УДК 519.217.4 + 519.633.2

К. А. РЫБАКОВ

О РЕШЕНИИ РОБАСТНОГО УРАВНЕНИЯ ДУНКАНА–МОРТЕНСЕНА–ЗАКАИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Рыбаков Константин Александрович,
к.ф.-м.н., доцент МАИ
e-mail: rkoffice@mail.ru

Аннотация: *В статье рассматривается решение задачи оптимальной фильтрации сигналов в нестационарных стохастических дифференциальных системах. Для приближенного нахождения апостериорной плотности вероятности вектора состояния объекта наблюдения применяется спектральный метод, в основе метода лежит представление решения робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи в виде ряда по функциям некоторой полной ортонормированной системы.*

Ключевые слова: *апостериорная плотность вероятности, оптимальная фильтрация, стохастическая система, спектральный метод, уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи.*

SOLVING ROBUST DUNCAN–MORTENSEN–ZAKAI EQUATION FOR NONSTATIONARY SYSTEMS

K. A. Rybakov
e-mail: rkoffice@mail.ru

Abstract: *In this paper it is considered the solution of optimal filtering problem for nonstationary stochastic differential systems. The spectral method is used for the approximate finding of conditional probability density for the system state. This method is based on representation of the solution for robust Duncan–Mortensen–Zakai equation as the orthogonal series.*

Key words: *conditional density, Duncan–Mortensen–Zakai equation, optimal filtering problem, spectral method, stochastic system.*

Введение. Оценивание текущего состояния динамической системы в условиях помех по результатам измерений в соответствии с заданным критерием – оптимальная фильтрация – возникает во многих задачах радиотехники, навигации и управления, при обработке информации [1, 2]. При построении приближенно-аналитических методов решения различных задач теории стохастических систем в случае использования уравнений для нормированных или ненормированных плотностей вероятности (в том числе и задачи оптимальной фильтрации [3–5]) широко применяется представление решения задачи в виде ортогонального ряда. Но, как правило, для этого фиксируется некоторая система ортогональных функций и ищутся соотношения для нахождения коэффициентов ряда. Спектральный метод [6–10], применяемый далее, более универсален, так как использует произвольную ортогональную (ортонормированную, биортонормированную) систему функций. Соотношения для нахождения коэффициентов ряда при применении спектрального метода записываются в матричной форме, вид этих соотношений не зависит от выбора ортогональной системы функций.

В работе [3] спектральный метод применялся для решения задачи оптимальной фильтрации в случае, когда коэффициенты уравнений объекта наблюдения и измерительной системы не зависят от времени (т.е. рассматривались стационарные системы), здесь этот подход применяется для более общей задачи – оптимальной фильтрации сигналов для нестационарных систем.

Постановка задачи. Рассматривается модель системы наблюдения, описываемая стохастическими дифференциальными уравнениями Ито [11]:

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t,X(t))dt + \sigma(t,X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0, \\ dY(t) &= c(t,X(t))dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $X \in \mathrm{R}^n$ – вектор состояния, $Y \in \mathrm{R}^m$ – вектор измерений; $t \in T = [t_0, t_1]$ – отрезок времени функционирования системы; $f(t,x)$ – вектор-функция $n \times 1$, $\sigma(t,x)$ – матричная функция $n \times s$, $c(t,x)$ – вектор-функция $m \times 1$, $\zeta(t)$ – матричная функция $m \times d$; $W(t)$ и $V(t)$ – s-мерный и d-мерный стандартные винеровские процессы. Процессы $W(t)$, $V(t)$ и начальное состояние X_0, заданное плотностью вероятности $\varphi_0(x)$, независимы.

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки $\hat{X}(t)$ по результатам измерений $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$, т.е. $\hat{X}(t) = \psi(t, Y_0^t)$, где $\psi(t, Y_0^t)$ – функция, обеспечивающая в каждый момент времени t выполнение условий

$$M[X(t) - \hat{X}(t)] = 0, \quad M[(X(t) - \hat{X}(t))^{\mathrm{T}}(X(t) - \hat{X}(t))] \to \min_{\psi(t,\cdot)},$$

где M – знак математического ожидания.

