

УДК 519.217.4 + 519.633.2

СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД ФИЛЬТРАЦИИ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ В СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ ДИФфуЗИОННО-СКАЧКООБРАЗНОГО ТИПА¹

К.А. РЫБАКОВ

В статье рассматривается решение задач оптимальной фильтрации и прогнозирования сигналов в нестационарных стохастических дифференциальных системах с пуассоновской составляющей. Для приближенного нахождения апостериорной плотности вероятности вектора состояния объекта наблюдения применяется спектральный метод, в основе метода лежит представление решений робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи и уравнения Колмогорова – Феллера в виде ортогональных рядов.

Ключевые слова: апостериорная плотность вероятности, фильтрация, прогнозирование, робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи, спектральный метод, стохастическая система, уравнение Колмогорова – Феллера.

ВВЕДЕНИЕ

В продолжение исследований, начатых в [1–4], рассматриваются задачи оптимальной фильтрации и прогнозирования сигналов в стохастических дифференциальных системах диффузионно-скачкообразного типа. В этих задачах требуется оценить вектор состояния динамической системы (объекта наблюдения) в текущий и будущий моменты времени по результатам измерений, полученных к текущему моменту времени, с учетом помех. Предполагается, что объект наблюдения описывается стохастическим дифференциальным уравнением с пуассоновской составляющей, а измерительная система – стохастическим дифференциальным уравнением без пуассоновской составляющей. На этапе фильтрации предлагается использовать робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи, а на этапе прогнозирования – уравнение Колмогорова – Феллера. Для решения этих уравнений применена спектральная форма математического описания [5, 6]. Такой подход более универсален по сравнению с другими подходами, использующими математический аппарат ортогональных рядов для представления плотностей вероятности [7–10]. В задачах анализа, синтеза, идентификации и фильтрации в стохастических дифференциальных системах его универсальность и удобство реализации алгоритмов расчета обусловлены тем, что ортонормированный базис не фиксируется и все соотношения записываются в матричной форме, вид этих соотношений не зависит от базиса.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Модель объекта наблюдения задается стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей [3, 4, 7, 11, 12]:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0, \quad (1)$$

где $X \in R^n$ – вектор состояния, $t \in [t_0, T + \Delta(T)]$ – время; $f(t, x): [t_0, T + \Delta(T)] \times R^n \rightarrow R^n$ – n -мерная вектор-функция, $\sigma(t, x): [t_0, T + \Delta(T)] \times R^n \rightarrow R^{n \times s}$ – матричная функция $n \times s$; $\Delta(t): [t_0, T] \rightarrow [0, +\infty)$ – опережение по времени: $\max_{t \in [t_0, T]} (t + \Delta(t)) = T + \Delta(T)$; $W(t)$ – s -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния X_0 с плотностью вероят-

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-08-00323-а.

ности $\varphi_0(x)$; $Q(t)$ – общий пуассоновский процесс, заданный соотношением $Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \Delta_k$, в котором $P(t)$ – пуассоновский процесс, Δ_k – независимые случайные векторы из R^n , распределение которых задано плотностью вероятности $\psi(\tau_k, \Delta)$, т.е. вектор состояния X получает случайные приращения в моменты времени $\tau_1, \tau_2, \dots \in [t_0, T + \Delta(T)]$, образующие пуассоновский поток событий: $X(\tau_k) = X(\tau_k - 0) + \Delta_k$. Если величина приращения зависит от вектора состояния, то используется условная плотность вероятности $\psi(\tau_k, \Delta | x)$, характеризующая распределение Δ_k при условии $X(\tau_k - 0) = x$. В частном случае $\psi(\tau_k, \Delta | x) = \psi(\tau_k, \Delta)$. Наряду с $\psi(\tau_k, \Delta | x)$ введем плотность вероятности $\eta(\tau_k, x | \xi)$, характеризующую распределение $X(\tau_k)$ при условии $X(\tau_k - 0) = \xi$, т.е. $\Delta_k = X(\tau_k) - \xi$. Пуассоновский поток событий и, следовательно, моменты времени τ_1, τ_2, \dots , а также пуассоновский процесс $P(t)$ определяются интенсивностью $\lambda(t, x)$.

