УДК 681.3.06

МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ БАЗИСНЫЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ[1]

К.А. РЫБАКОВ

Статья представлена доктором физико-математических наук, профессором Пантелеевым А.В.

Цель статьи – дать краткий обзор базисных систем, ортонормированных на бесконечном или полубесконечном интервалах, которые могут найти применение для анализа, синтеза, фильтрации и идентификации систем управления в спектральной форме математического описания.

Ключевые слова: базис, базисная система, бесконечный интервал, полубесконечный интервал, обобщенные функции Лагерра, обобщенные функции Эрмита, спектральная форма математического описания, спектральный метод.

Введение

При решении многих задач теории управления сложными техническими объектами (летательными аппаратами, системами радиолокации и радионавигации, электрическими схемами) и экономическими системами (моделями, описывающими изменение курсов акций или макроэкономических показателей) с использованием спектральной формы математического описания [1] возникает необходимость в базисных системах, ортонормированных в неограниченных областях (бесконечном или полубесконечном интервалах). К подобным задачам относятся задачи анализа, синтеза, фильтрации и идентификации [2; 3]. Наиболее изученными из таких базисных систем являются полиномы Эрмита и Лагерра, однако их оказывается недостаточно, поскольку при использовании для разложения небольшого числа функций этих систем иногда не удается добиться приемлемой точности аппроксимации. Другие базисные системы, например, порожденные вейвлетами [4], могут приводить к громоздким вычислениям. В связи с этим возникает задача формирования новых базисных систем.

В работе приведены соотношения для обобщенных функций Эрмита, обобщенных функций Лагерра и описана методика формирования ортонормированных систем функций на основе базисных систем, заданных на отрезках. Наличие таких числовых параметров у рассматриваемых функций, как параметры сдвига и масштаба, а также параметр, характеризующий «распределение» весовой функции, позволяет оптимальным образом решать различные задачи с помощью представления функций конечными отрезками рядов по ортонормированным функциям.

1. Базисные системы на бесконечном интервале

Для представления функций, заданных на множестве действительных чисел, рядами достаточно часто используются полиномы $\{G_j^{m,D}(x)\}_{j=0}^{\infty}$ или функции $\{\Phi_j^{m,D}(x)\}_{j=0}^{\infty}$ Эрмита

$$G_j^{m,D}(x) = (-1)^j D^j \, \mathrm{e}^{\frac{(x-m)^2}{2D}} \frac{d^j}{dx^j}\left(\mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2D}}\right), \quad \Phi_j^{m,D}(x) = \sqrt{\omega(x)}\,G_j^{m,D}(x), \quad j = 0,1,2,\ldots,$$

где m и $D > 0$ – параметры, $\omega(x) = 1\big/\sqrt{2\pi D}\,\exp\left\{-\left(x-m\right)^2\big/2D\right\}$.

Полиномы Эрмита ортогональны с весом $\omega(x)$, а функции Эрмита – с единичным весом

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 12-08-00892-а).

$$\left(G_i^{m,D}(x),G_j^{m,D}(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega(x)\right)}=\left(\Phi_i^{m,D}(x),\Phi_j^{m,D}(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty)\right)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\underbrace{\omega(x)G_i^{m,D}(x)G_j^{m,D}(x)}_{\Phi_i^{m,D}(x)\Phi_j^{m,D}(x)}dx=j!D^j\delta_{ij},$$

где δ_{ij} – символ Кронекера $\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$

В работе [5] введены обобщенные функции Эрмита, обладающие как свойствами системы $\{G_j^{m,D}(x)\}_{j=0}^{\infty}$ (ортогональность с весом, позволяющим представлять в виде сходящихся рядов полиномы), так и системы $\{\Phi_j^{m,D}(x)\}_{j=0}^{\infty}$ (интегрируемость функций системы на множестве действительных чисел). С учетом нормировки обобщенные функции Эрмита определяются следующим образом

$$e_j^{m,D,\alpha}(x)=\omega^{\frac{1-\alpha}{2}}(x)\frac{G_j^{m,D}(x)}{\sqrt{j!D^j}},\quad 0\le\alpha\le1,\quad j=0,1,2,\ldots,$$

они образуют базис пространства $L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^{\alpha}(x)\right)$

$$\left(e_i^{m,D,\alpha}(x),e_j^{m,D,\alpha}(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^{\alpha}(x)\right)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega^{\alpha}(x)e_i^{m,D,\alpha}(x)e_j^{m,D,\alpha}(x)dx=\delta_{ij}.$$

При $\alpha=1$ функции $e_j^{m,D,\alpha}(x)$ совпадают с нормированными полиномами Эрмита $G_j^{m,D}(x)/\sqrt{j!D^j}$, а при $\alpha=0$ – с нормированными функциями Эрмита $\Phi_j^{m,D}(x)/\sqrt{j!D^j}$. В [5] подробно изложены свойства обобщенных функций Эрмита в контексте применения спектральной формы математического описания и приведены примеры их использования в различных задачах.