Решение этой задачи определяется соотношением [11]

$$\psi(t, Y_0^t) = M[X(t) \,|\, Y_0^t] = \int_{\mathrm{R}^n} x p(t, x \,|\, Y_0^t) dx,$$

в котором $p(t, x \,|\, Y_0^t)$ – апостериорная плотность вероятности вектора состояния X.

Соотношения для апостериорной плотности вероятности. Для нахождения апостериорной плотности вероятности могут использоваться различные уравнения. Уравнение Стратоновича–Кушнера [11] непосредственно описывает эволюцию $p(t, x \,|\, Y_0^t)$, но его решение слишком трудоемко из-за того, что это нелинейное стохастическое дифференциальное уравнение в частных производных. Уравнению Дункана–Мортенсена–Закаи [5, 11, 12] удовлетворяет ненормированная апостериорная плотность вероятности $\varphi(t, x \,|\, Y_0^t)$:

$$\begin{aligned} &\frac{d\varphi(t,x \,|\, Y_0^t)}{dt} = \mathcal{L}\varphi(t,x \,|\, Y_0^t) + \sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} c_\alpha(t,x) q_{\alpha\beta}(t) \frac{dY_\beta(t)}{dt} \varphi(t,x \,|\, Y_0^t), \\ &\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\mathcal{L}\varphi(t,x \,|\, Y_0^t) = \mathcal{A}\varphi(t,x \,|\, Y_0^t) - \tfrac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m} c_\alpha(t,x) q_{\alpha\beta}(t) c_\beta(t,x) \varphi(t,x \,|\, Y_0^t),$$

$$\mathcal{A}\varphi(t,x \,|\, Y_0^t) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}[f_i(t,x)\varphi(t,x \,|\, Y_0^t)] + \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}[g_{ij}(t,x)\varphi(t,x \,|\, Y_0^t)],$$

$$g(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^{\mathrm{T}}(t,x), \quad q^{-1}(t) = \zeta(t)\zeta^{\mathrm{T}}(t).$$

Оно является стохастическим дифференциальным уравнением в частных производных, его можно записывать в разных формах. Уравнение (2) понимается в форме Стратоновича. Существенное преимущество этого уравнения – линейность, но его решение осложняет наличие процесса типа белого шума в последних слагаемых (при фиксированных измерениях – наличие одной из траекторий этого процесса).

Пусть $h(t,x)=q(t)c(t,x)$ – вектор-функция $m\times 1$, тогда уравнение (2) можно переписать в виде

$$\frac{d\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)}{dt}=\mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)+\sum_{\alpha=1}^{m}h_\alpha(t,x)\frac{dY_\alpha(t)}{dt}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t),$$

где

$$\mathcal{L}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)=\mathcal{A}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)-\tfrac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}h_\alpha(t,x)c_\alpha(t,x)\varphi(t,x\,|\,Y_0^t),$$

а с помощью замены

$$\rho(t,x\,|\,Y_0^t)=\exp\left\{-\sum_{\alpha=1}^{m}h_\alpha(t,x)Y_\alpha(t)\right\}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t);\tag{3}$$

можно перейти к робастному уравнению Дункана–Мортенсена–Закаи [12, 13] для другой ненормированной апостериорной плотности $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\rho(t,x\,|\,Y_0^t)}{\partial t}&=\mathcal{L}\rho(t,x\,|\,Y_0^t)-\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(t)\mathcal{L}_\alpha\rho(t,x\,|\,Y_0^t)+\\&+\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}Y_\alpha(t)Y_\beta(t)\mathcal{L}_{\alpha\beta}\rho(t,x\,|\,Y_0^t)-\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(t)\frac{\partial h_\alpha(t,x)}{\partial t}\rho(t,x\,|\,Y_0^t).\end{aligned}\tag{4}$$