Модель измерительной системы задается уравнением

$$dY(t) = c(t, X(t))dt + \zeta(t)dV(t), \quad Y(t_0) = Y_0 = 0, \quad (2)$$

где $Y \in R^m$ – вектор измерений, $t \in [t_0, T]$; $c(t, x): [t_0, T] \times R^n \rightarrow R^m$ – m -мерная вектор-функция, $\zeta(t): [t_0, T] \rightarrow R^{m \times d}$ – матричная функция $m \times d$; $V(t)$ – d -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $W(t)$ и от начального состояния X_0 .

Задачи фильтрации и прогнозирования состоят в нахождении оценки $\hat{X}(t + \Delta(t))$ по результатам измерений $Y_0^t = \{Y(\tau), \tau \in [t_0, t]\}$, для случая $\Delta(t) = 0$ – это задача фильтрации, а для $\Delta(t) > 0$ – задача прогнозирования. При решении задач фильтрации и прогнозирования, как и ранее [1–4, 12, 13], будем исходить из несмещенности оценки и минимума среднеквадратического отклонения. Тогда $\hat{X}(t + \Delta(t)) = \mathbb{M}[X(t + \Delta(t)) | Y_0^t]$, где $\mathbb{M}[\cdot]$ – математическое ожидание.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

Задачу прогнозирования будем решать в два этапа. На первом этапе определим апостериорную плотность вероятности $p(t, x | Y_0^t)$ вектора состояния объекта наблюдения с учетом имеющихся измерений Y_0^t , используя уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи [3, 9–12]:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t, x | Y_0^t)}{dt} = & \mathcal{L}\varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t) + \int_{R^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)\varphi(t, \xi | Y_0^t)d\xi + \\ & + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m c_{\alpha}(t, x)q_{\alpha\beta}(t) \frac{dY_{\beta}(t)}{dt} \varphi(t, x | Y_0^t), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\varphi(t, x | Y_0^t) = & \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m c_{\alpha}(t, x)q_{\alpha\beta}(t)c_{\beta}(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t), \quad q^{-1}(t) = \zeta(t)\zeta^T(t), \\ \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) = & - \sum_{i=1}^n \frac{\partial [f_i(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t)]}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t)]}{\partial x_i \partial x_j}, \quad g(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^T(t, x). \end{aligned}$$

Уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи – стохастическое интегро-дифференциальное уравнение в частных производных, его можно записывать в разных формах (приведенное уравнение записано в форме Стратоновича). Оно содержит процесс типа белого шума в последних слагаемых или траекторию белого шума при фиксированных измерениях, что вносит дополнительные сложности в применении приближенных методов решения интегро-дифференциальных уравнений, например, спектральных методов, основанных на ортогональных разложениях плотности вероятности.

Пусть $h(t, x) = q(t)c(t, x)$, $h(t, x)$ – m -мерная вектор-функция. Тогда уравнение (3) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi(t, x | Y_0^t)}{dt} &= \mathcal{L}\varphi(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t) + \int_{R^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)\varphi(t, \xi | Y_0^t)d\xi + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^m h_{\alpha}(t, x)\frac{dY_{\alpha}(t)}{dt}\varphi(t, x | Y_0^t), \quad \mathcal{L}\varphi(t, x | Y_0^t) = \mathcal{A}\varphi(t, x | Y_0^t) - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^m h_{\alpha}(t, x)c_{\alpha}(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t), \end{aligned}$$

и с помощью замены

$$\rho(t, x | Y_0^t) = \mu^{-1}(t, x)\varphi(t, x | Y_0^t), \quad \mu(t, x) = \exp\left\{\sum_{\alpha=1}^m h_{\alpha}(t, x)Y_{\alpha}(t)\right\}, \quad (4)$$

перейти к робастному уравнению Дункана – Мортенсена – Закаи [4, 12] для ненормированной апостериорной плотности $\rho(t, x | Y_0^t)$, вообще говоря, характеризующей распределение вектора состояния другой стохастической системы, отличной от (1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial\rho(t, x | Y_0^t)}{\partial t} &= \mathcal{L}\rho(t, x | Y_0^t) - \lambda(t, x)\rho(t, x | Y_0^t) + \\ &+ \int_{R^n} \lambda(t, \xi)\eta(t, x | \xi)\exp\left\{\sum_{\alpha=1}^m (h_{\alpha}(t, \xi) - h_{\alpha}(t, x))Y_{\alpha}(t)\right\}\rho(t, \xi | Y_0^t)d\xi - \\ &- \sum_{\alpha=1}^m Y_{\alpha}(t)\mathcal{L}_{\alpha}\rho(t, x | Y_0^t) + \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m Y_{\alpha}(t)Y_{\beta}(t)\mathcal{L}_{\alpha\beta}\rho(t, x | Y_0^t) - \sum_{\alpha=1}^m Y_{\alpha}(t)\frac{\partial h_{\alpha}(t, x)}{\partial t}\rho(t, x | Y_0^t). \end{aligned} \quad (5)$$

