

УДК 519.676

## ФИЛЬТРАЦИЯ СИГНАЛОВ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДИФфуЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА НА ОСНОВЕ МЕТОДА СТАТИСТИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ<sup>1</sup>

К.А. РЫБАКОВ

В статье развиваются методы сведения задачи оптимальной нелинейной фильтрации в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа к задаче анализа вспомогательной стохастической системы, траектории которой могут получать случайные приращения, разветвляться и обрываться в случайные моменты времени. Ранее соответствующие методы и алгоритмы были предложены и апробированы для стохастических систем диффузионного типа.

**Ключевые слова:** апостериорная плотность вероятности, ветвящиеся процессы, метод Монте-Карло, метод статистических испытаний, оптимальная фильтрация, скачкообразный процесс, стохастическая система, уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи.

### ВВЕДЕНИЕ

Ранее в работах [5], [6] были предложены новые методы и алгоритмы решения задачи оптимальной фильтрации сигналов в нелинейных стохастических системах диффузионного типа, т.е. в системах, модели объекта наблюдения и измерителя для которых описываются с помощью стохастических дифференциальных уравнений. Предложенные методы и алгоритмы базируются на общности структуры уравнений оптимальной нелинейной фильтрации для ненормированной апостериорной плотности вероятности вектора состояния объекта наблюдения, а именно уравнений типа Дункана–Мортенсена–Закаи при фиксированных измерениях, и обобщенного уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, включающего дополнительные слагаемые – функции поглощения и восстановления [1], [3], [4].

Один из основных результатов работ [5], [6] – это обоснование того, что задачу оптимальной фильтрации сигналов можно свести к задаче статистического анализа вспомогательной стохастической системы со случайными обрывами и ветвлениями траекторий, решение которой можно получить методом статистических испытаний или методом Монте-Карло. Есть два варианта подобных методов получения оптимальной оценки вектора состояния по результатам измерений: первый основан на классическом, а второй – на робастном уравнении Дункана–Мортенсена–Закаи. Оба варианта методов апробированы на решении модельных задач, они имеют свои достоинства и недостатки, в некотором смысле дополняя друг друга.

Для стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа, когда модель объекта наблюдения описывается стохастическим дифференциальным уравнением с пуассоновской составляющей, можно применить аналогичный подход. Каким образом сводить задачу оптимальной фильтрации к задаче анализа вспомогательной стохастической системы с обрывами, разрывами и ветвлениями траекторий, беря за основу классическое уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи, было показано в работе [8]. В настоящей работе предлагается перейти к задаче анализа вспомогательной стохастической системы на базе робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи. Причем, как и ранее [8], разрывы траекторий для вспомогательной стохастической системы обусловлены исходной постановкой задачи, однако параметры разрывов меняются и нарушается «баланс» между поглощением и восстановлением траекторий. Эти параметры, а также вероятностные характеристики распределения интервалов времени между ветвлениями и до обрыва зависят от текущих измерений оцениваемого вектора состояния.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-08-00323-а).

Актуальность этой работы обусловлена большим числом прикладных задач в радиотехнике, навигации, управлении движущимися объектами, требующих эффективных методов и алгоритмов оценивания параметров в реальных системах по результатам косвенных измерений на фоне помех.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Как и в [8], будем рассматривать модель объекта наблюдения, описываемую стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где  $X \in R^n$  – вектор состояния;  $t \in T$ ,  $T = [t_0, t_1]$  – отрезок времени функционирования системы;  $f(t, x): T \times R^n \rightarrow R^n$  – вектор-функция  $n \times 1$ ,  $\sigma(t, x): T \times R^n \rightarrow R^{n \times s}$  – матричная функция  $n \times s$ ;  $W(t)$  –  $s$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния  $X_0$ , которое определяется плотностью вероятности  $\varphi_0(x)$ . Далее,  $Q(t)$  – общий пуассоновский процесс, заданный в форме