В уравнении (4) $\mathcal{L}_\alpha=[\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{L}]$, $\mathcal{L}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}[\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{L}_\beta]=\frac{1}{2}[\mathcal{H}_\alpha,[\mathcal{H}_\beta,\mathcal{L}]]$, а $[\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{L}]$ и $[\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{L}_\beta]$ – коммутаторы, $\mathcal{H}_\alpha$ – оператор умножения на функцию $h_\alpha(t,x)$, $\alpha,\beta=1,2,\ldots,m$. Начальное условие для этого уравнения $\rho(t_0,x)=\varphi_0(x)$, что следует из формулы замены ненормированной апостериорной плотности вероятности (3) при $t=t_0$ с учетом начального условия $Y(t_0)=0$.

Робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи не содержит процессов типа белого шума (или их траекторий, если измерения зафиксированы), поэтому оно предпочтительнее для приближенного решения с помощью приближенно-аналитических и численных методов [3, 5, 12, 14, 15].

Принимая во внимание, что два оператора умножения на скалярные функции являются коммутирующими, получаем $\mathcal{L}_\alpha=[\mathcal{H}_\alpha,\mathcal{A}]=\mathcal{H}_\alpha\circ\mathcal{A}-\mathcal{A}\circ\mathcal{H}_\alpha$, где $\mathcal{H}_\alpha\circ\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\circ\mathcal{H}_\alpha$ – композиции линейных операторов, т.е. $\mathcal{L}_{\alpha\beta}=\frac{1}{2}[\mathcal{H}_\alpha,[\mathcal{H}_\beta,\mathcal{A}]]$.

Переход от функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$ к апостериорной плотности вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^t)$ вектора состояния X осуществляется при помощи обратной замены и нормировки:

$$\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)=\exp\left\{\sum_{\alpha=1}^{m}h_\alpha(t,x)Y_\alpha(t)\right\}\rho(t,x\,|\,Y_0^t),\quad p(t,x\,|\,Y_0^t)=\frac{\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)}{\int_{\mathrm{R}^n}\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)dx}.\tag{5}$$

Отметим, что во многих публикациях авторы ограничиваются рассмотрением только стационарной модели измерительной системы: $c(t,x)=c(x)$ и $\zeta(t)=\zeta$. Кроме того, для удобства матрица ζ полагается равной единичной матрице, т.е. $h(t,x)=h(x)=c(x)$. При такой постановке задачи робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи проще, оно не содержит последнего слагаемого с производными координат функции $h(t,x)$ по времени [13–15]. Стационарность модели объекта наблюдения, т.е. $f(t,x)=f(x)$ и $\sigma(t,x)=\sigma(x)$, робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи не упрощает.

Спектральный метод решения робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи. Как и в [3], применим спектральную форму математического описания для решения робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи. Базовые определения и свойства спектральных характеристик функций и линейных операторов, используемые далее, изложены в [6–10].

Определим базисные системы и получим спектральный аналог робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи в предположении, что отрезок времени T и измерения Y_0^t зафиксированы $(t = t_1)$. Пусть $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ – ортонормированный базис пространства $L_2(T \times \mathrm{R}^n)$, причем функции $e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)$ порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисные системы $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\{p(i_1, \ldots, i_n, x)\}_{i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ пространств $L_2(T)$ и $L_2(\mathrm{R}^n)$ соответственно, т.е.

$$e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x) = q(i_0, t) \cdot p(i_1, \ldots, i_n, x), \quad i_0, i_1, \ldots, i_n = 0, 1, 2, \ldots$$

Введем следующие обозначения: $A(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора $\mathcal{A}$, $C_\alpha(n+1, n+1)$ и $H_\alpha(n+1, n+1)$ – спектральные характеристики операторов $\mathcal{C}_\alpha$ и $\mathcal{H}_\alpha$ соответственно ($\mathcal{C}_\alpha$ – оператор умножения на функцию $c_\alpha(t, x)$), $\alpha = 1, 2, \ldots, m$:

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}] = A(n+1, n+1), \quad \mathbb{S}[\mathcal{C}_\alpha] = C_\alpha(n+1, n+1), \quad \mathbb{S}[\mathcal{H}_\alpha] = H_\alpha(n+1, n+1).$$

Эти спектральные характеристики определены относительно базиса $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$.

