

УДК 681.514

## ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПУАССОНОВСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ<sup>1</sup>

К.А. РЫБАКОВ

Статья представлена доктором технических наук, профессором Самохиным А.В.

В статье рассматриваются стохастические системы управления при импульсных воздействиях, образующих пуассоновские потоки событий и приводящих к разрывам траекторий системы. Решается задача нахождения плотности вероятности вектора состояния. В основе предлагаемого метода лежит использование спектральной формы математического описания систем управления.

**Ключевые слова:** задача анализа, импульсные воздействия, пуассоновский поток событий, пуассоновский процесс, спектральный метод, стохастическая система, уравнение Колмогорова-Феллера.

### Введение

Для описания математических моделей различных явлений, например, процессов в сложных технических системах (управление движущимися объектами, радиолокационные и измерительные системы, электрические цепи с импульсными источниками), в финансовой математике (описание динамики курсов акций, страхование), в математической биологии и медицине (управление биомассой, действие лекарственных препаратов) широкое применение нашли стохастические дифференциальные уравнения с пуассоновской составляющей [1-4]. Такие модели, используя терминологию теории управления, называют стохастическими системами с импульсными воздействиями, а также системами со случайным периодом квантования. Наличие импульсных воздействий приводит к тому, что в случайные моменты времени вектор состояния системы получает случайные приращения, образующие пуассоновский поток событий.

В статье приводятся формы математического описания стохастических систем рассматриваемого класса, описывается разработанный метод приближенного анализа – нахождения вероятностных характеристик вектора состояния системы с помощью спектральной формы математического описания систем управления [5-8]. Спектральный метод анализа состоит в приближенном решении интегро-дифференциального уравнения в частных производных, описывающего эволюцию плотности вероятности вектора состояния (уравнение Колмогорова-Феллера [1; 2]), с помощью представления искомой плотности вероятности в виде функционального ряда по подходящему базису.

Преимущества предлагаемого подхода состоят в простоте реализации и универсальности, а именно, возможности решения задачи анализа для линейных и нелинейных, одномерных и многомерных моделей стохастических систем, для различных законов распределения величин приращений вектора состояния и их интенсивностей. Апробация предлагаемого метода проводится на примерах анализа воздействия импульсов на электрические цепи.

### 1. Постановка задачи

Приведем различные варианты описания стохастических систем с разрывами траекторий, образующими пуассоновский поток событий. Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение Ито с пуассоновской составляющей [3]

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где  $X = [X_1 \dots X_n]^T \in R^n$  – вектор состояния;  $t \in T$ ,  $T = [t_0, t_1]$  – отрезок времени функционирования системы;  $f(t, x): T \times R^n \rightarrow R^n$  – вектор-функция размерности  $n \times 1$ ;  $\sigma(t, x): T \times R^n \rightarrow R^{n \times s}$  –

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00892-а).

матричная функция размеров  $n \times s$ ;  $W(t)$  –  $s$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния  $X_0$ ;  $Q(t)$  – общий пуассоновский процесс, заданный в форме

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k.$$

В правой части последнего равенства  $P(t)$  – пуассоновский процесс;  $\Delta_k$  – независимые случайные величины из  $R^n$ , распределение которых задано плотностью вероятности  $\psi(\tau_k, \Delta)$ , т.е. вектор состояния  $X$  получает случайные приращения в моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots$

$$X(\tau_k) = X(\tau_k - 0) + \Delta_k.$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности  $\psi(\tau_k, x | z)$ , характеризующая распределение  $X(\tau_k)$  при условии  $X(\tau_k - 0) = z$ . В частном случае  $\psi(\tau_k, x | z) = \psi(\tau_k, x - z)$ .

Пуассоновский поток событий и, следовательно, моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , а также пуассоновский процесс  $P(t)$  определяются интенсивностью  $\lambda(t)$ .

