

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ  
И

ПРОЦЕССЫ УПРАВЛЕНИЯ

№ 3, 2012

Электронный журнал,  
рег. Эл. № ФС77-39410 от 15.04.2010

ISSN 1817-2172

<http://www.math.spbu.ru/diffjournal>

e-mail: [jodiff@mail.ru](mailto:jodiff@mail.ru)

Фильтрация и идентификация

## Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий

К. А. Рыбаков

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
кафедра «Математическая кибернетика»,  
[rkoffice@mail.ru](mailto:rkoffice@mail.ru)

**Аннотация.** Предлагаются алгоритмы решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации методом статистических испытаний. В основе алгоритмов лежит переход от задачи фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий. Решение такой задачи анализа можно найти приближенно, используя методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков.

**Ключевые слова:** апостериорная плотность вероятности, ветвящиеся процессы, метод статистических испытаний, оптимальная фильтрация, стохастическая система, уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи.

### Введение

Задача оценивания вектора состояния является одной из основных задач теории стохастических систем управления. Связано это с тем, что координаты вектора состояния (параметры объекта управления), как правило, могут быть измерены лишь косвенно и со случайными ошибками, поэтому возникает задача приближенного восстановления вектора состояния по результатам измерений, т.е. задача оценивания текущего состояния, или задача фильтрации. Задача оптимального оценивания, или задача оптимальной фильтрации, состоит в восстановлении вектора состояния по результатам измерений в соответствии с заданным критерием оптимальности, например, критерием минимума среднеквадратической ошибки оценивания [12, 14, 19, 21, 32, 34, 39].

Существуют различные методы решения задачи оптимальной фильтрации для нелинейных систем. Перечислим основные из них. В основе ряда методов лежит приближенное

решение уравнений оптимальной нелинейной фильтрации: Стратоновича–Кушнера или Дункана–Мортенсена–Закаи — стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. Как правило, задача нахождения апостериорной плотности вероятности сводится к нахождению вероятностных характеристик апостериорного распределения (методы моментов, квазимоментов, семиинвариантов [14, 17, 21, 32], спектральные методы [14, 32, 36] и т.п.). Сюда же можно отнести численные методы решения (экономичные численные методы решения робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи [35, 42]), конечно-разностные и конечно-элементные методы, метод Галеркина [21, 26, 34, 41]). Другие методы характеризуются упрощением исходных моделей объекта наблюдения и измерительной системы, например, с помощью линеаризации или представления функций, входящих в уравнения этих моделей (коэффициентов сноса и диффузии), в виде конечных отрезков рядов Тейлора (обобщенный фильтр Калмана [14, 39], субоптимальные фильтры Стратоновича [23] и др. [6, 19, 32]). При этом дополнительно может задаваться вид апостериорной плотности вероятности (гауссовская и полигауссовская аппроксимация, эллипсоидальная аппроксимация [12, 14, 17, 28]). Далее следуют методы, в которых задается структура уравнений фильтра, содержащих ряд параметров, и проводится оптимизация этих параметров согласно заданному критерию оптимальности фильтра (условно оптимальные фильтры Пугачева [14, 17]), конечномерные фильтры оптимальной структуры [12, 15]. Отдельно следует выделить методы, которые можно охарактеризовать как метаэвристические, например, методы Монте-Карло с ресемплированием или фильтры частиц (*particle filters*) — методы, основанные на моделировании ансамблей взаимодействующих частиц [26–28, 30, 39].

Приведенная классификация не претендует на полноту и затрагивает, разумеется, не все методы решения задачи фильтрации (см., например, [7, 10, 19, 23–28, 32, 39]).

В представленной работе предлагается решать задачу оптимальной нелинейной фильтрации как задачу анализа стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий [16]. Решение такой задачи анализа можно найти приближенно, используя методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков [1, 2, 5, 9, 12, 33]. При использовании критерия минимума среднеквадратической ошибки оптимальная оценка может быть получена в результате усреднения по пучку траекторий системы, отличающейся от исходного объекта наблюдения только тем, что ее траектории обрываются и разветвляются в случайные моменты времени, распределение которых определяется результатами измерений оцениваемого вектора состояния. По результатам моделирования траекторий системы с обрывами и ветвлениями можно оценить апостериорную плотность вероятности (при фиксированных измерениях).

По сравнению со многими перечисленными выше методами решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации в предлагаемом подходе нет упрощения функций, входящих в уравнения моделей объекта наблюдения и измерительной системы, не накладываются ограничения на вид апостериорной плотности вероятности или структуру уравнений фильтра. Наиболее близкий из перечисленных методов — фильтр частиц с ветвлениями, базирующийся на методе частиц [27, 28, 30, 38], однако предлагаемый подход основан на интерпретации одного из слагаемых в уравнении Дункана–Мортенсена–Закаи как функции поглощения и восстановления траекторий [4, 13, 22]. Как было указано выше, моменты обрывов и ветвлений траекторий определяются по результатам измерений оцениваемого вектора состояния и, в отличие от фильтра частиц, траектории не «взаимодействуют» между собой; моменты обрывов и ветвлений связаны с сеткой, которая задается для численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений, описывающих объект

наблюдения и измерительную систему, следующим образом: заданная сетка для каждой траектории дополняется узлами ветвления в процессе моделирования; обрывы и ветвления траекторий образуют неоднородные пуассоновские потоки событий с интенсивностями, зависящими от текущего измерения; при ветвлении в фиксированный момент времени может появиться только одна новая ветвь.

### Постановка задачи

Будем рассматривать модель объекта наблюдения, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито [12, 14, 21]

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где  $X \in \mathbb{R}^n$  — вектор состояния;  $t \in [t_0, T]$ ,  $[t_0, T]$  — отрезок времени функционирования;  $f(t, x): [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — вектор-функция размеров  $n \times 1$ ,  $\sigma(t, x): [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$  — матричная функция размеров  $n \times s$ ;  $W(t)$  —  $s$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния  $X_0$ , заданного плотностью вероятности  $\varphi_0(x)$ .

Модель измерительной системы также записывается в форме стохастического дифференциального уравнения:

$$dY(t) = c(t, X(t))dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \quad (2)$$

в котором  $Y \in \mathbb{R}^m$  — вектор измерений;  $c(t, x): [t_0, T] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — вектор-функция размеров  $m \times 1$ ,  $\zeta(t): [t_0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$  — матричная функция размеров  $m \times d$ ;  $V(t)$  —  $d$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от  $W(t)$  и  $X_0$ .

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки  $\hat{X}(t)$  по результатам измерений  $Y_0^t$ , т.е.

$$\hat{X}(t) = \psi(t, Y_0^t),$$

где  $\psi(t, Y_0^t)$  — функция, обеспечивающая в каждый момент времени  $t$  выполнение условия

$$\mathbb{M}[(X(t) - \hat{X}(t))^T (X(t) - \hat{X}(t))] \rightarrow \min_{\psi(t, \cdot)}, \quad (3)$$

а  $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$  — доступные измерения к моменту времени  $t$ . В критерии (3) и далее  $\mathbb{M}$  — знак математического ожидания.

Известно [12, 14, 21], что в этом случае

$$\psi(t, Y_0^t) = \mathbb{M}[X(t)|Y_0^t] = \int_{\mathbb{R}^n} xp(t, x|Y_0^t)dx,$$

где  $p(t, x|Y_0^t)$  — апостериорная плотность вероятности вектора состояния  $X$ .

Заметим, что предлагаемая ниже методика оптимальной фильтрации (оптимального оценивания текущего состояния) не исключает других критериев, отличных от (3).

Поскольку в статье не рассматриваются вопросы, связанные с существованием решений и сходимостью, никаких формальных ограничений на функции, входящие в уравнения (1) и (2), а также начальное состояние не наложено. Разработанный алгоритм оценивания предполагает использование методов численного интегрирования стохастических дифференциальных уравнений и методов моделирования неоднородных пуассоновских потоков, поэтому условия существования решения поставленной задачи (см., например, [6, 24, 34]) необходимо дополнить условиями применимости конкретных численных методов.

