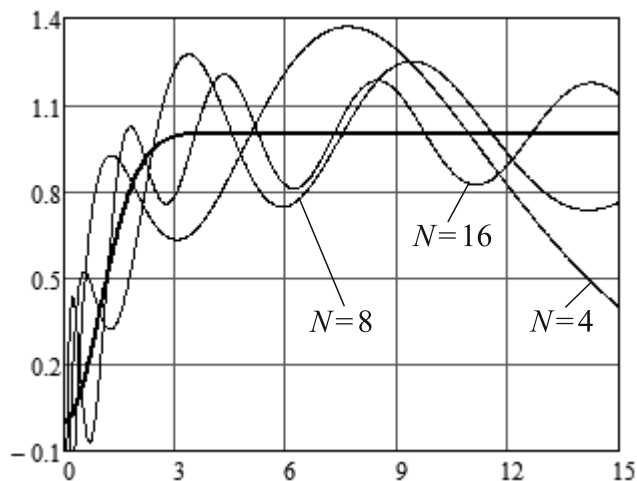


Рис. 17. Графики функций  $\Phi(x)$  и  $\Phi_N(x)$  при  $\beta = 0$  и различных значениях  $N$

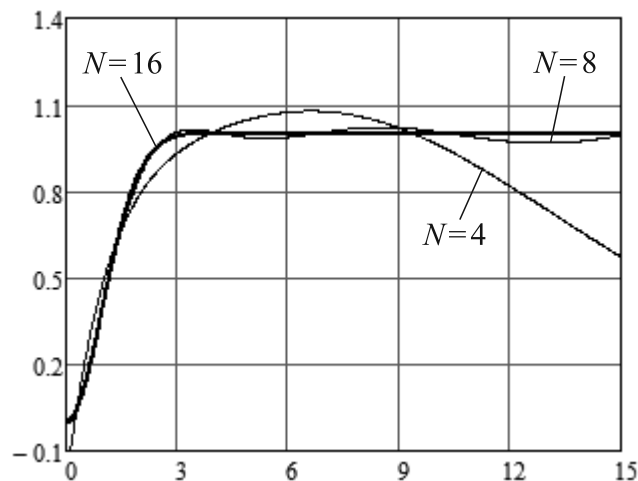


Рис. 18. Графики функций  $\Phi(x)$  и  $\Phi_N(x)$  при  $\beta = \frac{1}{3}$  и различных значениях  $N$

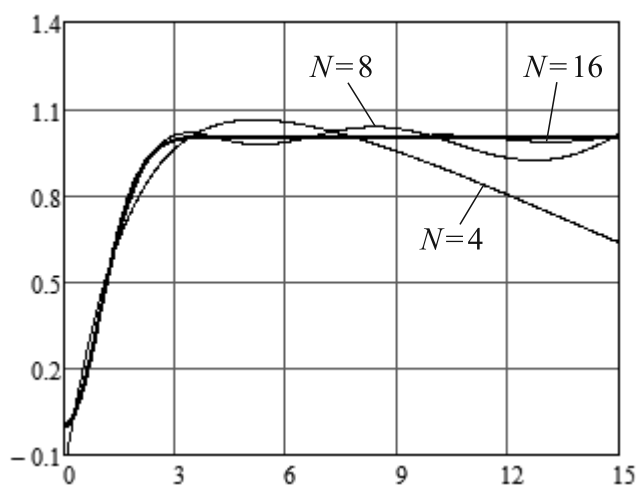


Рис. 19. Графики функций  $\Phi(x)$  и  $\Phi_N(x)$  при  $\beta = \frac{1}{2}$  и различных значениях  $N$

