

УДК 519.217.4

## АНАЛИЗ ЧАНДЛЕРОВСКИХ КОЛЕБАНИЙ ПОЛЮСА ЗЕМЛИ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ

К.А. РЫБАКОВ

**Статья представлена доктором физико-математических наук, профессором Козловым А.И.**

В статье рассматривается упрощенная стохастическая модель чандлеровских колебаний полюса Земли. Решается задача нахождения вероятностных характеристик положения полюса: плотности вероятности координат и их средних значений. Основной целью работы является апробация спектрального метода анализа стохастических систем.

**Ключевые слова:** чандлеровские колебания, спектральный метод, анализ стохастических систем.

### Введение

Описание, моделирование и анализ движения полюса Земли является довольно сложной задачей [1, 2]. В этой работе рассматривается математическая модель чандлеровских колебаний [3], которые представляют собой одну из составляющих движения полюса.

Цель работы состоит в апробации спектрального метода [4] анализа стохастических систем - моделей явлений, возникающих в самых разных областях: физике, технике, биологии, экономике, и позволяющих учитывать случайные возмущения (предполагается, что модель описывается системой стохастических дифференциальных уравнений Ито [5]).

Методика анализа стохастических систем спектральным методом не зависит от таких свойств коэффициентов уравнений модели, как стационарность, линейность, непрерывность, периодичность и т.п., поэтому такой упрощенный взгляд на сложное физическое явление представляется допустимым.

### 1. Постановка задачи

Модель чандлеровского движения полюса Земли описывается системой уравнений [3, 6]:

$$\dot{X}(t) = -\lambda X(t) - \omega Y(t) + \dot{\Phi}(t), \quad X(0) = X_0,$$

$$\dot{Y}(t) = \omega X(t) - \lambda Y(t) + \dot{\Psi}(t), \quad Y(0) = Y_0,$$

где  $t$  - время;  $X(t)$  и  $Y(t)$  - случайные процессы, характеризующие колебания полюса;  $\lambda$  - коэффициент затухания;  $\omega$  - частота чандлеровского колебания;  $\Phi(t)$  и  $\Psi(t)$  - процессы возбуждения. Начальные состояния  $X_0$  и  $Y_0$  - случайные величины, имеющие заданные распределения.

Обозначая  $X_1(t) = 10X(t)$ ,  $X_2(t) = 10Y(t)$  и полагая, что  $\dot{\Phi}(t)$  и  $\dot{\Psi}(t)$  - гауссовские независимые белые шумы [5, 6], перепишем исходные уравнения в виде

$$\begin{aligned} dX_1(t) &= (-\lambda X_1(t) - \omega X_2(t))dt + a dW_1(t), \\ dX_2(t) &= (\omega X_1(t) - \lambda X_2(t))dt + a dW_2(t), \end{aligned} \tag{1}$$

где  $W_1(t)$  и  $W_2(t)$  - стандартные винеровские процессы, не зависящие от  $X_0$  и  $Y_0$ ;  $a$  - числовой параметр, характеризующий интенсивность процессов возбуждения.

Формальных ограничений на реализации процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  нет, поэтому будем предполагать, что  $X_1, X_2 \in R = (-\infty, +\infty)$ . Следуя [3, 6], положим  $\lambda = 0.06$ ,  $\omega = 5.274$ ,  $a = 0.35$ . Начальные условия определяются соотношениями

$$X_1(0) = 10X_0, \quad X_2(0) = 10Y_0.$$

Пусть, например,  $X_0$  и  $Y_0$  имеют нормальные распределения: для  $X_0$  - с математическим ожиданием  $-0.03$  и дисперсией  $0.01$ , а для  $Y_0$  - с математическим ожиданием  $-0.27$  и дисперсией  $0.01$ . Таким образом, плотность вероятности  $\phi_0(x_1, x_2)$  начального состояния  $[X_1(0) X_2(0)]^T$  имеет вид

$$\phi_0(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{(x_1+0.3)^2 + (x_2+2.7)^2}{2}}.$$

Задача состоит в нахождении плотности вероятности  $\varphi(t, x, y)$ , описывающей распределение координат  $X$  и  $Y$  и их средних значений.