Заметим также, что пуассоновская составляющая  $dQ(t)$  может быть формально записана в виде [1; 2]

$$dQ(t) = \sum_k \Delta_k \delta(t - \tau_k) dt,$$

где  $\delta(t)$  – асимметричная дельта-функция.

Для описания математической модели стохастической системы с пуассоновской составляющей может применяться уравнение Колмогорова-Феллера – интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее эволюцию плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  вектора состояния (в случае, если такая плотность существует)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x) \varphi(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x) \varphi(t, x)] - \\ & - \lambda(t) \varphi(t, x) + \lambda(t) \int_{R^n} \psi(t, x | z) \varphi(t, z) dz, \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $g_{ij}(t, x)$  – элементы матрицы  $g(t, x) = \sigma(t, x) \sigma^T(t, x)$ ;  $\varphi_0(x)$  – плотность вероятности начального состояния  $X_0$ .

Существуют и другие формы записи математической модели стохастических систем с пуассоновской составляющей [4], но далее они не используются.

Задача анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей заключается в нахождении вероятностных характеристик вектора состояния (плотности вероятности моментных характеристик) в соответствии с заданной математической моделью.

## 2. Спектральный метод анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей

Спектральный метод анализа базируется на применении спектральной формы математического описания систем управления [5]. В основе этого подхода лежит представление функций их спектральными характеристиками – упорядоченными совокупностями коэффициентов разложения в ряды по подходящей системе ортонормированных или биортонормированных функций. Применение спектральной формы математического описания позволяет перейти от операторных уравнений (в данном случае интегро-дифференциального уравнения (2)) к алгебраическим (для коэффициентов разложения), которые представляются в матричной форме. Специфика задач и методика формирования систем ортонормированных функций приводят к необходи-

мости использовать математический аппарат теории многомерных матриц, который в достаточном объеме изложен в [6; 7]. Там же содержатся определения спектральных характеристик и спектральных преобразований, их свойства.

Для применения спектральной формы математического описания удобнее использовать операторную форму записи уравнения (2)

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x) - \mathcal{L}\varphi(t, x) + \mathcal{H}\varphi(t, x), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \quad (3)$$

где линейные операторы  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{H}$  определяются выражениями

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\varphi(t, x) &= -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x)], \\ \mathcal{L}\varphi(t, x) &= \lambda(t)\varphi(t, x), \quad \mathcal{H}\varphi(t, x) = \lambda(t) \int_{R^n} \psi(t, x | z)\varphi(t, z) dz. \end{aligned}$$

Оператор  $\mathcal{A}$  называют оператором Фоккера-Планка-Колмогорова,  $\mathcal{L}$  - оператор умножения,  $\mathcal{H}$  - оператор Фредгольма.

Пусть  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$  - ортонормированный базис пространства  $L_2(T \times R^n)$ , причем функции  $e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)$  порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  и  $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$  пространств  $L_2(T)$  и  $L_2(R^n)$  соответственно, т.е.  $e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) = q(i_0, t)p(i_1, \dots, i_n, x)$ ,  $i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots$

Напомним [6], что спектральной характеристикой некоторой функции  $z(t, x)$ , определенной относительно базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ , называется  $(n+1)$ -мерная бесконечная матрица  $Z(n+1, 0)$  с элементами

$$\begin{aligned} z_{i_0 i_1 \dots i_n} &= (e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), z(t, x))_{L_2(T \times R^n)} = \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) z(t, x) dt dx, \\ & i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

т.е.  $z_{i_0 i_1 \dots i_n}$  - коэффициенты разложения функции  $z(t, x)$  в ряд по функциям базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ , обозначение  $\mathbb{S}[z(t, x)] = Z(n+1, 0)$ . Спектральная характеристика плотности вероятности называется обобщенной характеристической функцией.