Несмотря на то, что $\{e_j^{m,D,\alpha}(x)\}_{j=0}^{\infty}$ – полная ортонормированная система функций и, следовательно, любую функцию из пространства $L_2\left((-\infty,+\infty);\omega^{\alpha}(x)\right)$ можно сколь угодно точно представить в виде конечного отрезка ряда по функциям $\{e_j^{m,D,\alpha}(x)\}_{j=0}^{\infty}$, может возникнуть необходимость в других базисных системах для представления функций, заданных на множестве действительных чисел. Особенно это важно, когда при аппроксимации используется лишь небольшое число функций базисной системы. Тогда существенное значение имеют свойства этих функций (непрерывность, скорость убывания и т.п.).

Рассмотрим методику формирования ортонормированных на $(-\infty,+\infty)$ систем функций при помощи базисных систем, заданных на отрезках. Пусть $\{p_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ – базисная система или полная ортонормированная система функций, в пространстве $L_2\left([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right)$

$$\left(p_i(x),p_j(x)\right)_{L_2\left([-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\right)}=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}p_i(x)p_j(x)dx=\delta_{ij},$$

а функции системы $\{r_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ задаются в виде $r_j(x)=p_j(\operatorname{arctg}x)$, тогда

$$\left(r_i(x),r_j(x)\right)_{L_2\left((-\infty,+\infty);\rho(x)\right)}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)r_i(x)r_j(x)dx=\delta_{ij},$$

где $\rho(x)=(\operatorname{arctg}x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$, так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\rho(x)r_i(x)r_j(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}p_i(\operatorname{arctg}x)p_j(\operatorname{arctg}x)\underbrace{d\operatorname{arctg}x}_{\rho(x)dx}=\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}p_i(x)p_j(x)dx.$$

Таким образом, функции $\{r_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ образуют базис пространства $L_2\left((-\infty,+\infty);\rho(x)\right)$. Полнота этой системы следует из полноты $\{p_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$.

На основе базисной системы $\{r_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ с помощью введения дополнительных параметров построим новую систему функций. Во-первых, это параметры сдвига и масштаба (m и D), а во-вторых, параметр α, характеризующий «распределение» весовой функции

$$r_j^{m,D,\alpha}(x)=\rho^{\frac{1-\alpha}{2}}\left(\frac{x-m}{D}\right)r_j\left(\frac{x-m}{D}\right),\quad D>0,\quad 0\le\alpha\le 1,\quad j=0,1,2,\ldots$$

Функции $\{r_j^{m,D,\alpha}\}_{j=0}^{\infty}$ являются ортонормированными с весом $\dfrac{1}{D}\rho^{\alpha}\left(\dfrac{x-m}{D}\right)$. При $\alpha=0$ весовая функция – константа.

В качестве порождающей базисной системы $\{p_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ могут быть использованы, например, полиномы Лежандра, тригонометрические функции, функции Уолша, функции Хаара и др. [1-4], в том числе функции, ортонормированные на отрезке $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ с весом $\nu(x)$, тогда весовая функция для системы $\{r_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ – $\nu(\operatorname{arctg} x)\rho(x)$. Выбор типа базисной системы (полиномиальный, периодический, кусочно-постоянный) определяется необходимыми свойствами порождаемой системы функций $\{r_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$. Функции, ортонормированные на произвольном отрезке $[a;b]$, сначала с помощью линейной замены переменной приводятся к системе функций, ортонормированной на $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Используя для замены переменной в $\{p_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ функцию $\operatorname{arctg} x^n$ ($x\to\operatorname{arctg} x^n$), где $n>0$ – нечетное число, можно получить более широкий набор базисных систем $\{r_j^n(x)\}_{j=0}^{\infty}$ с весовыми функциями $\rho(x)=(\operatorname{arctg} x^n)'=\dfrac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}$ ($n>0$ – параметр, характеризующий скорость убывания). Затем, как и для системы $\{r_j^{m,D,\alpha}(x)\}_{j=0}^{\infty}$, дополнительно вводятся параметры m, D и α. Можно указать и другие варианты, например, при использовании замены $\operatorname{arctg}(x+x^n)$ весовая функция $\rho(x)=\left(\operatorname{arctg}(x+x^n)\right)'=\dfrac{1+nx^{n-1}}{1+(x+x^n)^2}$ принимает только положительные значения и не обращается в нуль ($n>0$ – нечетное число), что важно при решении некоторых начальных или краевых задач.