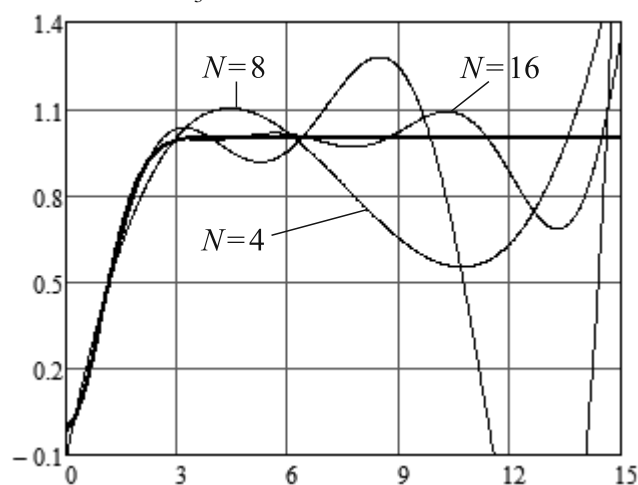


Рис. 20. Графики функций  $\Phi(x)$  и  $\Phi_N(x)$  при  $\beta = 1$  и различных значениях  $N$

Таблица 5

Погрешности аппроксимации функции  $\Phi(x)$  при различных  $\beta$  и  $N$

	$\beta = 0$	$\beta = \frac{1}{3}$	$\beta = \frac{1}{2}$	$\beta = 1$
$N = 4$	–	0.164650	0.090693	0.054763
$N = 8$	–	0.026696	0.020517	0.020737
$N = 16$	–	0.003029	0.003038	0.002892



В общем случае при ненулевых начальных условиях и правой части уравнения (40) вида  $b_m(x)g^{(m)}(x) + \dots + b_1(x)g'(x) + b_0(x)g(x)$ , где  $b_m(x), \dots, b_1(x), b_0(x)$  – заданные функции, алгоритм решения задачи анализа незначительно модифицируется [5, 15, 16]. Возможна и другая форма записи для характеристики  $W$ , выражающая ее через спектральные характеристики операторов дифференцирования  $\mathcal{P}, \mathcal{P}^2, \dots, \mathcal{P}^n$ .

Выходной сигнал определяется коэффициентами разложения  $u_j$  (при усечении спектральных характеристик выходной сигнал определяется приближенно).

*Пример 6.* Рассмотрим задачу анализа линейной стационарной детерминированной системы, которая описывается дифференциальным уравнением второго порядка (колебательным звеном [5])

$$T^2 u''(x) + 2\xi T u'(x) + u(x) = g(x) \quad (42)$$

при нулевых начальных условиях и входном сигнале  $g(x) = 1$  (здесь  $T > 0$  и  $|\xi| < 1$  – числовые параметры).

Запишем выражение для спектральной характеристики входного сигнала:

$$G = [g_0 \quad g_1 \quad g_2 \quad \dots]^T,$$

где  $g_j = z_j^0$  (см. пример 2).

Двумерная нестационарная передаточная функция линейной системы (42) имеет вид

$$W = P^{-2}(A_2 + A_1 P^{-1} + A_0 P^{-2})^{-1},$$

где  $P^{-1}$  и  $P^{-2}$  – спектральные характеристики операторов интегрирования, а  $A_2, A_1$  и  $A_0$  – спектральные характеристики операторов умножения на функции  $a_2(x) = T^2$ ,  $a_1(x) = 2\xi T$  и  $a_0(x) = 1$  соответственно. Согласно свойствам спектральных характеристик операторов умножения  $A_2 = T^2 E$ ,  $A_1 = 2\xi T E$  и  $A_0 = E$ , где  $E$  – бесконечная единичная матрица [6, 9].

Спектральная характеристика  $U$  выходного сигнала  $u(x)$  определяется формулой (41), а приближенное решение задачи анализа – соотношением

$$u(x) \approx u_N(x) = \sum_{j=0}^{N-1} u_j f_j(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left( \sum_{i=0}^{N-1} W_{ji} g_i \right) f_j(x).$$

Пусть, как и в предыдущих примерах,  $\alpha = 0$ . Зададим параметры системы управления:  $T = \frac{3}{4}$ ,  $\xi = \frac{1}{4}$ , и найдем функцию  $u_N(x)$  при различных значениях  $N$  и  $\beta$ . Для вычисления погрешности аппроксимации точного решения

$$u(x) = 1 - e^{-\frac{\xi}{T}x} \cos \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} x - \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\frac{\xi}{T}x} \sin \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T} x$$

функцией  $u_N(x)$  снова воспользуемся критерием  $J_1$  для  $\beta > 0$  (см. (16) и пример 5). Результаты расчетов приведены на рис. 21–24 и в таблице 6.