Заметим, что предположение  $X_1, X_2 \in R$  нужно исключительно для удобства последующих расчетов, а именно для аппроксимации плотности вероятности координат  $X_1$  и  $X_2$  функциями Эрмита [4, 7]. Линейная замена переменных ( $X_1(t) = 10X(t)$ ,  $X_2(t) = 10Y(t)$ ) требуется для использования функций Эрмита со стандартными параметрами:  $m = 0$ ,  $D = 1$ . Разумеется, на практике координаты  $X_1$  и  $X_2$  могут изменяться только в определенных пределах, а начальные условия следовало бы задавать соответствующими усеченными законами распределения или вообще зафиксировать, считая детерминированными (здесь средние значения  $-0.03$  и  $-0.27$  – это данные, зарегистрированные Международной службой широты (Международной службой вращения Земли) на начало 1968 г. [6]). Однако все эти допущения для апробации спектрального метода не играют существенной роли.

## 2. Соотношения для нахождения плотности вероятности и средних значений

В соответствии с системой (1) запишем вектор сноса и матрицу диффузии [4]

$$f(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} -\lambda x_1 - \omega x_2 \\ \omega x_1 - \lambda x_2 \end{bmatrix}, \quad g(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix},$$

следовательно, уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, которому удовлетворяет плотность вероятности  $\phi(t, x_1, x_2)$  координат  $X_1$  и  $X_2$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi(t, x_1, x_2)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x_1} [(-\lambda x_1 - \omega x_2) \phi(t, x_1, x_2)] - \frac{\partial}{\partial x_2} [(\omega x_1 - \lambda x_2) \phi(t, x_1, x_2)] + \\ & + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2}, \quad t \geq 0, \quad x_1, x_2 \in R. \end{aligned} \quad (2)$$

Начальное условие задается функцией  $\phi_0(x_1, x_2)$ , т. е.  $\phi(0, x_1, x_2) = \phi_0(x_1, x_2)$ .

Искомая плотность вероятности  $\varphi(t, x, y)$  связана с  $\phi(t, x_1, x_2)$  следующим соотношением

$$\varphi(t, x, y) = 100 \phi(t, 10x, 10y), \quad (3)$$

а средние значения координат  $X$  и  $Y$  можно найти по формулам

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x \varphi(t, x, y) dx dy, \quad m_y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} y \varphi(t, x, y) dx dy. \quad (4)$$

## 3. Применение спектрального метода

Применим методику расчета плотности вероятности спектральным методом (здесь и далее используются терминология, система обозначений и алгоритмы из [4]). Будем искать решение уравнения (2) при условии  $0 \leq t \leq 1.2$ , что примерно соответствует одному периоду колебаний  $\frac{2\pi}{\omega}$ . Задание времени окончания процесса  $t_1 = 1.2$  обусловлено необходимостью выбора базисной системы для аппроксимации плотности вероятности как функции времени.

Выберем в качестве базисной системы (полной ортонормированной системы функций) пространства  $L_2([0, t_1] \times R^2)$  систему  $\{\hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^{\infty}$ , где  $\{\hat{P}(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  - система полиномов Лежандра [4, 8], определенная на отрезке  $[0, t_1]$  и представляющая собой базис пространства  $L_2([0, t_1])$ ;  $\{\hat{\Phi}(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$  и  $\{\hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$  - системы функций Эрмита с параметрами  $m = 0, D = 1$  [7], образующие базис пространства  $L_2(R)$ .

Отметим, что при выборе вместо полиномов Лежандра системы функций, ортонормированной на полубесконечном интервале  $[0, +\infty)$  [9], необходимость задавать время окончания процесса отпадает, но в таком случае обычно бывает невелика точность расчетов. Системы функций  $\{\hat{\Phi}(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$  и  $\{\hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$  совпадают, хотя в общем случае для представления функций различных координат можно выбирать разные базисные системы.

Вычислим спектральные характеристики операторов дифференцирования по времени и координатам  $x_1$  и  $x_2$ , а также операторов умножения на коэффициенты сноса и диффузии относительно выбранной базисной системы  $\{\hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^{\infty}$ .