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k.$$

В правой части последнего равенства  $P(t)$  – пуассоновский процесс,  $\Delta_k$  – независимые случайные векторы из  $R^n$ , распределение которых задано плотностью вероятности  $\psi(\tau_k, \Delta)$ , т.е. вектор состояния  $X$  получает случайные приращения в моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots \in T$ , образующие пуассоновский поток событий:

$$X(\tau_k) = X(\tau_k - 0) + \Delta_k. \quad (2)$$

Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности  $\psi(\tau_k, \Delta | \xi)$ , характеризующая распределение  $\Delta_k$  при условии  $X(\tau_k - 0) = \xi$ . В частном случае  $\psi(\tau_k, \Delta | \xi) = \psi(\tau_k, \Delta)$ . Наряду с  $\psi(\tau_k, \Delta | \xi)$  введем плотность вероятности  $\eta(\tau_k, x | \xi)$ , характеризующую распределение  $X(\tau_k)$  при условии  $X(\tau_k - 0) = \xi$ .

Пуассоновский поток событий и, следовательно, моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , а также пуассоновский процесс  $P(t)$  определяются интенсивностью  $\lambda(t, x)$ , т.е. условная вероятность события (2) при  $X(t) = x$  на промежутке  $[t, t + \Delta t]$  задается равенством

$$P(t, t + \Delta t) = \Pr(P(t + \Delta t) - P(t) = 1 | X(t) = x) = \lambda(t, x)\Delta t + o(\Delta t).$$

Модель измерительной системы проще, чем в [8], а именно здесь, как и в [6], будем рассматривать стационарную модель:

$$dY(t) = c(X(t))dt + dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \quad (3)$$

или

$$Z(t) = c(X(t)) + N(t), \quad (4)$$

где  $Y, Z \in R^m$  – векторы измерений;  $c(x): R^n \rightarrow R^m$  – вектор-функция  $m \times 1$ ,  $V(t)$  –  $m$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от  $W(t)$  и от начального состояния  $X_0$ ,  $N(t)$  –  $m$ -мерный стандартный гауссовский белый шум. Отметим, что стационарность модели (3) или (4) не имеет принципиального значения, но позволяет записывать многие соотношения более компактно.

Задача оптимальной фильтрации состоит в нахождении оценки  $\hat{X}(t)$  траектории случайного процесса  $X(t)$  по результатам измерений  $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$  или  $Z_0^t = \{Z(\tau), \tau \in [t_0, t)\}$  в соответствии с заданным критерием оптимальности. Далее при записи соотношений будут использованы измерения  $Y(t)$  или  $Z(t)$  в зависимости от удобства. Задачу оптимальной фильтрации можно рассматривать шире: как нахождение апостериорной плотности вероятности  $p(t, x | Y_0^t)$  вектора состояния  $X$ .

При использовании критерия минимума среднеквадратической ошибки оценивания имеем [10]:

$$\hat{X}(t) = M[X(t) | Y_0^t] = \int_{R^n} xp(t, x | Y_0^t) dx. \quad (5)$$

## 2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕНОРМИРОВАННЫХ АПОСТЕРИОРНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТИ

Приведем уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи [3], [4], [10] для ненормированной апостериорной плотности вероятности  $\varphi(t, x | Y_0^t)$ , которая связана с функцией  $p(t, x | Y_0^t)$  соотношением

$$p(t, x | Y_0^t) = \frac{\varphi(t, x | Y_0^t)}{\int_{R^n} \varphi(t, x | Y_0^t) dx}, \quad (6)$$

и воспользуемся некоторыми результатами, полученными в [8].

Уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи относится к классу стохастических дифференциальных уравнений в частных производных. Используя формулу Стратоновича и фиксируя измерения, его можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x | Y_0^t)}{\partial t} &= \mathcal{L}\varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t) + \int_{R^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)\varphi(t, \xi | Y_0^t) d\xi + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^m c_{\alpha}(x) \frac{dY_{\alpha}(t)}{dt} \varphi(t, x | Y_0^t), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\varphi(t, x | Y_0^t) &= \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m c_{\alpha}^2(x)\varphi(t, x | Y_0^t), \\ \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t)], \\ g(t, x) &= \sigma(t, x)\sigma^T(t, x), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = & \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t) + \int_{R^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)\varphi(t, \xi | Y_0^t) d\xi - \\ & - \mu^-(x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t) + \mu^+(x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t), \quad Z(t) = \frac{dY(t)}{dt}, \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x) \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \mu^-(x, z) = & \begin{cases} -\mu(x, z), & \mu(x, z) < 0, \\ 0, & \mu(x, z) \geq 0, \end{cases} & \mu^+(x, z) = & \begin{cases} \mu(x, z), & \mu(x, z) > 0, \\ 0, & \mu(x, z) \leq 0; \end{cases} \\ \mu(x, z) = & \sum_{\alpha=1}^m c_\alpha(x) \left( z_\alpha - \frac{c_\alpha(x)}{2} \right). \end{aligned}$$

Уравнение (8) по структуре соответствует обобщенному уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова, при этом функции  $\mu^-(X(t), Z(t))$  и  $\mu^+(X(t), Z(t))$  – интенсивности обрывов и ветвлений траекторий случайного процесса  $X(t)$ , а произведения  $\mu^-(x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t)$  и  $\mu^+(x, Z(t))\varphi(t, x | Y_0^t)$  – функции поглощения и восстановления соответственно [1]. Следовательно, условные вероятности обрывов и ветвлений при  $X(t) = x$  и  $Z(t) = z$  на промежутке  $[t, t + \Delta t]$  определяются равенствами:

$$P^-(t, t + \Delta t) = \mu^-(x, z)\Delta t + o(\Delta t), \quad P^+(t, t + \Delta t) = \mu^+(x, z)\Delta t + o(\Delta t).$$

Таким образом, функции  $p(t, x | Y_0^t)$  и  $\varphi(t, x | Y_0^t)$  характеризуют распределение вектора  $X$  – состояния объекта наблюдения, описываемого уравнением (1), – с учетом того, что траектории случайного процесса  $X(t)$  получают случайные приращения, ветвятся или обрываются. Напомним [8], что перечисленные события образуют неоднородные пуассоновские потоки с известными интенсивностями, при ветвлении в фиксированный момент времени может появиться только одна новая ветвь, при обрыве прекращается моделирование только одной ветви. Для удобства моделирования, как и в случае систем диффузионного типа [5; 6], каждая из новых ветвей должна рассматриваться как самостоятельная траектория.

Однако, как и для систем диффузионного типа, уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи содержит множитель типа белого шума – случайный процесс  $N(t)$ , наличие которого усложняет его решение с помощью метода статистических испытаний. Основная сложность состоит в том, что  $N(t)$  входит в интенсивности обрывов и ветвлений траекторий случайного процесса  $X(t)$ , делая их, вообще говоря, неограниченными (см. (4) и (8)). В результате, как показано на примере в работе [6], для интенсивностей

$$\mu^-(t) = \mu^-(X(t), Z(t)) \quad \text{и} \quad \mu^+(t) = \mu^+(X(t), Z(t))$$

характерно быстрое возрастание и убывание, а также относительно большие максимальные значения, определяющие среднее число обрывов и ветвлений в единицу времени.

Чтобы минимизировать влияние указанного недостатка, проведем замену ненормированной апостериорной плотности вероятности [9]:

$$\varphi(t, x | Y_0^t) = e^{Y^T(t)c(x)} \rho(t, x | Y_0^t). \quad (9)$$

Тогда [8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = & \mathcal{L}\rho(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x)\rho(t, x | Y_0^t) + \int_{R^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi) e^{Y^T(t)(c(\xi)-c(x))} \rho(t, \xi | Y_0^t) d\xi - \\ & - \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(t) \mathcal{L}_\alpha \rho(t, x | Y_0^t) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m Y_\alpha(t) Y_\beta(t) \mathcal{L}_{\alpha\beta} \rho(t, x | Y_0^t). \end{aligned} \quad (10)$$

В уравнении (10)  $\mathcal{L}_\alpha = [C_\alpha, \mathcal{L}]$ ,  $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[C_\alpha, [C_\beta, \mathcal{L}]]$ , где  $[C_\alpha, \mathcal{L}]$  и  $[C_\alpha, \mathcal{L}_\beta]$  – коммутаторы указанных в скобках операторов,  $C_\alpha$  – операторы умножения на функции  $c_\alpha(x)$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m$ .