### Заключение

Основным итогом являются полученные алгоритмы расчета спектральных характеристик операторов умножения, дифференцирования и интегрирования (двумерных нестационарных передаточных функций элементарных звеньев систем управления: усилительного, дифференцирующего и интегрирующего) в базисе обобщенных функций Лагерра, необходимые при

решении задач анализа и синтеза линейных и нелинейных систем управления в спектральной форме математического описания. Разработанные алгоритмы расчета спектральных характеристик апробированы на примерах представления функций, их производных и первообразных, примере анализа линейной детерминированной системы управления второго порядка.

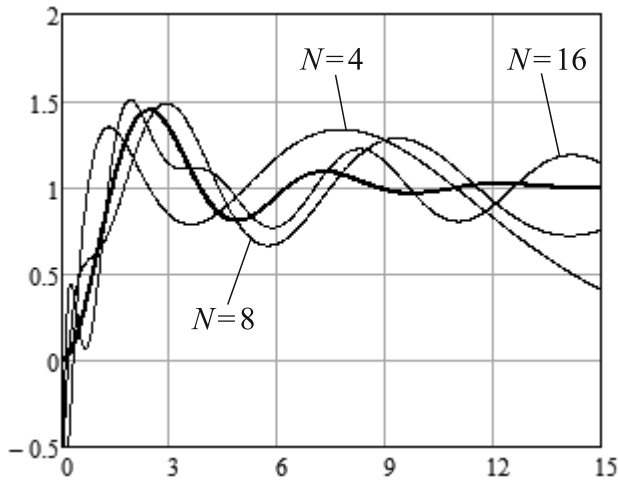


Рис. 21. Графики функций  $u(x)$  и  $u_N(x)$  при  $\beta = 0$  и различных значениях  $N$

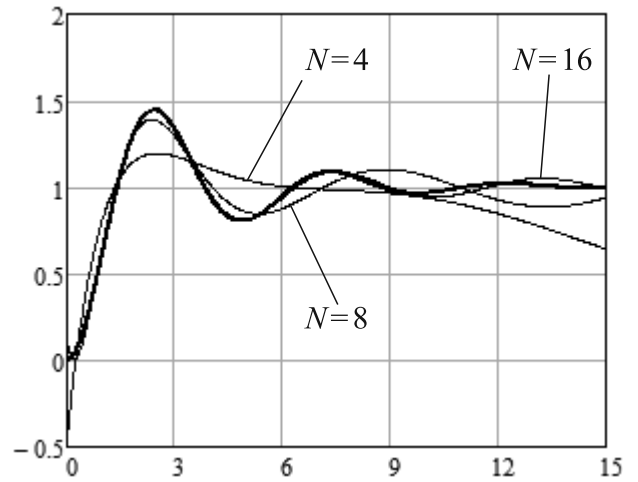


Рис. 22. Графики функций  $u(x)$  и  $u_N(x)$  при  $\beta = \frac{1}{3}$  и различных значениях  $N$

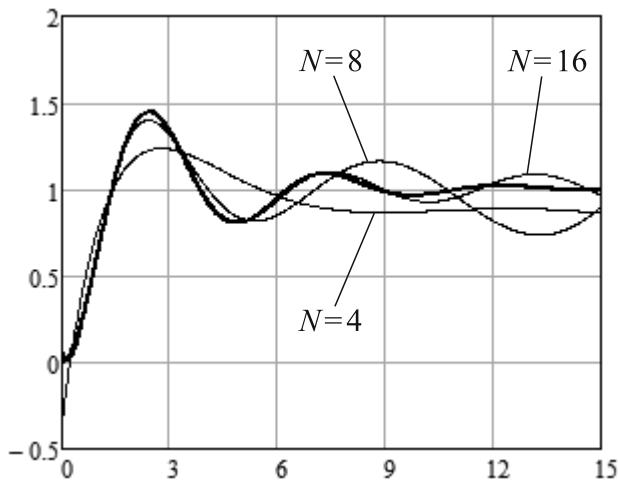


Рис. 23. Графики функций  $u(x)$  и  $u_N(x)$  при  $\beta = \frac{1}{2}$  и различных значениях  $N$