### Уравнения для апостериорной плотности вероятности

Определим матрицы  $g(t, x)$  размеров  $n \times n$  и  $\eta(t)$  размеров  $m \times m$ :

$$g(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^T(t, x), \quad \eta(t) = \zeta(t)\zeta^T(t),$$

т.е.

$$g_{ij}(t, x) = \sum_{l=1}^s \sigma_{il}(t, x)\sigma_{jl}(t, x), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\eta_{kr}(t) = \sum_{l=1}^d \zeta_{kl}(t)\zeta_{rl}(t), \quad k, r = 1, 2, \dots, m,$$

и, кроме того,

$$q(t) = \eta^{-1}(t) \quad (\det \eta(t) \neq 0).$$

Ненормированная апостериорная плотность вероятности  $\varphi(t, x|Y_0^t)$  вектора состояния  $X$  удовлетворяет уравнению Дункана – Мортенсена – Закаи [12, 21]. В форме Стратоновича оно имеет вид

$$\frac{d_{\frac{1}{2}}\varphi(t, x|Y_0^t)}{dt} = \mathcal{A}\varphi(t, x|Y_0^t) + \mathcal{F}_{Y(t)}\varphi(t, x|Y_0^t), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad (4)$$

где  $\mathcal{A}$  — линейный оператор (оператор Фоккера – Планка – Колмогорова), задаваемый выражением

$$\mathcal{A}\varphi(t, x|Y_0^t) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x|Y_0^t)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x|Y_0^t)], \quad (5)$$

а  $\mathcal{F}_{Y(t)}$  — случайный линейный оператор:

$$\mathcal{F}_{Y(t)}\varphi(t, x|Y_0^t) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m c_k(t, x)q_{kr}(t) \left( \frac{dY_r(t)}{dt} - \frac{1}{2}c_r(t, x) \right) \varphi(t, x|Y_0^t), \quad (6)$$

или

$$\mathcal{F}_{Y(t)}\varphi(t, x|Y_0^t) = \lambda(t, x, Z(t))\varphi(t, x|Y_0^t),$$

где

$$\lambda(t, x, Z(t)) = \sum_{k=1}^m \sum_{r=1}^m c_k(t, x)q_{kr}(t) \left( Z_r(t) - \frac{1}{2}c_r(t, x) \right), \quad (7)$$

$$Z_r(t) = \frac{dY_r(t)}{dt} \quad \left( Z(t) = \frac{dY(t)}{dt} \right),$$

а случайный процесс  $Z(t)$  удовлетворяет уравнению

$$Z(t) = c(t, X(t)) + \zeta(t)N(t), \quad (8)$$

в котором  $N(t)$  —  $d$ -мерный стандартный гауссовский белый шум [12, 14, 21].

Уравнение (8) эквивалентно уравнению (2) и задачу оптимальной фильтрации можно переформулировать в терминах измерений  $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$ .

Далее будем предполагать, что измерения  $Y_0^t$ , или  $Z_0^t$ , фиксированы, в этом случае стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных (4) можно рассматривать как детерминированное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial \varphi(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) + \lambda(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t).$$

Это уравнение, если представить функцию  $\lambda(t, x, z)$  в виде

$$\lambda(t, x, z) = -\lambda^-(t, x, z) + \lambda^+(t, x, z),$$

где

$$\lambda^-(t, x, z) = \begin{cases} -\lambda(t, x, z), & \lambda(t, x, z) < 0, \\ 0, & \lambda(t, x, z) \geq 0, \end{cases} \quad \lambda^+(t, x, z) = \begin{cases} \lambda(t, x, z), & \lambda(t, x, z) > 0, \\ 0, & \lambda(t, x, z) \leq 0, \end{cases}$$

по структуре будет аналогично обобщенному уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова или уравнению Колмогорова – Феллера [4, 13, 22]. Тогда в уравнении

$$\frac{\partial \varphi(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda^-(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t) + \lambda^+(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t) \quad (9)$$

слагаемые  $\lambda^-(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t)$  и  $\lambda^+(t, x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t)$  характеризуют обрывы и ветвления траекторий процесса  $X(t)$ , а именно функция  $\lambda^-(t, x, z)$  — интенсивность обрыва траекторий (интенсивность «убивания» процесса  $X(t)$  [11]), при этом вероятность  $\mathbb{P}^-(t, \Delta t)$  обрыва траектории на промежутке времени  $[t, t + \Delta t]$  при  $X(t) = x$  и  $Z(t) = z$  удовлетворяет соотношению

$$\mathbb{P}^-(t, \Delta t) = \lambda^-(t, x, z)\Delta t + o(\Delta t).$$

Функция  $\lambda^+(t, x, z)$  — интенсивность ветвления траекторий, вероятность  $\mathbb{P}^+(t, \Delta t)$  ветвления траектории при  $X(t) = x$  и  $Z(t) = z$  удовлетворяет аналогичному условию:

$$\mathbb{P}^+(t, \Delta t) = \lambda^+(t, x, z)\Delta t + o(\Delta t).$$

Уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи не обладает свойством сохранения вероятности в отличие от уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова или Колмогорова – Феллера, его решение — функция  $\varphi(t, x | Y_0^t)$  — не нормировано к единице:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x | Y_0^t) dx \neq 1.$$

В частности, это следует из того, что обрывы и ветвления траекторий процесса  $X(t)$  происходят в разные моменты времени, так как если  $\lambda^-(t, x, z) > 0$ , то  $\lambda^+(t, x, z) = 0$ , и если  $\lambda^+(t, x, z) > 0$ , то  $\lambda^-(t, x, z) = 0$ , поэтому для получения апостериорной плотности вероятности  $p(t, x | Y_0^t)$  необходима нормировка:

$$p(t, x | Y_0^t) = \frac{\varphi(t, x | Y_0^t)}{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x | Y_0^t) dx}.$$

Следовательно, функция  $\varphi(t, x | Y_0^t)$  характеризует распределение вектора  $X$  — состояния объекта наблюдения, описываемого уравнением (1), — с учетом того, что часть

траекторий случайного процесса  $X(t)$  обрывается, а часть — разветвляется в случайные моменты времени (см. рис. 1). Обрывы и ветвления траекторий образуют неоднородные пуассоновские потоки событий с интенсивностями  $\lambda^-(t) = \lambda^-(t, X(t), Z(t))$  и  $\lambda^+(t) = \lambda^+(t, X(t), Z(t))$  соответственно, фактически процесс  $Z(t)$  управляет временем появления обрывов и ветвлений (см. рис. 2). При ветвлении, в отличие от общего случая [18, 31], в фиксированный момент времени может появиться только одна новая ветвь. Каждая из новых ветвей рассматривается как самостоятельная траектория (см. рис. 3), при обрыве прекращается моделирование только одной ветви.

Вообще говоря, с учетом обрывов и ветвлений необходимо уточнение понятия «вектор состояния», однако для дальнейшего изложения это не принципиально, поскольку при нахождении  $\hat{X}(t)$  требуется усреднение или оценивание плотности вероятности по пучку траекторий и такой интерпретации ветвящегося процесса, когда каждая новая ветвь рассматривается как самостоятельная траектория, оказывается достаточно.

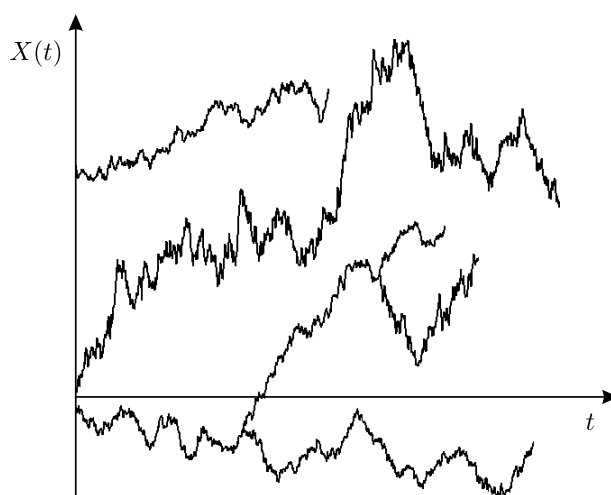


Рис. 1. Примеры траекторий скалярного случайного процесса  $X(t)$  с обрывами и ветвлениями.

### Приближенный метод оптимального оценивания

Для приближенного определения оптимальной оценки  $\hat{X}(t)$  предлагается использовать метод статистических испытаний (метод Монте-Карло), т.е. моделирование вспомогательных траекторий случайного процесса  $X(t)$  с учетом обрывов и ветвлений при фиксированных измерениях  $Y_0^t$ , или  $Z_0^t$ . При этом можно применять известные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков [1, 2, 5, 9, 12, 33].