Спектральная характеристика  $P(3,3)$  оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент представляется в виде тензорного произведения спектральной характеристики  $P^t(1,1)$  оператора дифференцирования с учетом значения функции в начальный момент времени, определенной относительно системы полиномов Лежандра, и четырехмерной единичной матрицы  $E(2,2) = E(1,1) \otimes E(1,1)$

$$P(3,3) = P^t(1,1) \otimes E(2,2).$$

Напомним, что  $P^t(1,1)$  - бесконечная матрица ( $P^t(1,1) = (P_{ij}^t)_{i,j=0}^{\infty}$ ), для элементов которой справедливо соотношение

$$P_{ij}^t = \hat{P}(i,0) \hat{P}(j,0) + \int_0^{t_1} \hat{P}(i,t) \frac{d\hat{P}(j,t)}{dt} dt, \quad (5)$$

а  $E(1,1)$  - двумерная единичная матрица

$$E(1,1) = (E_{ij})_{i,j=0}^{\infty}, \quad E_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Согласно свойствам спектральных характеристик  $P_1(3,3)$  и  $P_2(3,3)$  операторов дифференцирования первого порядка по координатам  $x_1$  и  $x_2$  соответственно, получаем

$$P_1(3,3) = E(1,1) \otimes P^x(1,1) \otimes E(1,1),$$

$$P_2(3,3) = E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes P^x(1,1),$$

где  $P^x(1,1)$  - спектральная характеристика оператора дифференцирования, определенная относительно системы функций Эрмита

$$P^x(1,1) = (P_{ij}^x)_{i,j=0}^{\infty}, \quad P_{ij}^x = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(i,x) \frac{d\hat{\Phi}(j,x)}{dx} dx. \quad (6)$$

Для спектральных характеристик  $P_{11}(3,3)$  и  $P_{22}(3,3)$  операторов дифференцирования второго порядка по координатам  $x_1$  и  $x_2$  справедливо соотношение

$$P_{11}(3,3) = (P_1(3,3))^2 = E(1,1) \otimes (P^x(1,1))^2 \otimes E(1,1),$$

$$P_{22}(3,3) = (P_2(3,3))^2 = E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes (P^x(1,1))^2.$$

Перейдем к вычислению спектральных характеристик операторов умножения на коэффициенты сноса  $f_1(t, x_1, x_2)$  и  $f_2(t, x_1, x_2)$  (координаты вектора сноса  $f(t, x_1, x_2)$ ). Принимая во внимание свойство линейности спектрального преобразования и свойства спектрального преобразования операторов умножения [4], получаем выражение для спектральной характеристики  $F_1(3,3)$  оператора умножения на функцию  $f_1(t, x_1, x_2) = -\lambda x_1 - \omega x_2$ :

$$F_1(3,3) = -\lambda \cdot (E(1,1) \otimes A(1,1) \otimes E(1,1)) - \omega \cdot (E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes A(1,1)),$$

в котором  $A(1,1)$  - спектральная характеристика оператора умножения на функцию  $a(x) = x$ , вычисленная относительно системы функций Эрмита, т. е.

$$A(1,1) = (A_{ij})_{i,j=0}^{\infty}, \quad A_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \hat{\Phi}(i, x) \hat{\Phi}(j, x) dx,$$

причем для элементов  $A_{ij}$ , как и для  $P_{ij}^t$ ,  $P_{ij}^x$  (5), (6), получены аналитические выражения [4, 7-9].

Аналогично, спектральная характеристика  $F_2(3,3)$  оператора умножения на функцию  $f_2(t, x_1, x_2) = \omega x_1 - \lambda x_2$  представляется выражением

$$F_2(3,3) = \omega \cdot (E(1,1) \otimes A(1,1) \otimes E(1,1)) - \lambda \cdot (E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes A(1,1)).$$

Так как матричная функция  $g(t, x_1, x_2)$  является диагональной, необходимо вычислить только спектральные характеристики операторов умножения на коэффициенты диффузии  $g_{11}(t, x_1, x_2)$  и  $g_{22}(t, x_1, x_2)$  ( $g_{11}(t, x_1, x_2) = g_{22}(t, x_1, x_2) = a^2$ ). Применяя свойства спектрального преобразования операторов умножения, получаем

$$G_{11}(3,3) = G_{22}(3,3) = a^2 \cdot E(3,3),$$

где  $E(3,3)$  – шестимерная единичная матрица ( $E(3,3) = E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes E(1,1)$ ).