2. Базисные системы на полубесконечном интервале

Для представления функций, заданных на множестве неотрицательных действительных чисел, используют, как правило, базисные системы $\{L_j^{\alpha}(x)\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{\Psi_j^{\alpha}(x)\}_{j=0}^{\infty}$ – полиномы и функции Лагерра

$$L_j^{\alpha}(x)=(-1)^j x^{-\alpha}\mathrm{e}^x\frac{d^j}{dx^j}(x^{\alpha+j}\mathrm{e}^{-x}),\quad \Psi_j^{\alpha}(x)=\sqrt{\gamma(x)}L_j^{\alpha}(x),\quad j=0,1,2,\ldots,$$

где $\alpha>-1$ – параметр, $\gamma(x)=x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}$.

Полиномы Лагерра ортогональны с весом $\gamma(x)$, а функции Лагерра – с единичным весом

$$\left(L_i^{\alpha}(x),L_j^{\alpha}(x)\right)_{L_2([0,+\infty);\gamma(x))}=\left(\Psi_i^{\alpha}(x),\Psi_j^{\alpha}(x)\right)_{L_2([0,+\infty))}=\int_0^{+\infty}\underbrace{\gamma(x)L_i^{\alpha}(x)L_j^{\alpha}(x)}_{\Psi_i^{\alpha}(x)\Psi_j^{\alpha}(x)}dx=j!\,\Gamma(\alpha+j+1)\delta_{ij},$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция.

По аналогии с обобщенными функциями Эрмита вводятся обобщенные функции Лагерра

$$f_j^{\alpha,\beta}(x) = \gamma^{\frac{1-\beta}{2}}(x)\frac{L_j^{\alpha}(x)}{\sqrt{j!\Gamma(\alpha+j+1)}}, \quad 0 \le \beta \le 1, \quad j = 0,1,2,\ldots,$$

они образуют базис пространства $L_2\big([0,+\infty);\gamma^{\beta}(x)\big)$

$$\left(f_i^{\alpha,\beta}(x), f_j^{\alpha,\beta}(x)\right)_{L_2\left([0,+\infty);\gamma^{\beta}(x)\right)} = \int_0^{+\infty}\gamma^{\beta}(x) f_i^{\alpha,\beta}(x) f_j^{\alpha,\beta}(x)dx = \delta_{ij}.$$

При $\beta = 1$ функции $f_j^{\alpha,\beta}(x)$ совпадают с нормированными полиномами Лагерра $L_j^{\alpha}(x)/\sqrt{j!\Gamma(\alpha+j+1)}$, а при $\beta = 0$ – с нормированными функциями Лагерра $\Psi_j^{\alpha}(x)/\sqrt{j!\Gamma(\alpha+j+1)}$. Свойства этих функций, необходимые для применения спектральной формы математического описания, приведены в [6].

Введение параметров сдвига и масштаба, а именно определение системы функций $\left\{ f_j^{\alpha,\beta,m,D}(x) = f_j^{\alpha,\beta}\left(\dfrac{x-m}{D}\right)\right\}_{j=0}^{\infty}$, позволяет при $D > 0$ получить систему, ортонормированную на множестве $[m,+\infty)$ с весовой функцией $\dfrac{1}{D}\gamma^{\beta}\left(\dfrac{x-m}{D}\right)$, а при $D < 0$ – систему, ортонормированную на множестве $(-\infty,m]$ с весовой функцией $-\dfrac{1}{D}\gamma^{\beta}\left(\dfrac{x-m}{D}\right)$.