Приведем соотношения стохастического метода Эйлера (метода Эйлера–Маруямы) [5, 12, 33]:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W_k, \\ Y_{k+1} &= Y_k + hc(t_k, X_k) + \sqrt{h}\zeta(t_k)\Delta V_k, \\ t_k &= t_0 + hk, \quad k = 0, 1, \dots, \end{aligned} \tag{10}$$

в которых  $\Delta W_k$  и  $\Delta V_k$  — случайные векторы размеров  $s \times 1$  и  $d \times 1$  соответственно, их

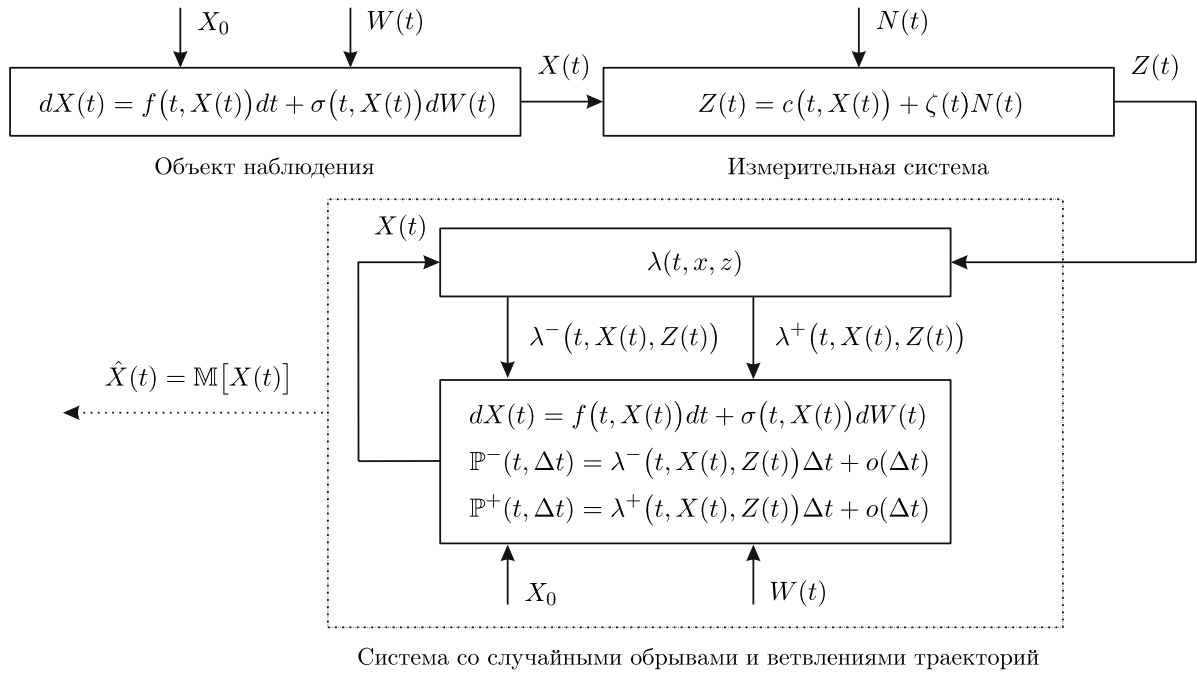


Рис. 2. Структурная схема системы наблюдения и оптимального фильтра.

координаты имеют стандартное нормальное распределение,  $h$  — шаг численного интегрирования.

Для моделирования траекторий процесса  $Z(t)$  используется соотношение

$$Z_k = c(t_k, X_k) + \frac{\zeta(t_k)}{\sqrt{h}} \Delta V_k, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (11)$$

тогда

$$Y_{k+1} = Y_k + hZ_k.$$

Таким образом,

$$X(t_k) \approx X_k, \quad Y(t_k) \approx Y_k, \quad Z(t_k) \approx Z_k.$$

В отличие от (6) и (7) здесь и в соотношениях (10), (11) нижний индекс  $k$  указывает на соответствие векторов  $X_k, Y_k, Z_k, \Delta W_k$  и  $\Delta V_k$  моменту времени  $t_k$  и не является номером координаты вектора.

Для моделирования моментов времени обрывов и ветвлений траекторий используется метод «максимального сечения» [1, 8, 29]: моделирование времени  $\tau$ , через которое произойдет обрыв или ветвление, осуществляется по правилу

$$\tau = \theta_N, \quad N = \min \left\{ \mu: \alpha_\mu \leq \frac{|\lambda(t_* + \theta_\mu)|}{\lambda^*} \right\}, \quad \theta_\mu = \sum_{i=1}^{\mu} \xi^i, \quad (12)$$

где  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^\mu, \dots$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих показательное распределение с параметром  $\lambda^*$ :

$$\xi^i = -\frac{\ln \beta_i}{\lambda^*}, \quad \lambda^*: |\lambda(t)| \leq \lambda^* = \text{const};$$

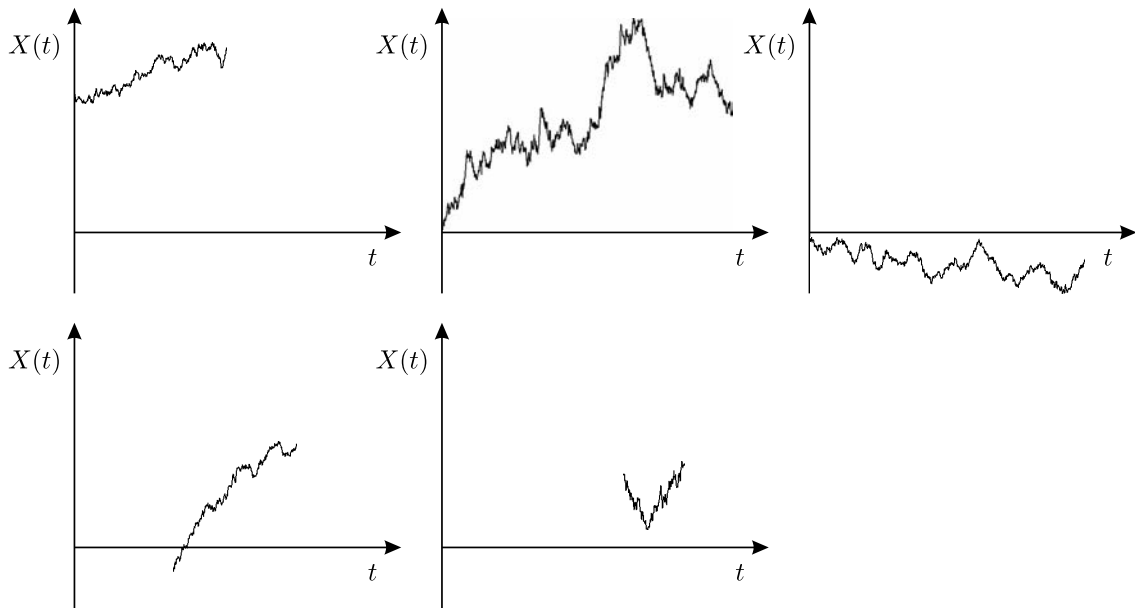


Рис. 3. Примеры траекторий скалярного случайного процесса  $X(t)$  при рассмотрении новых ветвей как самостоятельных траекторий (см. рис. 1).

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\mu, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\mu, \dots$  — последовательности независимых случайных величин, имеющих равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ ;  $\lambda(t)$  — значение функции  $\lambda(t, x, z)$  на вспомогательных траекториях процесса  $X(t)$  и траектории  $Z(t)$ , полученной в результате измерений оцениваемой траектории (измерения  $Y_0^t$  вектора состояния и, следовательно, измерения  $Z_0^t$ , фиксированы), т.е.  $\lambda(t) = \lambda(t, X(t), Z(t))$ ;  $t_*$  — начальный момент времени  $t_0$  или момент времени последнего ветвления траектории. При условии  $\lambda(t_* + \tau) < 0$  происходит обрыв (моделирование такой траектории прекращается), а при  $\lambda(t_* + \tau) > 0$  — ветвление (далее моделируются две траектории, имеющие по крайней мере одну общую точку — точку ветвления).

Условие ограниченности функции  $\lambda(t) = \lambda(t, X(t), Z(t))$  требует дополнительных разъяснений. Переменная  $z = Z(t)$  не является ограниченной и входит в  $\lambda(t, x, z)$  линейно, однако при моделировании конечного числа траекторий  $X(t)$  и  $Z(t)$  функция  $\lambda(t)$  ограничена, поэтому условие  $|\lambda(t)| \leq \lambda^*$  можно считать выполненным при численных расчетах (конечно, если исключить «взрывы» траекторий [11]).

Вместо описанного подхода можно применять более экономичный модифицированный метод «максимального сечения» [1, 9], при использовании которого сокращается число обращений к датчику псевдослучайных чисел. В этом случае

$$N = \min \left\{ \mu : 1 - \alpha > \prod_{i=1}^{\mu} \left( 1 - \frac{|\lambda(t_* + \theta_i)|}{\lambda^*} \right) \right\}, \quad (13)$$

где  $\alpha$  — случайная величина, имеющая равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ .

Важный аспект применяемых методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений состоит в дополнении исходной сетки  $\{t_k\}$  узлами, соответствующими моментам ветвлений траекторий.