Начальное условие для уравнения (10) совпадает с начальным условием для уравнения (7) или (8), поскольку  $e^{Y^T(t)c(x)} = 1$  при  $t = t_0$ , т.е.  $\rho(t_0, x) = \varphi_0(x)$ .

Уравнение (8) отличается от робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи для систем диффузионного типа наличием слагаемых

$$-\lambda(t, x)\rho(t, x | Y_0^t) + \int_{R^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi) e^{Y^T(t)(c(\xi)-c(x))} \rho(t, \xi | Y_0^t) d\xi,$$

поэтому можно воспользоваться результатами работы [6], где подробно показано, как получить другую форму записи робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи на основе тождественных преобразований выражения

$$\mathcal{L}\rho(t, x | Y_0^t) - \sum_{\alpha=1}^m Y_\alpha(t) \mathcal{L}_\alpha \rho(t, x | Y_0^t) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m Y_\alpha(t) Y_\beta(t) \mathcal{L}_{\alpha\beta} \rho(t, x | Y_0^t),$$

которое можно представить как

$$\tilde{\mathcal{A}}\rho(t, x | Y_0^t) + v(t, x, Y(t))\rho(t, x | Y_0^t),$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{A}}\rho(t, x | Y_0^t) = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \tilde{f}_i(t, x, Y(t))\rho(t, x | Y_0^t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[ g_{ij}(t, x)\rho(t, x | Y_0^t) \right], \\ \tilde{f}(t, x, Y(t)) = & f(t, x) - g(t, x) \left[ \frac{\partial c(x)}{\partial x} \right]^T Y(t), \\ v(t, x, Y(t)) = & -Y^T(t) \frac{\partial c(x)}{\partial x} f(t, x) - \frac{1}{2} \text{tr} \left( g(t, x) \nabla \nabla^T (Y^T(t)c(x)) \right) - \\ & - \frac{1}{2} c^T(x)c(x) + \frac{1}{2} Y^T(t) \frac{\partial c(x)}{\partial x} g(t, x) \left[ \frac{\partial c(x)}{\partial x} \right]^T Y(t). \end{aligned}$$

Таким образом, имеем

$$\frac{\partial \rho(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \tilde{\mathcal{A}}\rho(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x)\rho(t, x | Y_0^t) + \int_{R^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi) e^{Y^T(t)(c(\xi) - c(x))} \rho(t, \xi | Y_0^t) d\xi + \quad (11)$$

$$+ v(t, x, Y(t))\rho(t, x | Y_0^t), \quad \rho(t_0, x) = \varphi_0(x).$$

### 3. СВЕДЕНИЕ К ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА СИСТЕМ С ОБРЫВАМИ И ВЕТВЛЕНИЯМИ ТРАЕКТОРИЙ

Применим подход, использованный ранее для систем диффузионного типа [6], а именно сведем задачу оптимальной фильтрации к задаче анализа вспомогательной стохастической системы с обрывами и ветвлениями траекторий. Чтобы правильно интерпретировать входящие в уравнение (11) слагаемые при формировании алгоритма моделирования траекторий вспомогательного случайного процесса с обрывами, разрывами и ветвлениями, во-первых, представим функцию  $v(t, x, y)$  в виде:

$$v(t, x, y) = -v^-(t, x, y) + v^+(t, x, y),$$

где

$$v^-(t, x, y) = \begin{cases} -v(t, x, y), & v(t, x, y) < 0, \\ 0, & v(t, x, y) \geq 0, \end{cases} \quad v^+(t, x, y) = \begin{cases} v(t, x, y), & v(t, x, y) > 0, \\ 0, & v(t, x, y) \leq 0, \end{cases}$$

а во-вторых, определим функции

$$\tilde{\lambda}(t, \xi, y) = \lambda(t, \xi) \int_{R^n} \eta(t, x | \xi) e^{y^T(c(\xi) - c(x))} dx, \quad \tilde{\eta}(t, x | \xi, y) = \frac{\eta(t, x | \xi) e^{y^T(c(\xi) - c(x))}}{\int_{R^n} \eta(t, x | \xi) e^{y^T(c(\xi) - c(x))} dx}.$$