Спектральная характеристика $L(n+1, n+1)$ оператора $\mathcal{L}$, определенная относительно той же базисной системы, выражается через спектральные характеристики $A(n+1, n+1)$, $C_\alpha(n+1, n+1)$ и $H_\alpha(n+1, n+1)$:

$$\mathbb{S}[\mathcal{L}] = L(n+1, n+1) = A(n+1, n+1) - \tfrac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{m} H_\alpha(n+1, n+1) \cdot C_\alpha(n+1, n+1),$$

что следует из свойств спектральных характеристик линейных операторов. В свою очередь спектральную характеристику $A(n+1, n+1)$ можно выразить с помощью спектральных характеристик операторов дифференцирования первого и второго порядков, а также операторов умножения на функции $f_i(t, x)$ и $g_{ij}(t, x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (см. [6, 7]).

Далее выразим спектральную характеристику $L_\alpha(n+1, n+1)$ линейного оператора $\mathcal{L}_\alpha$:

$$\begin{gathered}\mathbb{S}[\mathcal{L}_\alpha] = L_\alpha(n+1, n+1) = H_\alpha(n+1, n+1) \cdot A(n+1, n+1) - \\ - A(n+1, n+1) \cdot H_\alpha(n+1, n+1) = [H_\alpha(n+1, n+1), A(n+1, n+1)],\end{gathered}$$

где $[H_\alpha(n+1, n+1), A(n+1, n+1)]$, как и в [3], будем называть коммутатором спектральных характеристик линейных операторов. Таким образом, спектральная характеристика $L_{\alpha\beta}(n+1, n+1)$ линейного оператора $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ выражается формулой

$$\mathbb{S}[\mathcal{L}_{\alpha\beta}] = L_{\alpha\beta}(n+1, n+1) = \tfrac{1}{2}[H_\alpha(n+1, n+1), [H_\beta(n+1, n+1), A(n+1, n+1)]].$$

Свойства коммутаторов спектральных характеристик линейных операторов на пространстве функций времени и вектора состояния, т.е. размерности $2(n+1)$, очевидно, аналогичны свойствам коммутаторов спектральных характеристик линейных операторов на пространстве функций вектора состояния, т.е. размерности $2n$. Эти свойства (билинейность, антикоммутативность и тождество Якоби) приведены в [3].

Наконец, выразим спектральную характеристику оператора умножения на функцию

$$Y_\alpha(t) \frac{\partial h_\alpha(t, x)}{\partial t}.$$

Для этого обозначим через $Y_\alpha(n+1, n+1)$ спектральную характеристику оператора умножения на функцию $Y_\alpha(t)$, а через $\dot{H}_\alpha(n+1, n+1)$ – спектральную характеристику оператора умножения на производную функции $h_\alpha(t, x)$ по времени, $\alpha = 1, 2, \ldots, m$. Указанные спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{e(i_0, i_1, \ldots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$, тогда

$$\mathbb{S}\left[Y_\alpha(t)\frac{\partial h_\alpha(t,x)}{\partial t}\right] = Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot \dot{H}_\alpha(n+1,n+1).$$

Если $Y_\alpha(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $Y_\alpha(t)$, $\alpha = 1,2,\ldots,m$, которая определена относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, то

$$Y_\alpha(n+1,n+1) = Y_\alpha(1,1)\otimes E(n,n),$$

где $E(n,n)$ – единичная матрица размерности $2n$.