В уравнении (5) $\mathcal{L}_{\alpha} = [\mathcal{H}_{\alpha}, \mathcal{A}]$, $\mathcal{L}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[\mathcal{H}_{\alpha}, \mathcal{A}_{\beta}] = \frac{1}{2}[\mathcal{H}_{\alpha}, [\mathcal{H}_{\beta}, \mathcal{A}]]$, а $[\mathcal{H}_{\alpha}, \mathcal{A}]$ и $[\mathcal{H}_{\alpha}, \mathcal{A}_{\beta}]$ – коммутаторы, \mathcal{H}_{α} – оператор умножения на функцию $h_{\alpha}(t, x)$, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m$. Начальное условие для этого уравнения $\rho(t_0, x) = \varphi_0(x)$, что следует из формулы замены ненормированной апостериорной плотности вероятности (4) при $t = t_0$ с учетом равенства $Y(t_0) = 0$.

Робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи не содержит процессов типа белого шума или их траекторий, т.е. оно не относится к классу стохастических дифференциальных уравнений, оно удобнее для приближенного решения с помощью различных методов, в том числе и спектрального [1–4].

Уравнение (5) должно решаться на промежутке $[t_0, \theta]$, где $\theta \in [t_0, T]$ – текущее время. Переход от функции $\rho(t, x | Y_0^t)$ к апостериорной плотности вероятности $p(t, x | Y_0^t)$ вектора состояния объекта наблюдения осуществляется за два шага: обратная замена и нормировка, т.е.

$$\varphi(t, x | Y_0^t) = \mu(t, x) \rho(t, x | Y_0^t), \quad p(t, x | Y_0^t) = \frac{\varphi(t, x | Y_0^t)}{\int_{R^n} \varphi(t, x | Y_0^t) dx}, \quad t \in [t_0, \theta].$$

Отметим, что часто ограничиваются рассмотрением только стационарной модели измерительной системы: $c(t, x) = c(x)$ и $\zeta(t) = \zeta$. Кроме того, для удобства матрица ζ полагается равной единичной матрице, т.е. $h(t, x) = h(x) = c(x)$. При такой постановке задачи робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи проще, оно не содержит последнего слагаемого с производными координат функции $h(t, x)$ по времени [1, 3, 12, 15]. Стационарность модели объекта наблюдения, т.е. $f(t, x) = f(x)$ и $\sigma(t, x) = \sigma(x)$, робастное уравнение Дункана – Мортенсена – Закаи не упрощает. Нестационарный случай рассмотрен в [2, 16] для стохастических дифференциальных систем диффузионного типа, а в [4] для систем диффузионно-скачкообразного типа.

На втором этапе в случае $\Delta(\theta) > 0$ определяется апостериорная плотность вероятности $p(t, x | Y_0^\theta)$ как решение уравнения Колмогорова – Феллера

$$\frac{\partial p(t, x | Y_0^\theta)}{\partial t} = \mathcal{A}p(t, x | Y_0^\theta) - \lambda(t, x)p(t, x | Y_0^\theta) + \int_{R^n} \lambda(t, \xi) \eta(t, x | \xi) p(t, \xi | Y_0^\theta) d\xi \quad (6)$$

на промежутке $[\theta, \theta + \Delta(\theta)]$ с начальным условием $p(\theta, x | Y_0^\theta)$ – апостериорной плотностью вероятности вектора состояния, полученной на первом этапе.

3. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД НАХОЖДЕНИЯ АПОСТЕРИОРНОЙ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

В [2] спектральный метод был применен к решению робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи, соответствующего нестационарной системе наблюдения диффузионного типа, т.е. без пуассоновской составляющей в уравнении объекта наблюдения, а в [3] – для стационарной системы наблюдения диффузионно-скачкообразного типа. Эти результаты были использованы для решения задачи фильтрации в нестационарных системах наблюдения диффузионно-скачкообразного типа [4]. Используя соотношения спектрального метода для решения задачи анализа стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа [11, 17], можно построить спектральный метод решения задач фильтрации и прогнозирования сигналов для нестационарных систем наблюдения диффузионно-скачкообразного типа.