Применяя спектральное преобразование  $\mathbb{S}$  (отображение, ставящее в соответствие функции ее спектральную характеристику) к левой и правой частям уравнения (3), получаем

$$\mathbb{S} \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \Big|_{\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)} \right] = \mathbb{S}[\mathcal{A}\varphi(t, x)] - \mathbb{S}[\mathcal{L}\varphi(t, x)] + \mathbb{S}[\mathcal{H}\varphi(t, x)]$$

или в развернутом виде

$$\begin{aligned} \mathbb{S} \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \Big|_{\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)} \right] &= -\sum_{i=1}^n \mathbb{S} \left[ \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x)] \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbb{S} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x)] \right] - \\ & - \mathbb{S}[\lambda(t)\varphi(t, x)] + \mathbb{S} \left[ \lambda(t) \int_{R^n} \psi(t, x | z)\varphi(t, z) dz \right]. \end{aligned}$$

Согласно свойствам спектрального преобразования функций и линейных операторов имеем

$$\mathbb{S} \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} \Big|_{\varphi(t_0, x) = \varphi_0(x)} \right] = P(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0),$$

где  $P(n+1, n+1) = \mathcal{P}(n+1, n+1) + (q(1, 0; t_0) \cdot q^T(1, 0; t_0)) \otimes E(n, n)$ .

В этих соотношениях  $\mathcal{P}(n+1, n+1)$  – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени [6], определенная относительно системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ ;  $\Phi(n+1, 0)$  – спектральная характеристика плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  вектора состояния  $X$  (обобщенная характеристическая функция), определенная относительно той же базисной системы;  $E(n, n)$  –  $2n$ -мерная единичная матрица;  $q(1, 0; t_0)$  – матрица-столбец значений функций базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$  при  $t = t_0$

$$q(1, 0; t_0) = [q(0, t_0) \quad q(1, t_0) \quad q(2, t_0) \quad \dots]^T.$$

Через  $\Phi_0(n, 0)$  обозначена спектральная характеристика плотности вероятности  $\varphi_0(x)$  начального состояния  $X_0$ , определенная относительно системы  $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ . Это означает, что  $\Phi_0(n, 0)$  –  $n$ -мерная бесконечная матрица с элементами

$$\varphi_{0i_1 \dots i_n} = (p(i_1, \dots, i_n, x), \varphi_0(x))_{L_2(R^n)} = \int_{R^n} p(i_1, \dots, i_n, x) \varphi_0(x) dx, \quad i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

Далее

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}\varphi(t, x)] = A(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0);$$

$$\mathbb{S}[\mathcal{L}\varphi(t, x)] = \Lambda(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0); \quad \mathbb{S}[\mathcal{H}\varphi(t, x)] = H(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0),$$

где  $A(n+1, n+1)$ ,  $\Lambda(n+1, n+1)$  и  $H(n+1, n+1)$  – спектральные характеристики линейных операторов  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{H}$  соответственно.

Спектральная характеристика линейного оператора  $\mathcal{A}$  – это  $2(n+1)$ -мерная бесконечная матрица  $A(n+1, n+1)$ , элементы которой определяются соотношением

$$a_{i_0 i_1 \dots i_n j_0 j_1 \dots j_n} = (e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \mathcal{A}e(j_0, j_1, \dots, j_n, t, x))_{L_2(T \times R^n)} = \\ = \int_{t_0}^{t_1} \int_{R^n} e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) \mathcal{A}e(j_0, j_1, \dots, j_n, t, x) dt dx, \quad i_0, i_1, \dots, i_n, j_0, j_1, \dots, j_n = 0, 1, 2, \dots \quad (6)$$

Спектральные характеристики  $\Lambda(n+1, n+1)$  и  $H(n+1, n+1)$  линейных операторов  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{H}$  определяются аналогично.