Сформируем базисную систему пространства  $L_2(R^2)$  для представления функции  $\phi_0(x_1, x_2)$ :  $\{\hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_1, i_2=0}^{\infty}$ . Спектральная характеристика  $\Phi_0(2,0)$  плотности вероятности  $\phi_0(x_1, x_2)$  начального состояния  $[X_1(0) X_2(0)]^T$ , определенная относительно базисной системы  $\{\hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_1, i_2=0}^{\infty}$ , задается соотношением [4]

$$\Phi_0(2,0) = (\phi_{0i_1 i_2})_{i_1, i_2=0}^{\infty},$$

где

$$\phi_{0i_1 i_2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_0(x_1, x_2) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2) dx_1 dx_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_1+0.3)^2}{2}} \hat{\Phi}(i_1, x_1) dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x_2+2.7)^2}{2}} \hat{\Phi}(i_2, x_2) dx_2.$$

Матрица-столбец  $q(1,0;0)$  значений функций  $\hat{P}(i_0, t)$  в точке  $t=0$  имеет вид

$$q(1,0;0) = \left[ \hat{P}(0,0) \quad \hat{P}(1,0) \quad \hat{P}(2,0) \quad \dots \right]^T.$$

Составим уравнение обобщенной характеристической функции [4]

$$P(3,3) \cdot \Phi(3,0) - q(1,0;0) \otimes \Phi_0(2,0) = -P_1(3,3) \cdot F_1(3,3) \cdot \Phi(3,0) - P_2(3,3) \cdot F_2(3,3) \cdot \Phi(3,0) + \\ + \frac{1}{2} \cdot P_{11}(3,3) \cdot G_{11}(3,3) \cdot \Phi(3,0) + \frac{1}{2} \cdot P_{22}(3,3) \cdot G_{22}(3,3) \cdot \Phi(3,0), \quad (7)$$

где  $\Phi(3,0)$  - обобщенная характеристическая функция, т.е. спектральная характеристика плотности вероятности  $\phi(t, x_1, x_2)$ , определенная относительно базисной системы

$$\{\hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^{\infty}$$

$$\Phi(3,0) = (\phi_{i_0 i_1 i_2})_{i_0, i_1, i_2=0}^{\infty}, \quad \phi_{i_0 i_1 i_2} = \int_0^{t_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t, x_1, x_2) \hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2) dt dx_1 dx_2.$$

Нетрудно видеть, что уравнение обобщенной характеристической функции (7) линейно по  $\Phi(3,0)$ . Фактически, это система линейных уравнений для коэффициентов  $\phi_{i_0 i_1 i_2}$  разложения плотности вероятности  $\phi(t, x_1, x_2)$  в ряд по функциям базисной системы  $\{\hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2)\}_{i_0, i_1, i_2=0}^{\infty}$ , записанная в матричной форме. Решение уравнения (7) записывается в виде

$$\Phi(3,0) = \left[ P(3,3) + P_1(3,3) \cdot F_1(3,3) + P_2(3,3) \cdot F_2(3,3) - \frac{a^2}{2} \cdot (P_{11}(3,3) + P_{22}(3,3)) \right]^{-1} \cdot (q(1,0;0) \otimes \Phi_0(2,0)),$$

а плотность вероятности  $\phi(t, x_1, x_2)$  определяется по формуле

$$\phi(t, x_1, x_2) = \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \phi_{i_0 i_1 i_2} \hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2), \quad t \in [0, t_1], \quad x_1, x_2 \in R.$$

При вычислениях ограничимся конечным числом базисных функций, т. е. зададим порядки усечения спектральных характеристик (таким образом, все определенные выше спектральные характеристики будут представляться матрицами с конечным числом элементов):  $L_0 = L_1 = L_2 = 16$ . Тогда приближенное решение уравнения (2) можно представить так:

$$\phi(t, x_1, x_2) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \sum_{i_2=0}^{L_2-1} \phi_{i_0 i_1 i_2} \hat{P}(i_0, t) \hat{\Phi}(i_1, x_1) \hat{\Phi}(i_2, x_2), \quad t \in [0, t_1], \quad x_1, x_2 \in R,$$

а для получения искоемых характеристик применяются соотношения (3) и (4).