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения (4). Учитывая линейность спектрального преобразования, получаем

$$\mathbb{S}\left[\left.\frac{\partial \rho(t,x\,|\,Y_0^t)}{\partial t}\right|_{\rho(t_0,x)=\varphi_0(x)}\right] = \mathbb{S}\left[\mathcal{L}\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\right] - \sum_{\alpha=1}^{m}\mathbb{S}\left[Y_\alpha(t)\mathcal{L}_\alpha\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\right] +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}\mathbb{S}\left[Y_\alpha(t)Y_\beta(t)\mathcal{L}_{\alpha\beta}\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\right] - \sum_{\alpha=1}^{m}\mathbb{S}\left[Y_\alpha(t)\frac{\partial h_\alpha(t,x)}{\partial t}\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\right].$$

Введем дополнительные обозначения. Пусть $P(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент t_0; $q(1,0;t_0)$ – матрица-столбец значений функций системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t = t_0$: $q(1,0;t_0) = \left[q(0,t_0)\ q(1,t_0)\ q(2,t_0)\ \ldots\right]^{\mathrm{T}}$; $\Phi_0(n,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$; $R(n+1,0)$ – спектральная характеристика функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$, определенная относительно базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

С учетом введенных обозначений запишем спектральный аналог робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи, т.е. уравнение относительно неизвестной спектральной характеристики $R(n+1,0)$:

$$\begin{gathered}
P(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0) - q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0) = L(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0) - \\
-\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot L_\alpha(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0) + \\
+\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot Y_\beta(n+1,n+1)\cdot L_{\alpha\beta}(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0) - \\
-\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot \dot{H}_\alpha(n+1,n+1)\cdot R(n+1,0).
\end{gathered} \tag{6}$$

Сгруппируем все слагаемые с множителем $R(n+1,0)$ в левой части равенства, а тензорное произведение $q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)$ перенесем в правую часть:

$$\begin{gathered}
\Big(P(n+1,n+1) - L(n+1,n+1) + \sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot L_\alpha(n+1,n+1) - \\
-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot Y_\beta(n+1,n+1)\cdot L_{\alpha\beta}(n+1,n+1) + \\
+\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot \dot{H}_\alpha(n+1,n+1)\Big)\cdot R(n+1,0) = q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0).
\end{gathered}$$

Тогда решение робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи в спектральной форме математического описания имеет вид

$$R(n+1,0)=\Big(P(n+1,n+1)-L(n+1,n+1)+\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot L_\alpha(n+1,n+1)-$$
$$-\sum_{\alpha=1}^{m}\sum_{\beta=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot Y_\beta(n+1,n+1)\cdot L_{\alpha\beta}(n+1,n+1)+$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{m}Y_\alpha(n+1,n+1)\cdot \dot{H}_\alpha(n+1,n+1)\Big)^{-1}\cdot\big(q(1,0;t_0)\otimes\Phi_0(n,0)\big). \tag{7}$$

Следовательно,

$$\rho(t,x\,|\,Y_0^t)=\sum_{i_0=0}^{\infty}\sum_{i_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty}r_{i_0 i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),\quad (t,x)\in T\times\mathrm{R}^n, \tag{8}$$

где $r_{i_0 i_1\ldots i_n}$ – элементы спектральной характеристики $R(n+1,0)$, т.е. коэффициенты разложения функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$ в ряд по функциям базисной системы $\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Найти точное значение всех коэффициентов разложения $r_{i_0 i_1\ldots i_n}$ вряд ли возможно, поэтому имеет смысл рассматривать приближенное решение в виде частичной суммы ряда (8). В этом случае индексы $i_0,i_1,\ldots,i_n$ должны принимать лишь конечное число значений, а все введенные ранее спектральные характеристики будут конечными матрицами:

$$\rho(t,x\,|\,Y_0^t)\approx\sum_{i_0=0}^{L_0-1}\sum_{i_1=0}^{L_1-1}\ldots\sum_{i_n=0}^{L_n-1}r_{i_0 i_1\ldots i_n}\cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x),$$

где натуральные числа $L_0,L_1,\ldots,L_n$ – это заданные порядки усечения спектральных характеристик.

Базисные системы для представления функций времени и вектора состояния могут формироваться с помощью как хорошо известных ортонормированных систем [6–10], так и новых [16]. После определения функции $\rho(t,x\,|\,Y_0^t)$, используя (5), можно получить апостериорную плотность вероятности $p(t,x\,|\,Y_0^t)$ и найти оптимальную оценку $\hat{X}(t)$.