Одно из преимуществ спектральной формы математического описания систем управления состоит в развитом алгоритмическом обеспечении: явным и рекуррентным формулам для расчета спектральных характеристик линейных операторов, соответствующих элементарным звеньям систем управления, для различных базисных систем [5–10]. Это операторы умножения, дифференцирования и интегрирования. Поэтому спектральную характеристику  $A(n+1, n+1)$  линейного оператора  $\mathcal{A}$  целесообразно представлять следующим образом [6]

$$A(n+1, n+1) = - \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i(n+1, n+1) \cdot F_i(n+1, n+1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1) \cdot G_{ij}(n+1, n+1), \quad (7)$$

где  $\mathcal{P}_i(n+1, n+1)$  и  $\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1)$  – спектральные характеристики операторов дифференцирования первого и второго порядков по координатам  $x_i$  и  $x_j$ , а через  $F_i(n+1, n+1)$  и  $G_{ij}(n+1, n+1)$  обозначены спектральные характеристики операторов умножения на функции  $f_i(t, x)$  и  $g_{ij}(t, x)$  соответственно;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ .

Таким образом

$$P(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0) = A(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - \\ - L(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) + H(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0)$$

или

$$(P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + L(n+1, n+1) - H(n+1, n+1)) \cdot \Phi(n+1, 0) = q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0). \quad (8)$$

Эти уравнения, как и в случае отсутствия пуассоновской составляющей, будем называть уравнениями обобщенной характеристической функции [6].

Они представляют собой матричную запись системы линейных неоднородных алгебраических уравнений, неизвестными в которых являются элементы  $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$  матрицы  $\Phi(n+1, 0)$  – коэффициенты разложения плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  в функциональный ряд по функциям базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ . Их решение записывается в форме

$$\Phi(n+1, 0) = (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + L(n+1, n+1) - H(n+1, n+1))^{-1} \cdot \\ \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)). \quad (9)$$

С учетом (7) это решение можно представить так

$$\Phi(n+1, 0) = (P(n+1, n+1) + \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i(n+1, n+1) \cdot F_i(n+1, n+1) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1) \cdot G_{ij}(n+1, n+1) + L(n+1, n+1) - H(n+1, n+1))^{-1} \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)).$$

Отметим, что более детальное представление для некоторых спектральных характеристик, входящих в уравнения обобщенной характеристической функции, дано в [6].

После нахождения обобщенной характеристической функции  $\Phi(n+1, 0)$  плотность вероятности  $\varphi(t, x)$  вектора состояния может быть представлена в виде ряда

$$\varphi(t, x) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (t, x) \in T \times R^n. \quad (10)$$

Представление решения задачи анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей рядом (10) носит скорее теоретический характер. На практике получить всю совокупность коэффициентов разложения функции  $\varphi(t, x)$  в общем случае вряд ли возможно. Для этого требуется, чтобы многомерная матрица  $P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + L(n+1, n+1) - H(n+1, n+1)$  или ее сечения и структура имели специальный вид [6], например, треугольный или ленточный. Поэтому далее будем говорить о приближенном решении задачи анализа, т.е. о представлении решения в виде частичной суммы

$$\varphi(t, x) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \dots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (11)$$

где числа  $L_0, L_1, \dots, L_n$  – порядки усечения спектральных характеристик. Индексы в формулах (4)–(6) в этом случае принимают лишь конечное число значений:  $i_0, j_0 = 0, 1, \dots, L_0 - 1$ ,  $i_1, j_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1$ , ...,  $i_n, j_n = 0, 1, \dots, L_n - 1$ ; все перечисленные спектральные характеристики будут конечными матрицами, а уравнение (8) – матричная запись системы конечного числа линейных алгебраических уравнений (число уравнений и число неизвестных:  $L = L_0 \cdot L_1 \dots L_n$ ).