Графики функции  $\varphi(t, x, y)$  в различные моменты времени  $t$  изображены на рис. 1, а графики математических ожиданий  $m_x(t)$  и  $m_y(t)$  – на рис. 2.

По плотности вероятности  $\varphi(t, x, y)$  могут быть найдены начальные и центральные моменты любого порядка. Для найденных математических ожиданий  $m_x(t)$  и  $m_y(t)$  нормы разности между точным решением и приближенным, полученным спектральным методом, в пространстве квадратично интегрируемых функций не превосходят значения  $4.8 \cdot 10^{-5}$ , а для пространства непрерывных функций – значения  $8.3 \cdot 10^{-5}$  (максимальное отклонение).

### Заключение

В статье рассмотрена упрощенная линейная стационарная модель колебаний полюса Земли, на ее примере продемонстрировано применение спектрального метода анализа стохастических систем. При усложнении модели (например, [10]) методика решения останется без изменений и в этом состоит одно из важнейших преимуществ спектрального метода. В частности, могут измениться соотношения для расчета спектральных характеристик операторов умножения на коэффициенты сноса и диффузии или увеличиться размерности матриц, формирующих уравнение обобщенной характеристической функции, в случае введения дополнительных координат. Другим преимуществом спектрального метода является развитое алгоритмическое и программное обеспечение [11].