**Алгоритм совместного моделирования системы наблюдения  
и оптимального оценивания**

Шаг 1. Задать  $M$  — число моделируемых вспомогательных траекторий;  $h$  — шаг численного интегрирования; величину  $\lambda^*$ . Получить реализации начальных состояний  $X_0$  и  $X_0^i$  согласно заданной плотности вероятности  $\varphi_0(x)$ , где  $X_0$  — начальное состояние для основной траектории (для которой проводятся измерение и оценивание),  $X_0^i$  — для вспомогательных траекторий, по которым приближенно вычисляется оптимальная оценка, и моменты времени  $\xi^i$ , через которые могут произойти обрывы или ветвления траекторий:

$$\xi^i = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Здесь и далее  $\beta$  — различные реализации (для всех  $i$ ) случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ .

Положить  $Y_0 = 0$ ,  $k = 0$ ,  $t_*^i = t_0$ ,  $F_0^i = 1$  (в случае обрыва траектории с номером  $i$  при последующем моделировании  $F_k^i = 0$ ,  $k > 0$ ),  $i = 1, 2, \dots, M$ .

Шаг 2. Положить

$$M_k = \sum_{i=1}^M F_k^i \quad (M_0 = M)$$

и найти оптимальную оценку  $\hat{X}_k$  как выборочное среднее реализаций  $\mathbb{X}_k = \{X_k^i\}_{i=1, \dots, M; F_k^i=1}$ :

$$\hat{X}_k = \frac{1}{M_k} \sum_{\substack{i=1, \dots, M; \\ F_k^i=1}} X_k^i.$$

Проверить условия:

а) если  $0 < T - t_k < h$ , то скорректировать шаг численного интегрирования:

$$h = T - t_k;$$

б) если  $T - t_k = 0$ , то завершить процесс.

Получить реализацию оцениваемого вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$ :

$$X_{k+1} = X_k + hf(t_k, X_k) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k)\Delta W,$$

и получить вектор измерений:

$$Z_k = c(t_k, X_k) + \frac{\zeta(t_k)}{\sqrt{h}}\Delta V, \quad Y_{k+1} = Y_k + hZ_k.$$

В этих формулах и далее  $\Delta W$  и  $\Delta V$  — различные для всех  $k$  и  $i$  (а также для промежуточных расчетов) реализации случайных векторов размеров  $s \times 1$  и  $d \times 1$  соответственно, координаты которых имеют стандартное нормальное распределение.

Положить  $i = 1$ ,  $j = 0$  ( $j$  — количество новых ветвей на шаге  $k$ ).

Шаг 3. Проверить условие  $F_k^i = 0$ . Если оно выполнено, то перейти к последнему шагу, иначе: при  $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$  перейти к шагу 4, а при  $t_*^i + \xi^i < t_k + h$  — к шагу 5.

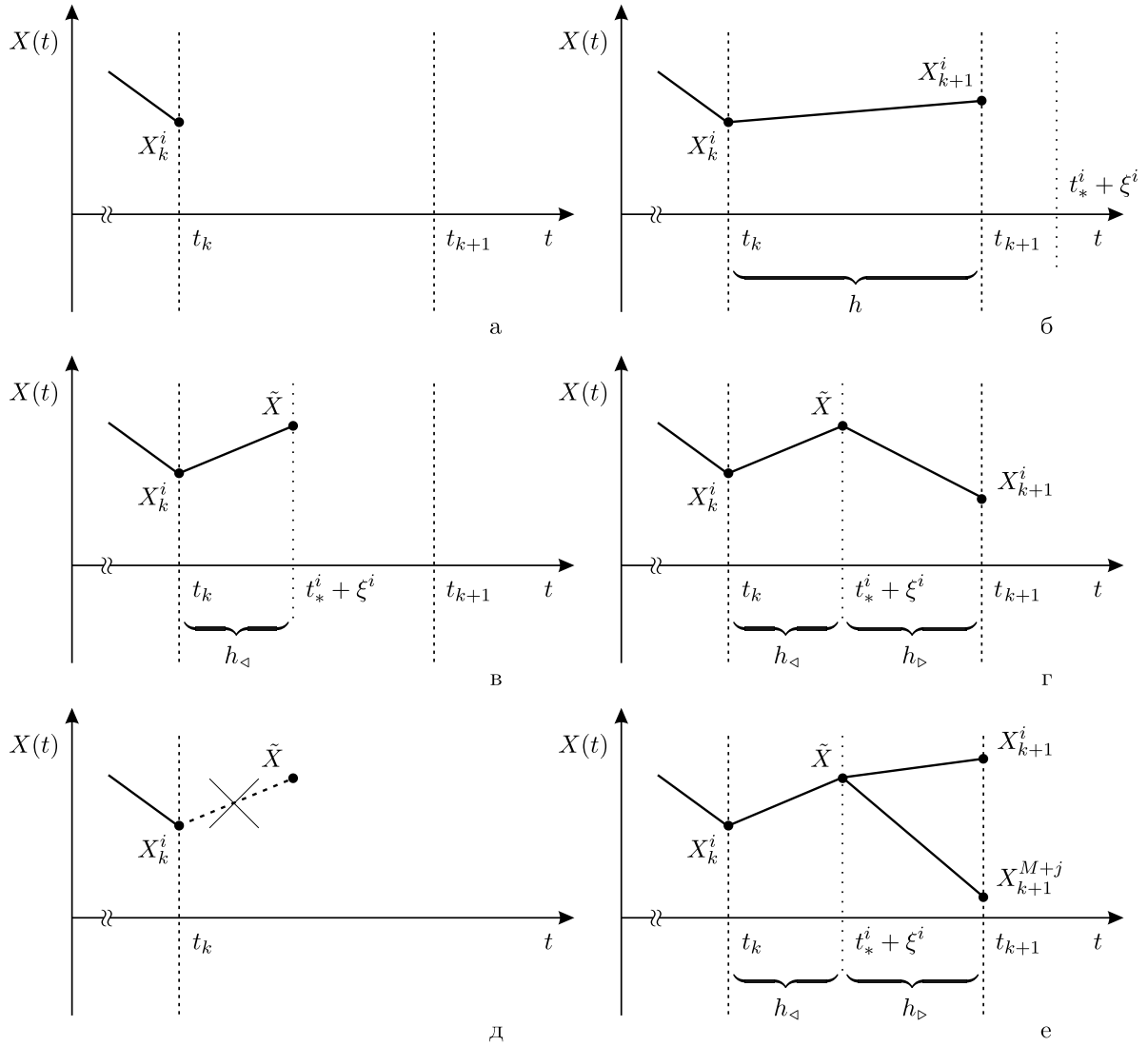


Рис. 4. Примеры моделирования вспомогательных траекторий скалярного случайного процесса  $X(t)$  с обрывами и ветвлениями.

Шаг 4. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$  (см. рис. 4: а  $\rightarrow$  б):

$$X_{k+1}^i = X_k^i + hf(t_k, X_k^i) + \sqrt{h}\sigma(t_k, X_k^i)\Delta W.$$

Положить  $F_{k+1}^i = 1$  и перейти к последнему шагу.

Шаг 5. Получить реализацию вектора состояния в дополнительном узле сетки (см. рис. 4: а  $\rightarrow$  в):

$$\tilde{X} = X_k^i + h_{\triangleleft}f(t_k, X_k^i) + \sqrt{h_{\triangleleft}}\sigma(t_k, X_k^i)\Delta W, \quad h_{\triangleleft} = t_*^i + \xi^i - t_k.$$

Получить реализацию  $\alpha$  случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ . Проверить условие

$$\alpha \leq \frac{|\lambda(t_*^i + \xi^i)|}{\lambda^*},$$

где  $\lambda(t_*^i + \xi^i) = \lambda(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, Z_k)$ , и если оно выполнено, то перейти к шагу 6, иначе — к шагу 7 (см. рис. 4:  $v \rightarrow \Gamma$ ).