По найденной спектральной характеристике  $\Phi(n+1, 0)$  могут быть определены маргинальные плотности вероятности (при  $n > 1$ ) и моментные характеристики вектора состояния с использованием свойств спектральных характеристик линейных функционалов [11]. Для определения маргинальных плотностей вероятности спектральным методом достаточно, чтобы функ-

ции базисной системы  $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$  порождались всевозможными произведениями функций базисных систем  $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \dots, \{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$  пространства  $L_2(R)$ , т.е.  $p(i_1, \dots, i_n, x) = p_1(i_1, x_1) \cdots p_n(i_n, x_n)$ ,  $i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots$ . В качестве базисных систем  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ ,  $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}, \dots, \{p_n(i_n, x_n)\}_{i_n=0}^{\infty}$  могут применяться подходящие для конкретных задач системы ортонормированных функций: полиномиальные, тригонометрические, кусочно-постоянные и др. [5-10; 12].

### 3. Примеры анализа воздействия импульсов на электрические цепи

Рассмотрим задачу определения вероятностных характеристик напряжения на конденсаторе в RC-цепи (интегрирующей цепи; рис. 1а).

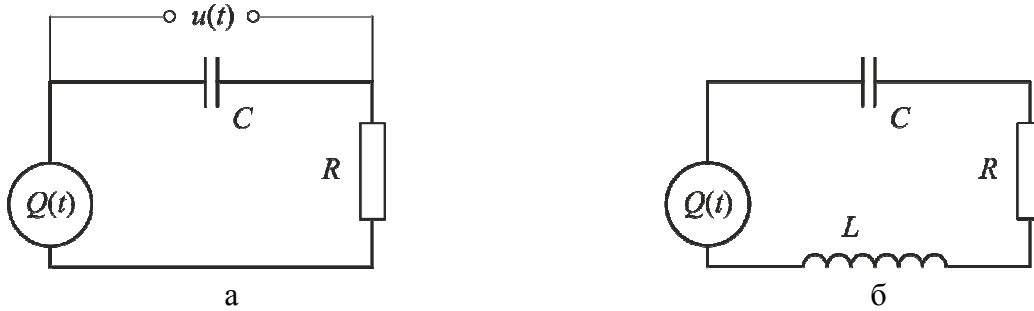


Рис. 1. RC-цепь и RCL-цепь с генераторами импульсов

Уравнение, описывающее динамику изменения напряжения на конденсаторе, задается в виде [2]

$$du(t) = -\frac{1}{RC}u(t)dt + \sigma dW(t) + dQ(t), \quad u(0) = u_0, \quad Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k,$$

где  $R$  – сопротивление;  $C$  – емкость конденсатора;  $\sigma$  – параметр, характеризующий интенсивность помехи;  $u_0$  – начальное напряжение;  $\Delta_k$  – амплитуды скачков напряжения (интенсивность импульсов –  $\lambda$ );  $t \in [0, t_1]$ ,  $t_1 = RC$  – время окончания процесса.

Для численных расчетов положим  $R = 8 \cdot 10^3$  Ом (8 кОм),  $C = 2.5 \cdot 10^{-4}$  ф (250 мкф),  $\sigma = 0.14$ ,  $\lambda = 0.1$ , начальное напряжение  $u_0$  имеет нормальное распределение с параметрами  $m_{u_0} = 1.5$  В,  $\sigma_{u_0} = 0.2$  В (дисперсия  $D_{u_0} = 0.04$ ), случайные величины  $\Delta_k$  имеют логарифмически нормальное распределение с параметрами  $m_{\Delta} = 0.2$  и  $\sigma_{\Delta} = 0.15$  – математическое ожидание и среднеквадратическое отклонение для  $\ln \Delta_k$ .

При решении задачи спектральным методом в качестве базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  были выбраны полиномы Лежандра [6], а в качестве базисной системы  $\{p(i_1, x)\}_{i_1=0}^{\infty}$  – функции Эрмита [9] с параметрами  $m = 7$  и  $D = 1$ , порядки усечения  $L_0 = 16$  и  $L_1 = 16$ ; для удобства вычислений предварительно была сделана линейная замена переменной:  $5u \rightarrow X$ . Результаты вычислений для плотности вероятности напряжения приведены на рис. 2а. На рис. 2б сплошной линией показано математическое ожидание напряжения, пунктиром для сравнения показано математическое ожидание без учета скачков напряжения ( $\lambda = 0$ ).