Отметим, что, используя спектральную форму математического описания, можно выразить спектральные характеристики функций $\varphi(t,x\,|\,Y_0^t)$ и $p(t,x\,|\,Y_0^t)$, а также спектральную характеристику оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ через спектральную характеристику $R(n+1,0)$. Однако, это вряд ли целесообразно из-за возможного снижения точности оценивания, вызванного усечением спектральных характеристик. По этой же причине не следует выражать спектральные характеристики операторов умножения на функции $h_\alpha(t,x)$ через спектральные характеристики операторов умножения на функции $c_\alpha(t,x)$ и $q_{\alpha\beta}(t)$, $\alpha,\beta=1,2,\ldots,m$.

В настоящее время при решении задач анализа непрерывных систем управления спектральным методом, как правило, для представления функций времени используются базисные системы, заданные на стационарном отрезке [6], хотя первоначально спектральный метод анализа применялся с использованием базисных систем, заданных на нестационарном отрезке [10]. В задачах синтеза оптимального управления, если промежуток времени функционирования задан, базисные системы следует задавать на стационарном отрезке времени из-за необходимости учета краевых условий (такие задачи рассмотрены в [7]). В рассматриваемой задаче оптимальной фильтрации при выводе спектрального аналога робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи предполагалось, что отрезок времени функционирования зафиксирован вместе с измерениями Y_0^t, однако можно воспользоваться и базисными системами, заданными на нестационарном отрезке времени, что позволит решать задачу оценивания текущего состояния объекта наблюдения в темпе с поступлением измерений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00323-а).

Литература:

1. Марковская теория оценивания в радиотехнике / Под ред. М. С. Ярлыкова. – М.: Радиотехника, 2004.
2. Ориентация и навигация подвижных объектов: современные информационные технологии // Под ред. Б. С. Алешина, К. К. Веремеенко и А. И. Черноморского. – М.: Физматлит, 2006.
3. Рыбаков К. А. Решение робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи спектральным методом // Системи обробки інформації. – 2013, вып. 7 (114). – С. 139–143.
4. Lototsky S., Mikulevicius R., Rozovskii B.L. Nonlinear filtering revisited: A spectral approach // SIAM Journal on Control and Optimization. – 1997, v. 35, № 2. – P. 435–461.
5. Luo X., Yau S.S.-T. Hermite spectral method to 1-D forward Kolmogorov equation and its application to nonlinear filtering problems // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2013, v. 58, № 10. – P. 2495–2507.
6. Пантелеев А. В., Рыбаков К. А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.
7. Пантелеев А. В., Рыбаков К. А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. – М.: Изд-во МАИ, 2012.
8. Рыбин В. В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. – М.: Изд-во МАИ, 2011.
9. Рыбин В. В. Моделирование нестационарных систем управления целого и дробного порядка проекционно-сеточным спектральным методом. – М.: Изд-во МАИ, 2013.
10. Солодовников В. В., Семенов В. В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974.
11. Пантелеев А. В., Руденко Е. А., Бортаковский А. С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. – М.: Вузовская книга, 2008.
12. Luo X., Yau S.S.-T. Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2013, v. 58, № 10. – P. 2563–2578.
13. Hazewinkel M. Lectures on linear and nonlinear filtering // Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems (ed. by W.O. Schiehlen, W. Wedig). – Springer-Verlag, 1988. – P. 103–136.
14. Рыбаков К. А. Приближенное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации для стохастических дифференциальных систем методом статистических испытаний // Сибирский журнал вычислительной математики. – 2013, т. 16, № 4. – С. 377–391.
15. Yau S.S.-T. New algorithms in real time solution of the nonlinear filtering problem // Communications in Information and Systems. – 2008, v. 8, № 3. – P. 303–332.
16. Рыбаков К. А. Многопараметрические базисные системы для представления функций в неограниченных областях // Научный вестник МГТУ ГА. – 2013, № 195 (9). – С. 45–50.