Тогда

$$\frac{\partial \rho(t, x | Y_0^t)}{\partial t} = \tilde{\mathcal{A}}\rho(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x)\rho(t, x | Y_0^t) + \int_{R^n} \tilde{\lambda}(t, \xi, Y(t))\tilde{\eta}(t, x | \xi, Y(t))\rho(t, \xi | Y_0^t) d\xi - \quad (12)$$

$$- v^-(t, x, Y(t))\rho(t, x | Y_0^t) + v^+(t, x, Y(t))\rho(t, x | Y_0^t), \quad \rho(t_0, x) = \varphi_0(x),$$

где

$$\tilde{\lambda}(t, x, y) \geq 0, \quad \tilde{\eta}(t, x | \xi, y) \geq 0 \quad \text{и} \quad \int_{R^n} \tilde{\eta}(t, x | \xi, y) dx = 1, \quad t \in T, \quad x, \xi \in R^n, \quad y \in R^m,$$

т.е. после преобразований робастное уравнение Дункана–Мортенсена–Закаи представлено так, что его структура совпадает со структурой уравнения (8).

Это уравнение описывает закон изменения ненормированной апостериорной плотности вероятности  $\rho(t, x | Y_0^t)$  вектора состояния  $\tilde{X} = \tilde{X}(t)$  в момент времени  $t$  для вспомогательной стохастической системы при условии, что вектор сноса –  $\tilde{f}(t, x, Y(t))$ , а матрица диффузии совпадает с матрицей диффузии исходного объекта наблюдения (1) –  $g(t, x)$ . Начальное состояние вспомогательной стохастической системы совпадает с начальным состоянием  $X_0$

исходной системы (1). Кроме того, во вспомогательной стохастической системе возможны следующие события, образующие неоднородные пуассоновские потоки:

1) обрыв траектории с суммарной интенсивностью  $\lambda(t, \tilde{X}(t)) + v^-(t, \tilde{X}(t), Y(t))$ , т.е. вероятность обрыва траектории при  $\tilde{X}(t) = x$  и  $Y(t) = y$  задается выражением

$$P^-(t, t + \Delta t) = (\lambda(t, x) + v^-(t, x, y))\Delta t + o(\Delta t);$$

2) ветвление траектории с интенсивностью  $v^+(t, \tilde{X}(t), Y(t))$ , т.е. вероятность ветвления траектории при  $\tilde{X}(t) = x$  и  $Y(t) = y$  задается выражением

$$P^+(t, t + \Delta t) = v^+(t, x, y)\Delta t + o(\Delta t);$$

3) ветвление траектории со скачком с интенсивностью  $\tilde{\lambda}(t, \tilde{X}(t), Y(t))$ , т.е. вероятность такого события при  $\tilde{X}(t) = x$  и  $Y(t) = y$  задается выражением

$$P^*(t, t + \Delta t) = \tilde{\lambda}(t, x, y)\Delta t + o(\Delta t),$$

а величина  $\tilde{X}(\tau_k)$  при ветвлении со скачком для новой ветви определяется условной плотностью вероятности  $\tilde{\eta}(\tau_k, x | \xi, y)$ , если  $\tilde{X}(\tau_k - 0) = \xi$ ,  $Y(\tau_k) = y$ ,  $\tau_k$  – момент ветвления.

Выражение

$$(\lambda(t, x) + v^-(t, x, Y(t)))\rho(t, x | Y_0^t)$$

определяет функцию поглощения, а выражение

$$\int_{R^n} \tilde{\lambda}(t, \xi, Y(t))\tilde{\eta}(t, x | \xi, Y(t))\rho(t, \xi | Y_0^t)d\xi + v^+(t, x, Y(t))\rho(t, x | Y_0^t)$$

– функцию восстановления траекторий случайного процесса  $\tilde{X}(t)$  [1].