Шаг 6. Проверить условия:

а) если  $\lambda(t_*^i + \xi^i) < 0$  ( $\lambda^-(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, Z_k) > 0$ , обрыв траектории, см. рис. 4:  $v \rightarrow \Delta$ ), то положить  $F_{k+1}^i = 0$  (траектория далее не моделируется) и перейти к последнему шагу;

б) если  $\lambda(t_*^i + \xi^i) > 0$  ( $\lambda^+(t_*^i + \xi^i, \tilde{X}, Z_k) > 0$ , ветвление траектории, см. рис. 4:  $v \rightarrow \epsilon$ ), то положить  $j = j + 1$  и получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$  для новой траектории (точнее, «новой ветви» траектории с номером  $i$ , которая далее рассматривается как другая траектория с номером  $M + j$ ):

$$X_{k+1}^{M+j} = \tilde{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) + \sqrt{h_{\triangleright}} \sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) \Delta W, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft} = t_k + h - t_*^i - \xi^i.$$

Положить  $F_{k+1}^{M+j} = 1$  ( $F_r^{M+j} = 0, r = 0, 1, \dots, k$ ),  $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$  и получить реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или новое ветвление:

$$\xi^{M+j} = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*},$$

моделирование  $\xi^{M+j}$  проводится до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$t_*^{M+j} + \xi^{M+j} \geq t_k + h.$$

Шаг 7. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$ :

$$X_{k+1}^i = \tilde{X} + h_{\triangleright} f(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) + \sqrt{h_{\triangleright}} \sigma(t_k + h_{\triangleleft}, \tilde{X}) \Delta W, \quad h_{\triangleright} = h - h_{\triangleleft}.$$

Положить  $F_{k+1}^i = 1$ ,  $t_*^i = t_*^i + \xi^i$  и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или ветвление рассматриваемой траектории:

$$\xi^i = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*},$$

моделирование  $\xi^i$  проводится до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$t_*^i + \xi^i \geq t_k + h.$$

Шаг 8. Проверить условия:

а) если  $i = M$ , то положить  $M = M + j$ ,  $t_{k+1} = t_k + h$ ,  $k = k + 1$  и перейти к шагу 2;

б) если  $i < M$ , то положить  $i = i + 1$  и перейти к шагу 3.

### Замечания.

1. Величину  $\lambda^*$  можно оценить, например, по результатам пробного моделирования траекторий системы наблюдения. Шаг  $h$  численного интегрирования должен быть согласован с величиной  $\lambda^*$ , один из вариантов такого согласования следующий [3]:

$$h \leq \frac{1}{10\lambda^*}. \quad (14)$$

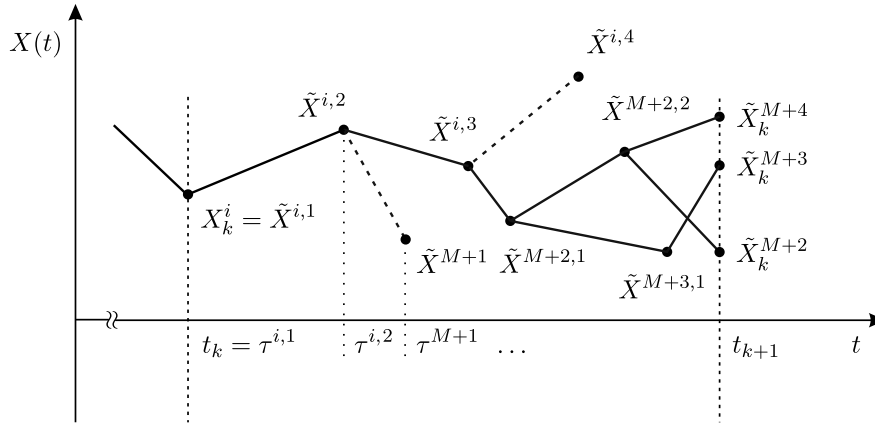


Рис. 5. Пример моделирования вспомогательной траектории скалярного случайного процесса  $X(t)$  с несколькими обрывами и ветвлениями на промежутке  $[t_k, t_{k+1})$ .

Предполагается, что при этом условии появление двух и более событий типа обрыва или ветвления траектории на промежутке  $[t_k, t_{k+1})$  маловероятно. Только тогда распределение величин  $\xi^i$  можно считать показательным. В противном случае алгоритм необходимо усложнить (шаги 1–4 такие же, как и ранее; см. рис. 5):

Шаг 5. Проверить условие  $t_*^i + \xi^i \geq t_k + h$ . Если оно выполнено, то перейти к шагу 9, иначе: положить  $\tilde{X}^i = X_k^i$ ,  $\tau^i = t_k$  и перейти к шагу 6.

Шаг 6. Получить реализацию вектора состояния в дополнительном узле сетки:

$$\tilde{X}^i = \tilde{X}^i + h^i f(\tau^i, \tilde{X}^i) + \sqrt{h^i} \sigma(\tau^i, \tilde{X}^i) \Delta W, \quad h^i = t_*^i + \xi^i - \tau^i.$$

Положить  $\tau^i = \tau^i + h^i$  и получить реализацию  $\alpha$  случайной величины, имеющей равномерное распределение на интервале  $(0, 1)$ . Проверить условие

$$\alpha \leq \frac{|\lambda(\tau^i)|}{\lambda^*},$$

где  $\lambda(\tau^i) = \lambda(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k)$ , и если оно выполнено, то перейти к шагу 7, иначе — к шагу 8.

Шаг 7. Проверить условия:

а) если  $\lambda(\tau^i) < 0$  ( $\lambda^-(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k) > 0$ , обрыв траектории), то положить  $F_{k+1}^i = 0$  (траектория далее не моделируется) и перейти к шагу 10;

б) если  $\lambda(\tau^i) > 0$  ( $\lambda^+(\tau^i, \tilde{X}^i, Z_k) > 0$ , ветвление траектории), то положить  $j = j + 1$ ,  $F_{k+1}^{M+j} = 1$  ( $F_r^{M+j} = 0$ ,  $r = 0, 1, \dots, k$ ),  $t_*^{M+j} = t_*^i + \xi^i$ ,  $\tilde{X}^{M+j} = \tilde{X}^i$ ,  $\tau^{M+j} = \tau^i$  и получить реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или новое ветвление:

$$\xi^{M+j} = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*}.$$

Шаг 8. Положить  $t_*^i = t_*^i + \xi^i$  и получить новую реализацию для промежутка времени, через который может произойти обрыв или ветвление рассматриваемой траектории:

$$\xi^i = -\frac{\ln \beta}{\lambda^*}.$$

Перейти к шагу 5.

Шаг 9. Получить реализацию вектора состояния в следующем узле сетки  $\{t_k\}$ :

$$X_{k+1}^i = \tilde{X}^i + h^i f(\tau^i, \tilde{X}^i) + \sqrt{h^i} \sigma(\tau^i, \tilde{X}^i) \Delta W, \quad h^i = t_k + h - \tau^i.$$

Положить  $F_{k+1}^i = 1$ .

Шаг 10. Проверить условия:

а) если  $i = M + j$ , то положить  $M = M + j$ ,  $t_{k+1} = t_k + h$ ,  $k = k + 1$  и перейти к шагу 2;

б) если  $i < M$ , то положить  $i = i + 1$  и перейти к шагу 3;

в) если  $M \leq i < M + j$  (новые ветви), то положить  $i = i + 1$  и перейти к шагу 5.

Здесь важно отметить, что при решении задачи анализа стохастических систем, допускающих разрывы траекторий или изменение структуры [3], условие (14) — единственное условие, связывающее величины  $h$  и  $\lambda^*$ . При решении задачи фильтрации есть дополнительное условие

$$\lambda^* = C_1 + \frac{C_2}{\sqrt{h}}, \quad \text{или} \quad \lambda^* \asymp h^{-\frac{1}{2}},$$

где  $C_1, C_2 > 0$  — постоянные, которые выражаются через максимальные значения модулей координат вектор-функции  $c(t, x)$  и элементов матричных функций  $q(t)$ ,  $\zeta(t)$  на моделируемых траекториях (см. (7) и (11)).

2. На шаге 2 можно получить среднеквадратическую ошибку оценивания для момента времени  $t_k$ :

$$\hat{E}_k = \left\{ \frac{1}{M_k - 1} \sum_{\substack{i=1, \dots, M; \\ F_k^i=1}} (X_k^i - \hat{X}_k)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

На этом же шаге по выборке  $\mathbb{X}_k$  можно найти оценку апостериорной плотности вероятности  $p(t_k, x | Y_0^{t_k})$ , например, с помощью построения гистограммы [20]. Это дает возможность использовать критерии при нахождении оценки вектора состояния, отличные от (3) — критерий максимума апостериорной плотности вероятности [12]:

$$\hat{X}(t) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}^n} p(t, x | Y_0^t),$$

и др.

Приведем соотношения для построения гистограммы при  $n = 1$ , т.е. в одномерном случае. Пусть  $X_k^{\min}$  и  $X_k^{\max}$  — минимальный и максимальный элементы в выборке  $\mathbb{X}_k$ . Разобьем отрезок  $[X_k^{\min}, X_k^{\max}]$  на непересекающиеся множества  $\Delta^l$  (интервалы, полуинтервалы или отрезки),  $l = 1, 2, \dots, L$ :

$$[X_k^{\min}, X_k^{\max}] = \bigcup_{l=1}^L \Delta^l.$$

Тогда приближенное значение апостериорной плотности вероятности  $p(t_k, x | Y_0^{t_k})$  при  $x \in \Delta^l$  оценивается величиной

$$\frac{M_k^l}{M_k \text{mes } \Delta^l}, \quad (15)$$

где  $M_k^l$  — число элементов выборки  $\mathbb{X}_k$ , принадлежащих множеству  $\Delta^l$ ;  $\text{mes } \Delta^l$  — длина интервала (полуинтервала, отрезка)  $\Delta^l$ . Для значений  $x \notin [X_k^{\min}, X_k^{\max}]$  приближенное значение  $p(t_k, x | Y_0^{t_k})$  полагается равным нулю.