Альтернатива обобщенным функциям Лагерра – ортонормированные на $[0,+\infty)$ системы функций, которые определяются с помощью базисных систем, заданных на отрезках. Методика их формирования аналогична тому, как формировались системы функций, ортонормированные на $(-\infty,+\infty)$, только в качестве порождающей системы $\{p_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ выступает базис пространства $L_2\big([0,\frac{\pi}{2}]\big)$. Кроме того, можно использовать базисные системы, ортонормированные на отрезках $[a,\frac{\pi}{2}]$ или $[-\frac{\pi}{2},b]$, где $-\frac{\pi}{2} < a,b < \frac{\pi}{2}$, получая таким образом системы функций, ортонормированные на полубесконечных интервалах $[\operatorname{tg} a,+\infty)$ или $(-\infty,\operatorname{tg} b]$ соответственно (для замены переменной при помощи функции $\operatorname{arctg} x$).

Две базисные системы $\{r_j^1(x)\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{r_j^2(x)\}_{j=0}^{\infty}$, ортонормированные на полубесконечных интервалах $[m,+\infty)$ и $(-\infty,m]$ с весовыми функциями $\rho^1(x)$ и $\rho^2(x)$ соответственно, могут быть использованы для определения системы функций $\{r_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$, ортонормированной на бесконечном интервале с весовой функцией $\rho(x)$

$$r_j(x) = \begin{cases} r_i^1(x), & x \ge m \quad \text{и} \quad j = 2i \quad (j - \text{четное}),\\ r_i^2(x), & x < m \quad \text{и} \quad j = 2i+1 \quad (j - \text{нечетное}),\\ 0, & \text{в остальных случаях,}\end{cases} \qquad \rho(x) = \begin{cases}\rho^1(x), & x \ge m,\\ \rho^2(x), & x < m.\end{cases}$$

В качестве функций $\{r_j^1(x)\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{r_j^2(x)\}_{j=0}^{\infty}$ могут быть выбраны, например, системы обобщенных функций Лагерра $\{f_j^{\alpha_1,\beta_1,m,D_1}(x)\}_{j=0}^{\infty}$ и $\{f_j^{\alpha_2,\beta_2,m,D_2}(x)\}_{j=0}^{\infty}$ при $D_1D_2 < 0$, т.е. когда величины D_1 и D_2 имеют разные знаки.

Заметим, что если функции $r_j(x)$ задать в форме

$$r_j(x)=\begin{cases} r_j^1(x), & x \ge m, \\ r_j^2(x), & x < m, \end{cases}$$

то система $\{r_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ не будет полной.

3. Системы функций, полученные периодическим продолжением

Рассмотрим еще один способ формирования систем функций, ортонормированных в неограниченных областях. Для этого выберем базисную систему $\{p_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ пространства $L_2\left([a,b]\right)$ и определим функции $r_j^k(x)$

$$r_j^k(x)=\begin{cases} p_j(x-kT), & x \in [a+kT, b+kT), \\ 0, & x \notin [a+kT, b+kT), \end{cases} \qquad T=b-a.$$

Пусть далее $r_j(x)=\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_k r_j^k(x),$ где совокупность коэффициентов a_k удовлетворяет условию $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} a_k^2 = 1$. Тогда $\{r_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ – ортонормированная на $(-\infty,+\infty)$ система функций. Для полубесконечных интервалов требуется, чтобы $a_k = 0$ при $k \ge N$ либо $k \le N$, где N – заданное целое число. Например,

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{(k^2+1)\,\pi \operatorname{cth} \pi}}; \qquad a_k = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{6}}{\pi k}, & k<0, \\ 0, & k \ge 0; \end{cases} \qquad a_k = \begin{cases} \sqrt{q^k(1-q)}, & k \ge 0 \quad (0<q<1)\,. \\ 0, & k<0. \end{cases}$$

Если $a_k \ne 0$ для конечного набора значений k, система $\{r_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ будет ортонормированной на отрезке. Стоит отметить, что подобные системы функций не являются полными.