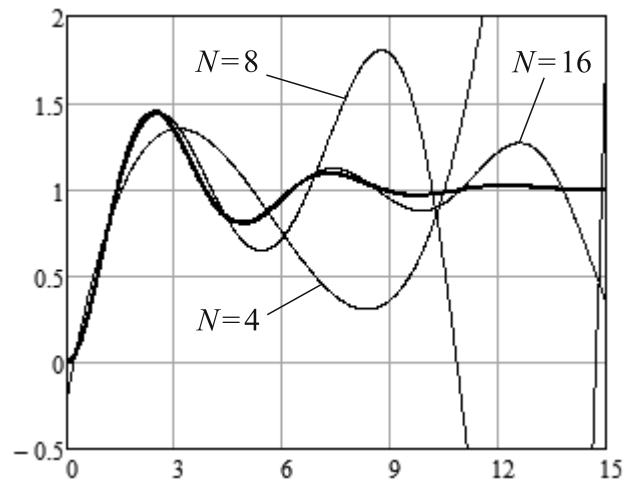


Рис. 24. Графики функций  $u(x)$  и  $u_N(x)$  при  $\beta = 1$  и различных значениях  $N$

Таблица 6

Погрешности аппроксимации функции  $u(x)$  при различных  $\beta$  и  $N$

	$\beta = 0$	$\beta = \frac{1}{3}$	$\beta = \frac{1}{2}$	$\beta = 1$
$N = 4$	–	0.311172	0.224303	0.117286
$N = 8$	–	0.092800	0.062648	0.035703
$N = 16$	–	0.014978	0.009770	0.002687

Полученные результаты могут послужить основой для расчета спектральных характеристик относительно ортонормированных функций, построенных на базе обобщенных функций Лагерра:

$$F_j^{\alpha, \beta, m, D}(x) = F_j^{\alpha, \beta} \left( \frac{x-m}{D} \right), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \text{ с дополнительными параметрами } m \text{ и } D > 0.$$

Они ортогональны на множестве  $[m, +\infty)$  с весовой функцией  $\rho^\beta \left( \frac{x-m}{D} \right)$ . Введение дополнительных параметров позволяет, во-первых, решать задачу представления функций на множествах вида  $[m, +\infty)$ , во-вторых, в ряде случаев ограничиваться меньшим числом первых членов в разложении функции при незначительном изменении погрешности аппроксимации (при соответствующем подборе параметра  $D$ ). При  $D < 0$  указанные функции ортогональны на множестве  $(-\infty, m]$ .

### Список литературы

1. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.
2. Джексон Д. Ряды Фурье и ортогональные полиномы. – М.: ГИИЛ, 1948. – 260 с.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 544 с.
4. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: Физматгиз, 1960. – 471 с.
5. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С. Теория управления в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2003. – 583 с.
6. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010. – 160 с.
7. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций // Автоматика и телемеханика. – 2011, № 2. – С. 183–194.
8. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Синтез оптимальных нелинейных стохастических систем управления спектральным методом // Информатика и ее применения. – 2011, т. 5, вып. 2. – С. 69–81.
9. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006. – 392 с.
10. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 632 с.; Т. 2. Специальные функции. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 664 с.
11. Романов В.А., Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2010, № 39. – <http://www.mai.ru>.
12. Рыбаков К.А. Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2005, № 18. – <http://www.mai.ru>.
13. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004, № 16. – <http://www.mai.ru>.
14. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. О применении спектральной формы математического описания к идентификации систем управления космическими аппаратами // Вестник Московского авиационного института. – 2010, т. 17, № 3. – С. 226–229.

15. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. – М.: Изд-во МАИ, 2011. – 220 с.
16. Семенов В.В., Рыбин В.В. Алгоритмическое и программное обеспечение расчета нестационарных непрерывно-дискретных систем управления ЛА спектральным методом. – М.: МАИ, 1984. – 84 с.
17. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
18. Суетин П.К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1979. – 416 с.