Для этой системы распределением моментов времени появления обрывов и ветвлений управляет процесс  $Y(t)$ , а не  $Z(t)$ , как это происходит со вспомогательной стохастической системой, построенной на основе классического, а не робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи. Этот процесс влияет и на поведение траекторий между моментами ветвлений, и на интенсивность ветвлений со скачком, и на распределение величины этого скачка. Основываясь на результатах моделирования, можно утверждать, что интенсивности

$$v^-(t) = v^-(t, X(t), Y(t)) \text{ и } v^+(t) = v^+(t, X(t), Y(t))$$

меняются значительно медленнее по сравнению с интенсивностями

$$\mu^-(t) = \mu^-(X(t), Z(t)) \text{ и } \mu^+(t) = \mu^+(X(t), Z(t)),$$

следовательно, среднее число обрывов и ветвлений в единицу времени оказывается существенно меньше. Наряду с этим есть и недостаток, который проявляется в нарушении

«баланса» между поглощением и восстановлением траекторий при разрыве траектории. Если для исходной стохастической системы интенсивности, входящие в функции поглощения и восстановления, одинаковы – они совпадают с интенсивностью  $\lambda(t, x)$  разрыва траекторий случайного процесса  $X(t)$ , то для вспомогательной стохастической системы они разные. Даже если в исходной постановке задачи  $\lambda(t, x) = \lambda = \text{const}$ , то для случайного процесса  $\tilde{X}(t)$  при восстановлении интенсивность будет переменной по времени и будет определяться текущим состоянием, поскольку она должна вычисляться на траекториях  $\tilde{X}(t)$  и  $Y(t)$ . Эта интенсивность выражается через коэффициент сноса  $c(x)$  в уравнении (3) или (4) модели измерительной системы и явным образом зависит от  $Y(t)$ .

Ненормированную апостериорную плотность вероятности  $\rho(t, x | Y_0^t)$  можно найти приближенно, моделируя траектории вспомогательного случайного процесса  $\tilde{X}(t)$  с учетом обрывов, разрывов и ветвлений. Как и в аналогичных алгоритмах, разработанных для более простых моделей систем наблюдения [5], [6], по ансамблю траекторий, полученному в результате применения методов численного решения стохастических дифференциальных уравнений и моделирования неоднородных пуассоновских потоков событий [2], [3], можно оценить функцию  $\rho(t, x | Y_0^t)$ , например, с помощью построения гистограммы, и по этой оценке найти апостериорную плотность вероятности  $p(t, x | Y_0^t)$  согласно формулам (6) и (9). По известной функции  $p(t, x | Y_0^t)$  может быть найдена и оптимальная оценка  $\hat{X}(t)$ , причем можно использовать не только выражение (5), если модифицировать постановку задачи оптимальной фильтрации, заменив критерий минимума среднеквадратической ошибки оценивания каким-либо другим критерием [3].

Как отмечалось при формулировании постановки задачи, стационарность модели измерительной системы не имеет принципиального значения и предлагаемая методика решения задачи оптимальной фильтрации может применяться и для нестационарных моделей. При зависимости от времени коэффициента сноса в уравнении (3) или (4) модели измерительной системы в робастном уравнении Дункана–Мортенсена–Закаи появится дополнительное слагаемое, которое будет относиться к интенсивностям обрывов и ветвлений траекторий вспомогательного случайного процесса [7]. Кроме того, можно рассматривать вариант задачи оптимальной фильтрации, когда размерности вектора измерений и вектора шума в уравнении измерительной системы не совпадают, а в случае совпадения коэффициент при шуме необязательно представляет собой единичную матрицу и может быть матричной функцией времени, но не функцией вектора состояния [3], [4].

Для моделирования неоднородных пуассоновских потоков событий рекомендуется использовать метод «максимального сечения» [2], а для моделирования фрагментов траекторий вспомогательного случайного процесса  $\tilde{X}(t)$  между моментами ветвлений и до момента обрыва можно применять любые подходящие алгоритмы численного решения стохастических дифференциальных уравнений [3].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. – М.: Физматлит, 1993.
2. Михайлов Г.А., Аверина Т.А. Алгоритм «максимального сечения» в методе Монте-Карло // Доклады АН. 2009. Т. 428. № 2. С. 163–165.
3. Пантелеев А.В., Руденко Е.А., Бортаковский А.С. Нелинейные системы управления: описание, анализ и синтез. – М.: Вузовская книга, 2008.
4. Параев Ю.И. Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. – М.: Советское радио, 1976.