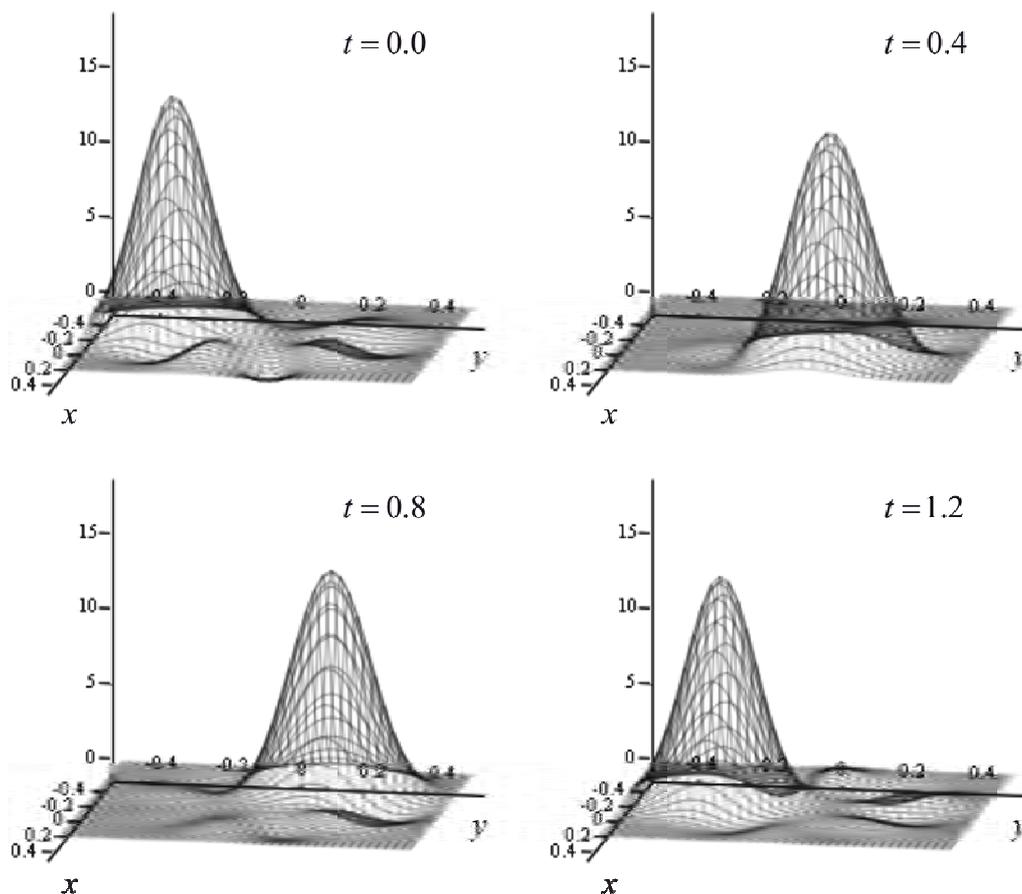


Рис. 1. Графики плотности вероятности  $\varphi(t, x, y)$

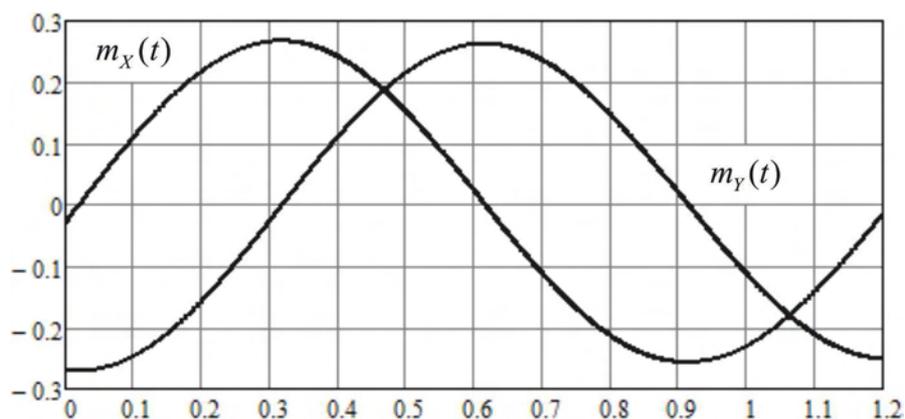


Рис. 2. Графики математических ожиданий  $m_x(t)$  и  $m_y(t)$

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Манк У., Макдональд Г. Вращение Земли. - М.: Мир, 1964.
2. Воротков М.В., Горшков В.Л., Миллер Н.О., Прудникова Е.Я. Исследование основных составляющих в движении полюса Земли // Известия Главной астрономической обсерватории в Пулкове. - 2002. - № 216. - С. 406-414.

3. **Арато М., Колмогоров А.Н., Синай Я.Г.** Об оценке параметров комплексного стационарного гауссовского марковского процесса. В кн.: Теория вероятностей и математическая статистика (избранные труды А.Н. Колмогорова). - М.: Наука, 1986. - С. 436-440. (ДАН СССР. - 1962. - Т. 146. - № 4. - С. 747-750.)
4. **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. - М.: Вузовская книга, 2006.
5. **Пугачев В.С., Сеницын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. - М.: Наука, 1990.
6. **Кузнецов Д.Ф.** Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. – СПб.: Политехнический ун-т, 2009.
7. **Романов В.А., Рыбаков К.А.** Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Электронный журнал «Труды МАИ». - 2010. - № 39. - <http://www.mai.ru>.
8. **Солодовников В.В., Семенов В.В.** Спектральная теория нестационарных систем управления. - М.: Наука, 1974.
9. **Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат // Электронный журнал «Труды МАИ». - 2004. - № 16. - <http://www.mai.ru>.
10. **Сеницын И.Н.** Корреляционные методы построения аналитических информационных моделей флуктуаций полюса Земли по априорным данным // Информатика и ее применения. - 2007. - Т. 1. - Вып. 2. - С. 2-14.
11. **Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Анализ стохастических систем на основе решения уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова. В кн.: Нестационарные системы автоматического управления: анализ, синтез и оптимизация / под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. - М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007. - С. 312-338.

## CHANDLER WOBBLE ANALYSIS BY THE SPECTRAL METHOD

**Rybakov K.A.**

The paper deals with a simplified stochastic model of Chandler wobble. We study the problem of finding the pole coordinates: of the probability density function characteristics and their mean values. The main aim of this work is a testing of the spectral method analysis for stochastic systems.

**Key words:** Chandler wobble, spectral method, stochastic system analysis.

### Сведения об авторе

**Рыбаков Константин Александрович**, 1979 г.р., окончил МАИ (2002), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики МАИ, автор 60 научных работ, область научных интересов - анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания систем управления.