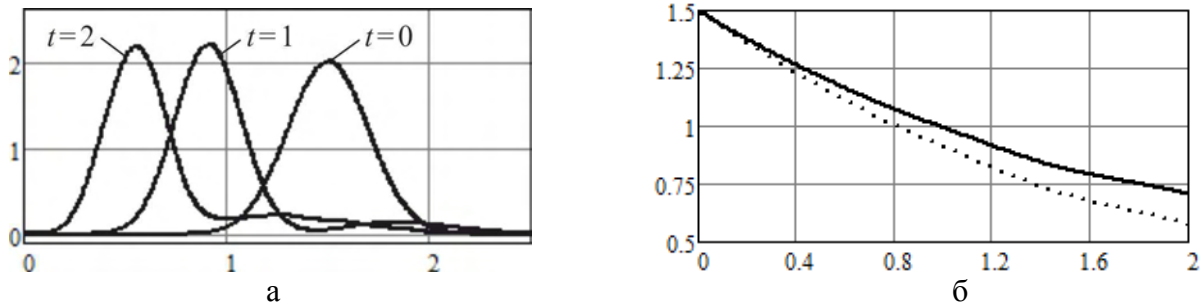


Рис. 2. Вероятностные характеристики напряжения для RC-цепи

Далее рассмотрим задачу определения вероятностных характеристик силы тока в RCL-цепи (колебательном контуре; рис. 1б). Следуя [2], будем использовать математическую модель

$$LC \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + RC \frac{di(t)}{dt} + i(t) = \frac{dQ(t)}{dt}, \quad i(0) = i_0, \quad \frac{di(0)}{dt} = i'_0, \quad Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k,$$

где  $R$  – сопротивление;  $C$  – емкость конденсатора;  $L$  – индуктивность;  $i_0$  и  $i'_0$  – начальные данные;  $\Delta_k$  – амплитуды скачков (интенсивность импульсов –  $\lambda$ );  $t \in [0, t_1]$ ,  $t_1 = 0.0001$  с – время окончания процесса.

Зададим числовые значения для параметров контура, начальных данных и параметров источника импульсов:  $R = 80$  Ом;  $C = 1.2 \cdot 10^{-6}$  ф (1.2 мкф);  $L = 1.5 \cdot 10^{-2}$  Гн (15 мГн);  $\lambda = 2000$ . Начальная сила тока  $i_0$  случайна и имеет нормальное распределение с параметрами  $m_{i_0} = 0$  А и  $\sigma_{i_0} = 0.1$  А;  $i'_0$  имеет нормальное распределение с параметрами  $m_{i'_0} = 2.5 \cdot 10^3$  А/с,  $\sigma_{i'_0} = 10^3$  А/с. Случайные величины  $\Delta_k$  имеют нормальное распределение с параметрами  $m_{\Delta} = 9 \cdot 10^{-6}$  А·с,  $\sigma_{\Delta} = 1.8 \cdot 10^{-6}$  А·с (дисперсия  $D_{\Delta} = 3.24 \cdot 10^{-12}$ ).

При решении задачи спектральным методом в качестве базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  были выбраны полиномы Лежандра [6], а в качестве базисных систем  $\{p_1(i_1, x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$  и  $\{p_2(i_2, x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$  – функции Эрмита [9] с параметрами  $m = 0$  и  $D = 0.01$ , порядки усечения  $L_0 = 8$  и  $L_1 = L_2 = 20$  (предварительно уравнение было преобразовано к эквивалентной системе двух уравнений:  $i \rightarrow X_1$ ,  $di/dt \rightarrow X_2$ ; кроме того, для увеличения точности расчетов был выбран другой масштаб времени, чтобы коэффициенты в уравнении, описывающем динамику изменения силы тока, были одного порядка:  $t \in [0, 1]$ ,  $\lambda = 0.2$ ). Результаты вычислений для плотности вероятности силы тока приведены на рис. 3а. На рис. 3б сплошной линией показано математическое ожидание силы тока; пунктиром для сравнения показано математическое ожидание без учета скачков напряжения ( $\lambda = 0$ ).