Обычно разбиение  $\{\Delta^l\}$  строится таким образом, что  $\text{mes } \Delta^l = \text{const}$ , однако если число  $M_k$  элементов в выборке  $\mathbb{X}_k$  невелико, множества  $\Delta^l$  целесообразно строить так, чтобы каждому из них принадлежало одинаковое число элементов  $X_k^i$ .

При  $n > 1$ , т.е. в многомерном случае, оценка апостериорной плотности вероятности получается аналогично (связное подмножество  $\mathbb{R}^n$ , которому принадлежат элементы выборки  $\mathbb{X}_k$ , разбивается на непересекающиеся множества  $\Delta^l$ ;  $\text{mes } \Delta^l$  — лебегова мера множества  $\Delta^l$ ).

Если при усреднении в (15) пользоваться не текущим числом траекторий  $M_k$ , а начальным числом  $M$ , т.е. без учета количества обрывов и ветвлений, то фактически будет получено приближенное решение уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи (9) — функция  $\varphi(t_k, x | Y_0^{t_k})$ .

3. На шагах 5 и 6 (шагах 6 и 7 для модифицированного алгоритма, см. п. 1) подставляется значение  $Z_k$ , т.е. для момента времени  $t_k$ , а не  $t_*^i + \xi^i$ , поскольку других измерений  $Y(t)$ , или  $Z(t)$ , в рамках этих алгоритмов нет и при моделировании траектории процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  кусочно-линейные, а траектория процесса  $Z(t)$  кусочно-постоянная.

4. Один из вариантов упрощения алгоритма — нахождение промежуточного значения  $\tilde{X}$  для момента времени возможного обрыва или ветвления с помощью линейной интерполяции (см. рис. 6). Тогда шаг 4 выполняется в любом случае, а  $\tilde{X}$  на шаге 5 вычисляется по формуле

$$\tilde{X} = X_k^i + \frac{t_*^i + \xi^i - t_k}{h} (X_{k+1}^i - X_k^i).$$

Аналогичное замечание относится к шагу 6 вычисления  $\tilde{X}^i$  в модифицированном алгоритме.

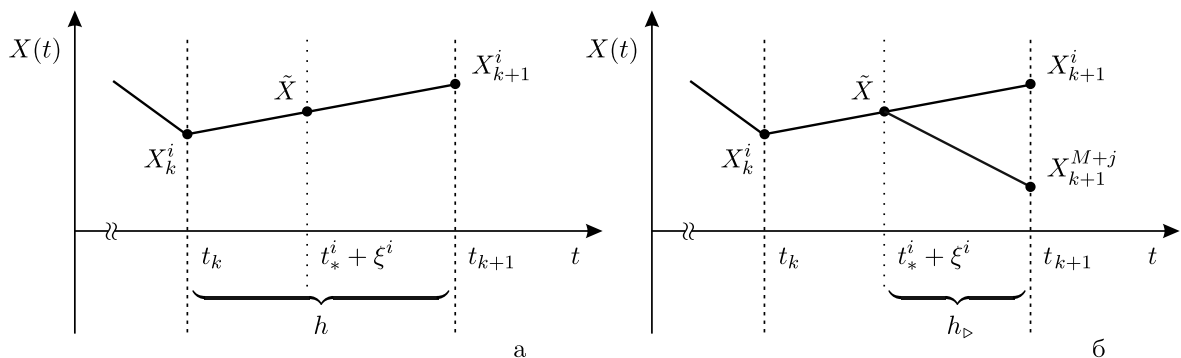


Рис. 6. Примеры моделирования вспомогательных траекторий скалярного случайного процесса  $X(t)$  с помощью линейной интерполяции.

5. В приведенном алгоритме для моделирования моментов времени обрывов и ветвлений траекторий реализован метод «максимального сечения» (12). Для использования модифицированного метода «максимального сечения» (13) алгоритм нуждается в доработке.

6. Возможна ситуация, когда при моделировании количество обрывов существенно больше количества ветвлений траекторий. Тогда фильтр «вырождается», но в таком слу-

чае можно добавлять новые траектории, восполняя «потери» при обрывах. Если при моделировании количество ветвлений существенно больше количества обрывов траекторий, то траектории нужно «прореживать» для экономии памяти, удаляя сразу все ветви случайно выбранной траектории (удаление только одной ветви равносильно обрыву, т.е. изменению интенсивности обрывов; на этом этапе ветви уже не рассматриваются как самостоятельные траектории, см. рис. 1).

7. Для повышения точности расчетов могут применяться методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений, имеющие больший порядок точности, нежели стохастический метод Эйлера (10), (11). Такие методы описаны, например, в [2, 5, 12, 33]. Однако точность оценивания определяется не только выбранным методом численного решения стохастических дифференциальных уравнений, но и методом моделирования неоднородных пуассоновских потоков, а также свойствами используемых генераторов псевдослучайных чисел.

При апробации алгоритма использовались следующие генераторы псевдослучайных чисел: *Mersenne Twister* [37] для величин, имеющих равномерное распределение; *Ziggurat* и генератор Бокса – Мюллера [33, 40] для величин, имеющих нормальное распределение.

8. Для экономии оперативной памяти при расчетах на ЭВМ необязательно хранить значения  $X_k^i$  и  $F_k^i$  после нахождения оценки  $\hat{X}_k$ . Кроме того, для хранения векторов состояния на новых траекториях, полученных в результате ветвления, можно использовать память, освободившуюся в результате обрывов траекторий (признак обрыва —  $F_k^i = 0$ ).

Преимущества разработанного алгоритма оптимального оценивания:

- а) получение оценки в темпе с поступлением измерений;
- б) простота реализации, так как можно применять известные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков, вычислительная сложность алгоритма зависит от вычислительной сложности применяемых численных методов и генераторов псевдослучайных чисел;
- в) универсальность, а именно возможность решения задачи оптимальной фильтрации для линейной, нелинейной или существенно нелинейной моделей объекта наблюдения и измерительной системы (под существенно нелинейной понимается модель, задаваемая недифференцируемыми коэффициентами сноса или диффузии), для одномерного и многомерного случаев.

Приведем примеры моделирования и оценивания для линейных систем наблюдения. Выбор линейных систем обусловлен возможностью сравнения результатов с оценкой, полученной с помощью фильтра Калмана – Бьюси [12, 17, 23, 39], т.е. с «точным» решением (с учетом того, что далее уравнения фильтра Калмана – Бьюси решаются приближенно методом Эйлера).

**Пример 1.** Система наблюдения описывается уравнениями

$$\begin{aligned} dX(t) &= -(2 - 2 \cos 10t)X(t)dt + 0.25dW(t), & X(0) &= X_0, \\ dY(t) &= \sin 20tX(t)dt + 0.1dV(t), & Y(0) &= 0, \end{aligned}$$

где  $t \in [0, 1]$ ,  $X, Y \in \mathbb{R}$ ,  $W(t)$  и  $V(t)$  — одномерные стандартные винеровские процессы ( $W(t)$ ,  $V(t)$  и  $X_0$  независимы), случайная величина  $X_0$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием  $-0.5$  и дисперсией  $0.01$ .

На рис. 7 приведены результаты моделирования системы наблюдения (выборочная

траектория  $X(t)$  показана синим цветом, траектория  $Y(t)$  — красным) и оценивания по критерию минимума среднеквадратичной ошибки (оценка, полученная усреднением по пучку траекторий с обрывами и ветвлениями, показана зеленым цветом, результат решения уравнений фильтра Калмана–Бьюси — пурпурным). На рис. 8 изображены графики среднеквадратической ошибки оценивания при усреднении по пучку траекторий с обрывами и ветвлениями (зеленый цвет) и при использовании фильтра Калмана–Бьюси (пурпурный цвет). Шаг численного интегрирования  $h = 0.001$ , начальное число вспомогательных траекторий  $M = 1000$ , график изменения числа траекторий  $M_k$  как функции времени  $M(t_k)$  изображен на рис. 9.

**Пример 2.** Система наблюдения описывается уравнениями

$$\begin{aligned} dX(t) &= (10 \sin 100t - 5)X(t)dt + 0.05dW(t), & X(0) &= X_0, \\ dY(t) &= X(t)dt + 0.01dV(t), & Y(0) &= 0, \end{aligned}$$

где  $t \in [0, 1]$ ,  $X, Y \in \mathbb{R}$ ,  $W(t)$  и  $V(t)$  — одномерные стандартные винеровские процессы ( $W(t)$ ,  $V(t)$  и  $X_0$  независимы), случайная величина  $X_0$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием 0.2 и дисперсией 0.0001.

