РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ КАК ЗАДАЧИ АНАЛИЗА СИСТЕМ СО СЛУЧАЙНЫМИ ОБРЫВАМИ И ВЕТВЛЕНИЯМИ ТРАЕКТОРИЙ

Рыбаков Константин Александрович

канд. физ.-мат. наук, доцент МАИ, г. Москва

E-mail: rkoffice@mail.ru

Введение. Задача оценивания вектора состояния является одной из основных задач теории стохастических систем управления, так как координаты вектора состояния, как правило, могут быть измерены лишь косвенно и со случайными ошибками, поэтому возникает задача приближенного восстановления вектора состояния по результатам измерений: задача оценивания текущего состояния, или задача фильтрации. Задача оптимального оценивания, или задача оптимальной фильтрации, состоит в восстановлении вектора состояния по результатам измерений в соответствии с заданным критерием оптимальности, например, критерием минимума среднеквадратической ошибки оценивания [4, 6].

В представленной работе предлагается решать задачу оптимальной нелинейной фильтрации как задачу анализа стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий. Решение такой задачи анализа можно найти приближенно, используя методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков [2–4]. При использовании критерия минимума среднеквадратической ошибки оптимальная оценка может быть получена в результате усреднения по пучку траекторий системы, которая отличается от исходного объекта наблюдения только тем, что ее траектории обрываются и разветвляются в случайные моменты времени, их распределение определяется результатами измерений оцениваемого вектора состояния. По результатам моделирования траекторий системы с обрывами и ветвлениями можно оценить апостериорную плотность вероятности (при фиксированных измерениях).

По сравнению со многими существующими методами решения задачи оптимальной нелинейной фильтрации в предлагаемом подходе нет упрощения функций, входящих в уравнения моделей объекта наблюдения и измерительной системы, не накладываются ограничения на вид апостериорной плотности вероятности или структуру уравнений фильтра. Предлагаемый подход основан на интерпретации одного из слагаемых в уравнении Дункана–Мортенсена–Закаи как функции поглощения и восстановления траекторий [1, 5].

Постановка задачи. Будем рассматривать модель объекта наблюдения, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито [4, 6]

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \tag{1}$$

где $X \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния; $t \in T = [t_0, t_1]$ – отрезок времени функционирования; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от X_0; $f(t,x)\colon T \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n$, $\sigma(t,x)\colon T \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^{n\times s}$ – заданные функции. Начальное состояние X_0 определяется заданной плотностью вероятности $\phi_0(x)$.

Модель измерительной системы записывается в форме

$$Z(t) = c(t, X(t)) + \zeta(t)N(t),$$

где $Z \in \mathrm{R}^m$ – вектор измерений; $N(t)$ – d-мерный стандартный гауссовский белый шум; $c(t,x)\colon T \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$, $\zeta(t)\colon T \to \mathrm{R}^{m\times d}$ – заданные функции.

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t)$ по результатам измерений $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [0,t)\}$: $\hat{X}(t) = \psi(t, Z_0^t)$, где $\psi(t, Z_0^t)$ – функция, обеспечивающая в каждый момент времени t выполнение условия

$$\mathrm{M}\left[(X(t) - \hat{X}(t))^{\mathrm{T}} (X(t) - \hat{X}(t)) \right] \to \min_{\psi(t,\cdot)}, \quad \text{M – знак математического ожидания.}$$

Известно [4, 6], что в этом случае $\psi(t, Z_0^t) = \mathrm{M}\left[X(t) \mid Z_0^t \right] = \int_{\mathrm{R}^n} x p(t, x \mid Z_0^t) dx$, где $p(t, x \mid Z_0^t)$ – апостериорная плотность вероятности вектора состояния X.

Ненормированная апостериорная плотность вероятности $\phi(t, x \mid Z_0^t)$ вектора состояния X удовлетворяет уравнению Дункана–Мортенсена–Закаи (в форме Стратоновича) [4]:

$$\frac{d_{1/2}\phi(t,x\,|\,Z_0^t)}{dt} = A\phi(t,x\,|\,Z_0^t) + F_{Z(t)}\phi(t,x\,|\,Z_0^t), \quad \phi(t_0,x) = \phi_0(x), \tag{2}$$

в котором

$$A\phi(t,x\,|\,Z_0^t) = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[f_i(t,x)\phi(t,x\,|\,Z_0^t)\Big] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Big[g_{ij}(t,x)\phi(t,x\,|\,Z_0^t)\Big],$$

$$F_{Z(t)}\phi(t,x\,|\,Z_0^t) = \sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} c_k(t,x) q_{kr}(t)\left(Z_r(t) - \frac{c_r(t,x)}{2}\right)\phi(t,x\,|\,Z_0^t) = \lambda(t,x,Z(t))\phi(t,x\,|\,Z_0^t),$$

$$g(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^{\mathrm{T}}(t,x), \quad q(t) = \left(\zeta(t)\zeta^{\mathrm{T}}(t)\right)^{-1}.$$

Сведение к задаче анализа стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий. Далее будем предполагать, что измерения фиксированы, поэтому стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных (2) можно рассматривать как детерминированное дифференциальное уравнение. Оно, если представить функцию $\lambda(t,x,z)$ в виде

$$\lambda(t,x,z) = -\lambda^-(t,x,z) + \lambda^+(t,x,z),$$

где

$$\lambda^-(t,x,z) = \begin{cases} -\lambda(t,x,z), & \lambda(t,x,z) < 0, \\ 0, & \lambda(t,x,z) \ge 0, \end{cases} \qquad \lambda^+(t,x,z) = \begin{cases} \lambda(t,x,z), & \lambda(t,x,z) > 0, \\ 0, & \lambda(t,x,z) \le 0, \end{cases}$$