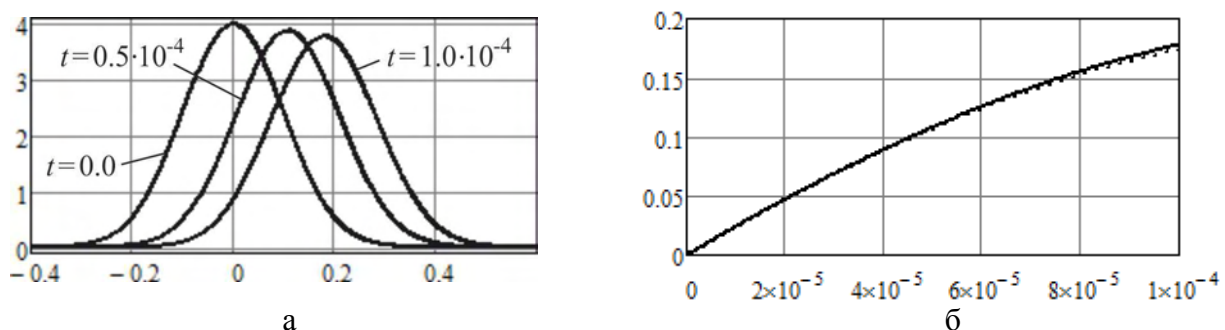


Рис. 3. Вероятностные характеристики силы тока для RCL-цепи

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Артемьев В.М., Ивановский А.В.** Дискретные системы управления со случайным периодом квантования. - М.: Энергоатомиздат, 1986.
2. **Тихонов В.И., Миронов М.А.** Марковские процессы. - М.: Сов. радио, 1977.
3. **Пугачев В.С., Синицын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. - М.: Наука, 1990.
4. **Hanson F.B.** Applied Stochastic Processes and Control for Jump-Diffusions. – SIAM, 2007.
5. **Солодовников В.В., Семенов В.В.** Спектральная теория нестационарных систем управления. - М.: Наука, 1974.
6. **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.** Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. - М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.
7. **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.** Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. - М.: Изд-во МАИ, 2012.
8. **Рыбин В.В.** Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. - М.: Изд-во МАИ, 2011.
9. **Романов В.А., Рыбаков К.А.** Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базе обобщенных функций Эрмита // Труды МАИ. - 2010. - № 39 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mai.ru>.
10. **Рыбаков К.А.** Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базе обобщенных функций Лагерра // Дифференциальные уравнения и процессы управления. - 2012. - № 1. - С. 114-141 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
11. **Рыбаков К.А.** Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления // Труды МАИ. - 2005. - № 18 [Электронный ресурс]. URL: <http://www.mai.ru>.
12. **Рыбаков К.А.** Многопараметрические ортонормированные системы функций для решения задач в спектральной форме математического описания // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики: сб. тр. междунар. конф. - Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ, 2012. - Ч. 1. - С. 327-331.

**PROBABILITY ANALYSIS OF STOCHASTIC SYSTEMS  
WITH POISSON COMPONENT****Rybakov K.A.**

The article deals with the stochastic control systems гтвук impulses generated by Poisson events flow resulting in discontinuities of the system trajectories. The problem of finding the probability density function for the system state is solved. The method is based on using the spectral form of the control systems' mathematical description.

**Key words:** analysis, impulse signals, Kolmogorov-Feller equation, Poisson flow of events, Poisson process, spectral method, stochastic system.

**Сведения об авторе**

**Рыбаков Константин Александрович**, 1984 г.р., окончил МГУ им. М.В. Ломоносова (2006), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики МАИ, автор более 80 научных работ, область научных интересов – анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания систем управления.