На рис. 10 приведены результаты моделирования системы наблюдения (выборочная траектория  $X(t)$  показана синим цветом, траектория  $Y(t)$  — красным) и оценивания (оценка, полученная по результатам моделирования траекторий с обрывами и ветвлениями, показана зеленым цветом, результат решения уравнений фильтра Калмана–Бьюси — пурпурным), причем оценка по результатам моделирования траекторий с обрывами и ветвлениями найдена по критерию максимума апостериорной плотности вероятности (см. п. 2 замечаний):

$$\hat{X}(t) = \arg \max_{x \in \mathbb{R}} p(t, x | Y_0^t).$$

На рис. 11 изображены оценки сечений апостериорной плотности вероятности (гистограммы),  $t \in [0, 1]$ ,  $x \in [-0.047, 0.241]$ , область значений —  $[0, 4]$ . Шаг численного интегрирования  $h = 0.005$ , начальное число вспомогательных траекторий  $M = 5000$ . График изменения числа траекторий  $M_k$  как функции времени  $M(t_k)$  изображен на рис. 12. На этом графике при  $t \in [0, 0.2]$  есть участки постоянства функции  $M(t_k)$  — они соответствуют «прореживанию» траекторий (см. п. 6 замечаний).

## Список литературы

- [1] Аверина Т.А. Новые алгоритмы статистического моделирования неоднородных пуассоновских ансамблей // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2010. Т. 50. № 1. — С. 16–23.
- [2] Аверина Т.А., Артемьев С.С. Новое семейство численных методов решения стохастических дифференциальных уравнений // Доклады АН СССР. — 1986. Т. 288. № 4. — С. 777–780.
- [3] Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Два метода анализа стохастических мультиструктурных систем с распределенными переходами // Сибирский журнал вычислительной математики. — 2008. Т. 11. № 1. — С. 1–18.
- [4] Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. — М.: Физматлит, 1993.
- [5] Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. — СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.



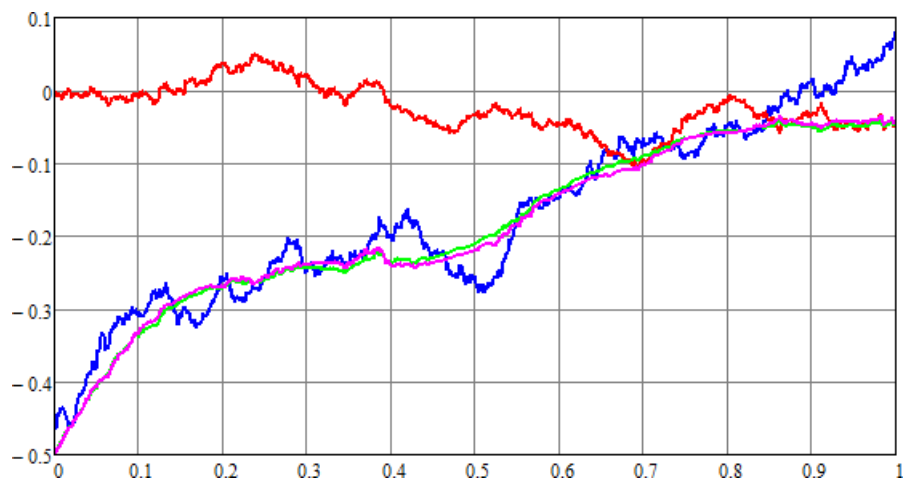


Рис. 7. Результаты моделирования системы наблюдения и оценивания.

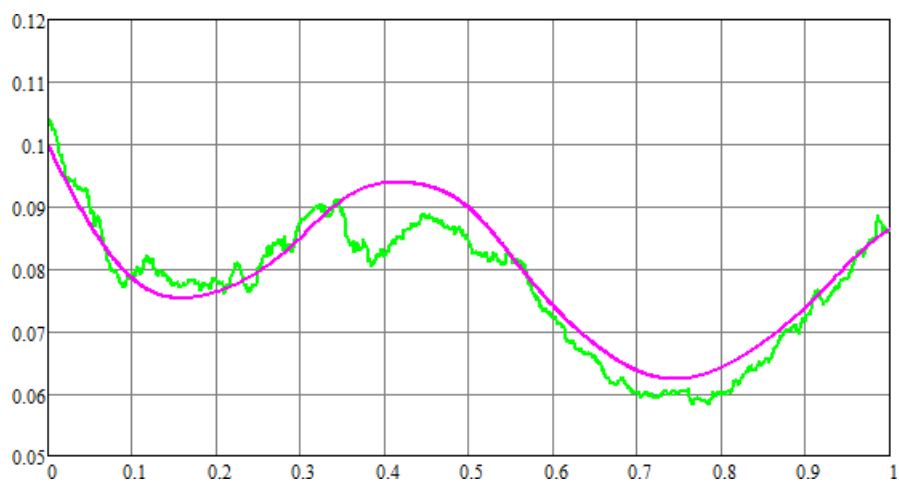


Рис. 8. Среднеквадратическая ошибка оценивания.

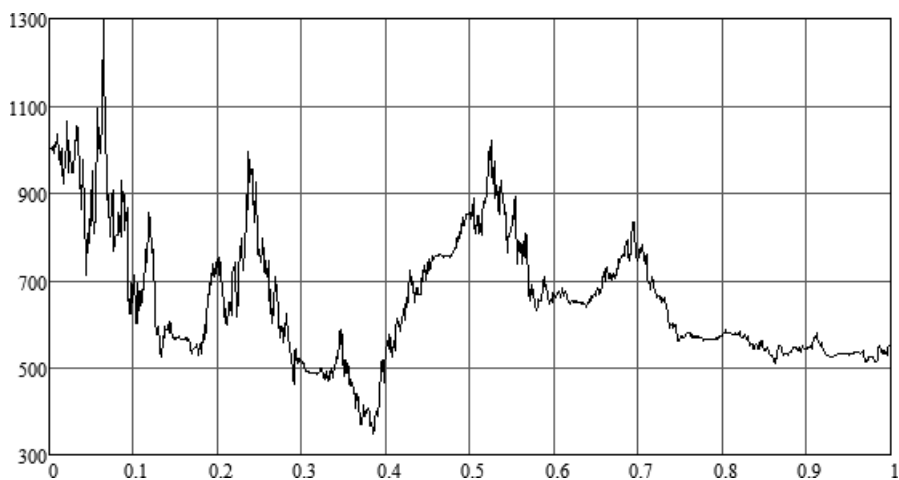


Рис. 9. Число вспомогательных траекторий случайного процесса  $X(t)$ .

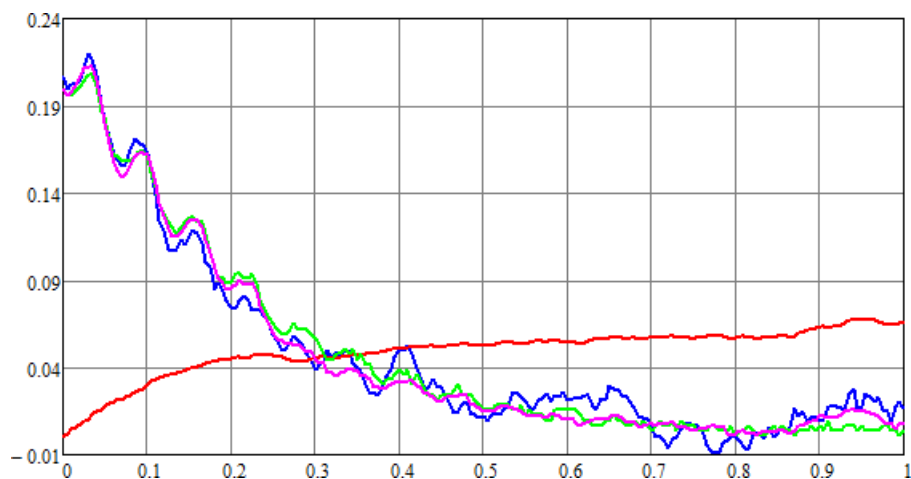


Рис. 10. Результаты моделирования системы наблюдения и оценивания.