Свойством полноты обладает система функций $\{r_j^k(x)\}_{j \in \{0,1,2,\ldots\},\, k \in \mathrm{Z}}$. Наличие двух индексов j и k затрудняет применение этой системы к решению задач в спектральной форме математического описания. Можно либо использовать вариант спектральной формы математического описания, предложенной для применения базисных систем, которые порождаются вейвлетами [4], либо определить правило, задающее взаимно однозначное соответствие пары индексов (j,k) и нового индекса i. Например, для бесконечного интервала (в форме таблиц соответствий $i^{(j,k)}$):

$$\begin{array}{cccccc} & & & 12^{(3,0)} & & \\ & & 11^{(2,-1)} & 6^{(2,0)} & 13^{(2,1)} & \\ & 10^{(1,-2)} & 5^{(1,-1)} & 2^{(1,0)} & 7^{(1,1)} & 14^{(1,2)} \\ 9^{(0,-3)} & 4^{(0,-2)} & 1^{(0,-1)} & 0^{(0,0)} & 3^{(0,1)} & 8^{(0,2)} \end{array} \;\ldots, \quad \begin{array}{cccccc} & & \ldots & 20^{(3,1)} & 19^{(3,2)} & 18^{(3,3)} \\ 8^{(2,-2)} & 9^{(2,-1)} & 10^{(2,0)} & 11^{(2,1)} & 12^{(2,2)} & 17^{(2,3)} \\ 7^{(1,-2)} & 4^{(1,-1)} & 3^{(1,0)} & 2^{(1,1)} & 13^{(1,2)} & 16^{(1,3)} \\ 6^{(0,-2)} & 5^{(0,-1)} & 0^{(0,0)} & 1^{(0,1)} & 14^{(0,2)} & 15^{(0,3)} \end{array},$$

для полубесконечных интервалов $[0,+\infty)$ и $(-\infty,0)$:

$$\begin{array}{cccc} 9^{(3,0)} & 10^{(3,1)} & 11^{(3,2)} & 12^{(3,3)} \\ 4^{(2,0)} & 5^{(2,1)} & 6^{(2,2)} & 13^{(2,3)} \\ 1^{(1,0)} & 2^{(1,1)} & 7^{(1,2)} & 14^{(1,3)} \\ 0^{(0,0)} & 3^{(0,1)} & 8^{(0,2)} & \end{array} \;\ldots, \quad \begin{array}{cccc} & & & \ldots \\ & & 8^{(2,-1)} & 5^{(2,0)} \\ & 7^{(1,-2)} & 4^{(1,-1)} & 2^{(1,0)} \\ 6^{(0,-3)} & 3^{(0,-2)} & 1^{(0,-1)} & 0^{(0,0)} \end{array}.$$

Более сложный вариант задания функций $r_j^k(x)$ – использование различных базисных систем $\{p_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$ и отрезков разной длины для разных значений k.

Заключение

В статье описана методика, позволяющая формировать ортонормированные системы функций на бесконечном и полубесконечном интервалах. Наличие нескольких числовых параметров (сдвиг; масштаб; параметр, характеризующий «распределение» весовой функции) обеспечивает достаточную гибкость при решении различных задач, требующих представления функций конечными отрезками рядов по ортонормированным функциям. Из описанных базисных систем можно выбрать такие, что для базисных функций скорость убывания будет такой же, как и у функций $x^n \mathrm{e}^{-\delta x^2}$, $|x|^{n+\alpha/2}\,\mathrm{e}^{-\delta|x|}$, $|x|^{-\sigma}$ $(n \in N, \alpha > -1, \delta > 0, \sigma > 0)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Солодовников В.В., Семенов В.В.** Спектральная теория нестационарных систем управления. - М.: Наука, 1974.
2. **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.** Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. - М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.
3. **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А.** Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. - М.: Изд-во МАИ, 2012.
4. **Рыбин В.В.** Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. - М.: Изд-во МАИ, 2011.
5. **Романов В.А., Рыбаков К.А.** Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Труды МАИ. - 2010. - № 39. [Электронный ресурс]. URL: http://www.mai.ru.
6. **Рыбаков К.А.** Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Лагерра // Дифференциальные уравнения и процессы управления. - 2012. - № 1. - С. 114-141. [Электронный ресурс]. URL: http://www.math.spbu.ru/diffjournal.

MULTIPARAMETER BASIS TO REPRESENT FUNCTIONS IN UNBOUNDED DOMAINS

Rybakov K.A.

Purpose of the article is to give a brief overview of basis that is orthonormal on an infinite or semi-infinite interval. This basis can be used for analysis, synthesis, filtration and identification in control systems by using the spectral form of mathematical description.

Key words: basis, infinite interval, semi-infinite interval, generalized Laguerre functions, generalized Hermite functions, spectral form of mathematical description, spectral method.

Сведения об авторе

Рыбаков Константин Александрович, 1979 г.р., окончил МАИ (2002), кандидат физико-математических наук, доцент МАИ, автор более 80 научных работ, область научных интересов – анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания систем управления.