по структуре будет аналогично обобщенному уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова или уравнению Колмогорова–Феллера [1, 5]. Тогда в уравнении

$$\frac{\partial\phi(t,x\,|\,Z_0^t)}{\partial t} = A\phi(t,x\,|\,Z_0^t) - \lambda^-(t,x,Z(t))\phi(t,x\,|\,Z_0^t) + \lambda^+(t,x,Z(t))\phi(t,x\,|\,Z_0^t)$$

слагаемые $\lambda^-(t,x,Z(t))\phi(t,x\,|\,Z_0^t)$ и $\lambda^+(t,x,Z(t))\phi(t,x\,|\,Z_0^t)$ характеризуют обрывы и ветвления траекторий процесса $X(t)$, а именно функция $\lambda^-(t,x,z)$ – интенсивность обрыва траекторий, т.е. вероятность $\mathrm{P}^-(t,\Delta t)$ обрыва траектории на промежутке времени $[t,t+\Delta t]$ при $X(t)=x$ и $Z(t)=z$ удовлетворяет соотношению $\mathrm{P}^-(t,\Delta t) = \lambda^-(t,x,z)\Delta t + o(\Delta t)$. Функция $\lambda^+(t,x,z)$ – интенсивность ветвления траекторий, вероятность $\mathrm{P}^+(t,\Delta t)$ ветвления траектории при $X(t)=x$ и $Z(t)=z$ удовлетворяет соотношению $\mathrm{P}^+(t,\Delta t) = \lambda^+(t,x,z)\Delta t + o(\Delta t)$.

Уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи не обладает свойством сохранения вероятности в отличие от уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова или Колмогорова–Феллера, его решение – функция $\phi(t,x\,|\,Z_0^t)$ – не нормировано к единице: $C=\int_{\mathrm{R}^n}\phi(t,x\,|\,Z_0^t)dx\neq 1$. В частности, это следует из того, что обрывы и ветвления траекторий процесса $X(t)$ происходят в разные моменты времени, так как если $\lambda^-(t,x,z)>0$, то $\lambda^+(t,x,z)=0$, и если $\lambda^+(t,x,z)>0$, то $\lambda^-(t,x,z)=0$, поэтому для получения апостериорной плотности вероятности $p(t,x\,|\,Z_0^t)$ необходима нормировка: $p(t,x\,|\,Z_0^t)=\phi(t,x\,|\,Z_0^t)/C$, $\int_{\mathrm{R}^n}p(t,x\,|\,Z_0^t)dx\equiv 1$.

Следовательно, функции $p(t,x\,|\,Z_0^t)$ и $\phi(t,x\,|\,Z_0^t)$ характеризуют распределение вектора X – состояния объекта наблюдения, описываемого уравнением (1), – с учетом того, что часть траекторий случайного процесса $X(t)$ обрывается, а часть – разветвляется в случайные моменты времени. Обрывы и ветвления траекторий образуют неоднородные пуассоновские потоки событий с интенсивностями $\lambda^-(t)=\lambda^-(t,X(t),Z(t))$ и $\lambda^+(t)=\lambda^+(t,X(t),Z(t))$ соответственно, фактически процесс $Z(t)$ управляет временем появления обрывов и ветвлений. При ветвлении в фиксированный момент времени может появиться только одна новая ветвь, каждая из новых ветвей рассматривается как самостоятельная траектория, при обрыве прекращается моделирование только одной ветви.

Заметим, что с учетом обрывов и ветвлений требуется уточнение понятия «вектор состояния», однако это не принципиально, так как при оценивании $X(t)$ требуется усреднение или оценка плотности вероятности по пучку траекторий и такой интерпретации ветвящегося процесса, когда каждая новая ветвь рассматривается как самостоятельная траектория, оказывается достаточно.

Для приближенного определения оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ предлагается использовать метод статистических испытаний: моделирование вспомогательных траекторий случайного процесса $X(t)$ с учетом обрывов и ветвлений при фиксированных измерениях Z_0^t с последующим усреднением. При этом можно применять различные методы численного решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков [2–4].

Преимущества предлагаемой методики оптимального оценивания:

а) получение оценки в темпе с поступлением измерений;

б) простота реализации, так как можно применять известные численные методы решения стохастических дифференциальных уравнений и методы моделирования неоднородных пуассоновских потоков, вычислительная сложность алгоритма напрямую зависит от вычислительной сложности применяемых численных методов и методов моделирования псевдослучайных чисел;

в) универсальность, а именно возможность решения задачи оптимальной фильтрации для линейной, нелинейной или существенно нелинейной моделей объекта наблюдения и измерительной системы (под существенно нелинейной понимается модель, задаваемая недифференцируемыми коэффициентами сноса или диффузии), для одномерного и многомерного случаев.

Список литературы:

1. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993.
2. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. СПб.: Изд-во Политехн. ун-та, 2010.
3. Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // ДАН. 2009. Т. 428. № 2. С. 163–165.
4. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. М.: Вузовская книга, 2008.
5. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. М.: Вузовская книга, 2006.
6. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. М.: Наука, 1990.