5. Рыбаков К.А. Сведение задачи нелинейной фильтрации к задаче анализа стохастических систем с обрывами и ветвлениями траекторий // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. № 3. С. 91–110. [Электронный ресурс]. URL: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
6. Рыбаков К.А. Приближенное решение задачи оптимальной нелинейной фильтрации для стохастических дифференциальных систем методом статистических испытаний // Сибирский журнал вычислительной математики. 2013. Т. 16. № 4. С. 377–391.
7. Рыбаков К.А. О решении робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи для нестационарных систем // Информационные и телекоммуникационные технологии. 2014. № 22. С. 9–15.
8. Рыбаков К.А. Приближенный метод фильтрации сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // Научный вестник МГТУ ГА. 2014. № 207. С. 54–60.
9. Рыбаков К.А. Решение робастного уравнения Дункана–Мортенсена–Закаи для систем диффузионно-скачкообразного типа на основе спектрального метода // Системи обробки інформації. 2014. Вып. 7 (123). С. 143–147.
10. Синицын И.Н. Фильтры Калмана и Пугачева. – М.: Логос, 2007.

#### FILTERING FOR JUMP-DIFFUSION MODELS BY STATISTICAL MODELING METHOD

Rybakov K.A.

This article develops new methods that reduce the optimal filtering problem for jump-diffusion models to the analysis problem for the special stochastic system with jumps, branching and terminating trajectories. Earlier appropriate methods and algorithms have been proposed and tested for diffusion models.

**Keywords:** branching processes, conditional density, Duncan–Mortensen–Zakai equation, jump-diffusion, Monte Carlo method, optimal filtering problem, statistical modeling, stochastic system.

#### REFERENCES

1. Kazakov I.Ye., Artem'ev V.M., Bukhalev V.A. *Analiz sistem sluchaynoy struktury* (Analysis of Systems with Random Structure), Moscow, Fizmatlit Publishing Company, Nauka Publishers, 1993.
2. Mikhaylov G.A., Averina T.A. The Maximal Section Algorithm in the Monte Carlo Method, *Doklady Mathematics*, 2009, vol. 80, no. 2, pp. 671–673.
3. Pantelev A.V., Rudenko Ye.A., Bortakovskiy A.S. *Nelineynye sistemy upravleniya: opisaniye, analiz i sintez* (Nonlinear Control Systems: Description, Analysis, and Synthesis), Moscow, University Book, 2008.
4. Paraev Yu.I. *Vvedeniye v statisticheskuyu dinamiku protsessov upravleniya i fil'tratsii* (Introduction to Statistical Dynamics of Control and Filtering Processes), Moscow, Soviet Radio, 1976.
5. Rybakov K.A. *Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya*, 2012, no. 3, pp. 91–110, available at: <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
6. Rybakov K.A. Solving approximately an optimal nonlinear filtering problem for stochastic differential systems by statistical modeling, *Numerical Analysis and Applications*, 2013, vol. 6, no. 4, pp. 324–336.
7. Rybakov K.A. *Informatsionnye i telekommunikatsionnye tekhnologii*, 2014, no. 22, pp. 9–15.
8. Rybakov K.A. *Nauchnyi vestnik MGTU GA*, 2014, no. 207, pp. 54–60.
9. Rybakov K.A. *Sistemy obrabotki informatsii*, 2014, no. 7 (123), pp. 143–147.
10. Sinityn I.N. *Fil'try Kalmana i Pugacheva* (Kalman and Pugachev Filters), Moscow, Logos, 2007.

#### Сведения об авторе

**Рыбаков Константин Александрович**, 1979 г.р., окончил МАИ (2002), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики факультета «Прикладная математика и физика» МАИ, автор 110 научных работ, область научных интересов – анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания систем управления, методы моделирования систем управления.