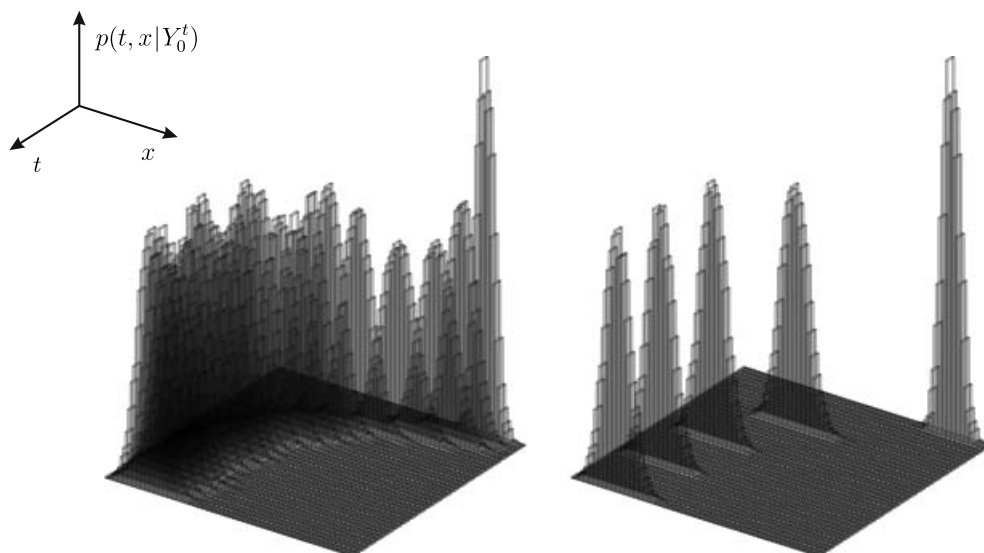


Рис. 11. Оценка апостериорной плотности вероятности.

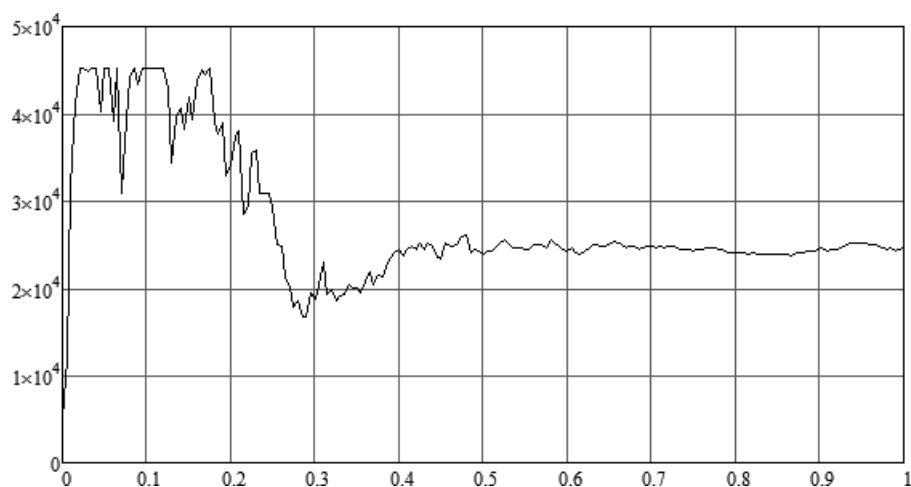


Рис. 12. Число вспомогательных траекторий случайного процесса  $X(t)$ .

- [6] *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Нелинейная фильтрация диффузионных марковских процессов // Труды МИАН СССР. — 1968. Т. 104. — С. 135–180.
- [7] Марковская теория оценивания в радиотехнике / Под ред. Ярлыкова М.С. — М.: Радиотехника, 2004.
- [8] *Михайлов Г.А.* Метод моделирования длины свободного пробега частиц // Атомная энергия. — 1970. Т. 28. № 2. — С. 175.
- [9] *Михайлов Г.А., Аверина Т.А.* Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. — 2009. Т. 428. № 2. — С. 163–165.
- [10] *Насыров Ф.С.* Локальные времена, симметричные интегралы и стохастический анализ. — М.: Физматлит, 2011.
- [11] *Оксендаль Б.* Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. — М.: Мир, 2003.
- [12] *Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С.* Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. — М.: Вузовская книга, 2008.
- [13] *Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.* Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. — М.: Вузовская книга, 2006.
- [14] *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Теория стохастических систем. — М.: Логос, 2004.
- [15] *Руденко Е.А.* Оптимальная структура нелинейных фильтров конечного порядка: Препринт. — М.: Изд-во МАИ, 1989.
- [16] *Рыбаков К.А.* Решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации как задачи анализа систем со случайными обрывами и ветвлениями траекторий // Материалы конференции «Физико-математические науки и информационные технологии: актуальные проблемы». — Новосибирск: Изд. «Сибирская ассоциация консультантов», 2012. — С. 38–42.
- [17] *Синицын И.Н.* Фильтры Калмана и Пугачева. — М.: Логос, 2006.
- [18] *Скорород А.В.* Ветвящиеся диффузионные процессы // Теория вероятностей и ее применения. — 1964. Т. 9. № 3. — С. 492–497.
- [19] Справочник по теории автоматического управления / Под ред. Красовского А.А. — М.: Наука, 1987.
- [20] *Тарасенко Ф.П.* Непараметрическая статистика. — Томск: Изд-во Томского ун-та, 1976.
- [21] *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. — М.: Советское радио, 1975.
- [22] *Федосов Е.А., Инсаров В.В., Селивохин О.С.* Системы управления конечным положением в условиях противодействия среды. — М.: Наука, 1989.
- [23] *Шахтарин Б.И.* Нелинейная оптимальная фильтрация в примерах и задачах. — М.: Гелиос АРВ, 2008.
- [24] *Bain A., Crisan D.* Fundamentals of Stochastic Filtering. — Springer, 2009.
- [25] *Brigo D., Hanzon B., Le Gland F.* A Differential Geometric Approach to Nonlinear Filtering: the Projection Filter // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1998. V. 43. No. 2. — P. 247–252.
- [26] *Budhiraja A., Chen L., Lee C.* A Survey of Numerical Methods for Nonlinear Filtering Problems // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2007. V. 230. No. 1–2. — P. 27–36.
- [27] *Candy J.V.* Bayesian Signal Processing: Classical, Modern and Particle Filtering Methods. — John Wiley & Sons, 2009.
- [28] *Chen Z.* Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond / Technical Report: Adaptive Syst. Lab., McMaster University, Hamilton, ON, Canada, 2003.

- [29] *Coleman W.A.* Mathematical Verification of a Certain Monte Carlo Sampling Technique and Applications of the Technique to Radiation Transport Problems // Nuclear Science and Engineering. — 1968. V. 32. — P. 76–81.
- [30] *Crişan D., Del Moral P., Lyons T.J.* Interacting Particle Systems Approximations of the Kushner–Stratonovitch Equation // Advances in Applied Probability. — 1999. V. 31. No. 3. — P. 819–838.
- [31] *Dynkin E.B.* Superprocesses and Partial Differential Equations // Annals of Probability. — 1993. V. 21. No. 3. — P. 1185–1262.
- [32] *Jazwinski A.H.* Stochastic Processes and Filtering Theory. — Academic Press, 1970.
- [33] *Kloeden P.E., Platen E.* Numerical Solution of Stochastic Differential Equations. — Springer, 1995.
- [34] *Kushner H.J., Dupuis P.* Numerical Methods for Stochastic Control Problems in Continuous Time. — Springer, 2000.
- [35] *Liu Z., Dong F., Ding L.* Numerical Simulation of Nonlinear Filtering Problem // Advanced Research on Computer Education, Simulation and Modeling (CESM 2011): Proceedings, part 2. — Springer, 2011. — P. 14–19.
- [36] *Lototsky S., Mikulevicius R., Rozovskii B.L.* Nonlinear Filtering Revisited: A Spectral Approach // SIAM Journal on Control and Optimization. — 1997. V. 35. No. 2. — P. 435–461.
- [37] *Matsumoto M., Nishimura T.* Mersenne Twister: A 623-Dimensionally Equidistributed Uniform Pseudo-Random Number Generator // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation. — 1998. V. 8. No. 1. — P. 3–30.
- [38] Sequential Monte Carlo Methods in Practice / Ed. by Doucet A., de Freitas N., Gordon N. — Springer, 2001.
- [39] *Simon D.* Optimal State Estimation. Kalman,  $H_\infty$ , and Nonlinear Approaches. — John Wiley & Sons, 2006.
- [40] *Thomas D.B., Luk W., Leong P.H.W., Villasenor J.D.* Gaussian Random Number Generators // ACM Computing Surveys. — 2007. V. 39. No. 4. — P. 11:1–11:38.
- [41] *Xu L.* On Galerkin Approximations for the Zakai Equation with Diffusive and Point Process Observations / Ph.D. thesis, Leipzig University, 2010.
- [42] *Yau S.S.-T.* New Algorithms in Real Time Solution of the Nonlinear Filtering Problem // Communications in Information and Systems. — 2008. V. 8. No. 3. — P. 303–332.