Определения и основные свойства спектральных характеристик функций, линейных операторов и функционалов, используемые далее, а также многочисленные примеры применения спектрального метода в задачах анализа непрерывных стохастических систем приведены в [5].

Далее определим базисные системы и получим спектральные аналоги уравнений (5) и (6) в предположении, что момент времени θ зафиксирован. Пусть $\{e^{(\Phi)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ и $\{e^{(N)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ – ортонормированные базисные системы пространств $L_2([t_0, \theta] \times R^n)$ и $L_2([\theta, \theta + \Delta(\theta)] \times R^n)$, причем функции $e^{(\Phi)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)$ и $e^{(N)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)$ порождаются всевозможными произведениями функций, образующих ортонормированные базисные системы $\{q^{(\Phi)}(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$, $\{q^{(N)}(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ и $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ пространств $L_2([t_0, \theta])$, $L_2([\theta, \theta + \Delta(\theta)])$ и $L_2(\square^n)$ соответственно:

$$e^{(\Phi)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) = q^{(\Phi)}(i_0, t) \cdot p(i_1, \dots, i_n, x), \quad e^{(\Pi)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) = q^{(\Pi)}(i_0, t) \cdot p(i_1, \dots, i_n, x).$$

Будем придерживаться обозначений из [2, 4, 5, 11, 17]. Тогда $P(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент t_0 , $A(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора \mathcal{A} , $C_\alpha(n+1, n+1)$ и $H_\alpha(n+1, n+1)$ – спектральные характеристики операторов \mathcal{C}_α и \mathcal{H}_α соответственно, где \mathcal{C}_α – оператор умножения на функцию $c_\alpha(t, x)$, $\alpha = 1, 2, \dots, m$:

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}] = A(n+1, n+1), \quad \mathbb{S}[\mathcal{C}_\alpha] = C_\alpha(n+1, n+1), \quad \mathbb{S}[\mathcal{H}_\alpha] = H_\alpha(n+1, n+1).$$

Перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы $\{e^{(\Phi)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$.

Таким образом, спектральные характеристики $L(n+1, n+1)$, $L_\alpha(n+1, n+1)$ и $L_{\alpha\beta}(n+1, n+1)$ операторов \mathcal{L} , \mathcal{L}_α и $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ соответственно, $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, m$, определенные относительно той же базисной системы, выражаются через спектральные характеристики $A(n+1, n+1)$, $C_\alpha(n+1, n+1)$ и $H_\alpha(n+1, n+1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{S}[\mathcal{L}] &= L(n+1, n+1) = A(n+1, n+1) - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^m H_\alpha(n+1, n+1) \cdot C_\alpha(n+1, n+1), \\ \mathbb{S}[\mathcal{L}_\alpha] &= L_\alpha(n+1, n+1) = [H_\alpha(n+1, n+1), A(n+1, n+1)], \\ \mathbb{S}[\mathcal{L}_{\alpha\beta}] &= L_{\alpha\beta}(n+1, n+1) = \frac{1}{2} [H_\alpha(n+1, n+1), [H_\beta(n+1, n+1), A(n+1, n+1)]], \end{aligned}$$

где $[H_\alpha(n+1, n+1), A(n+1, n+1)]$ – коммутатор спектральных характеристик линейных операторов [1].

Далее, $\Lambda(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на интенсивность $\lambda(t, x)$, а $H(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика интегрального оператора \mathcal{H} , задаваемого соотношением

$$\mathcal{H}\rho(t, x) = \int_{R^n} \lambda(t, \xi) \eta(t, x | \xi) \exp \left\{ \sum_{\alpha=1}^m (h_\alpha(t, \xi) - h_\alpha(t, x)) Y_\alpha(t) \right\} \rho(t, \xi) d\xi;$$

$Y_\alpha(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $Y_\alpha(t)$, $\dot{H}_\alpha(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на производную функции $h_\alpha(t, x)$ по времени, $\alpha = 1, 2, \dots, m$. Спектральные характеристики $\Lambda(n+1, n+1)$, $H(n+1, n+1)$, $Y_\alpha(n+1, n+1)$ и $\dot{H}_\alpha(n+1, n+1)$, как и обозначенные выше, определены относительно базисной системы $\{e^{(\Phi)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$.

Кроме того, пусть $q^{(\Phi)}(1, 0; t_0)$ – матрица-столбец значений функций базисной системы $\{q^{(\Phi)}(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$ при $t = t_0$: $q^{(\Phi)}(1, 0; t_0) = [q^{(\Phi)}(0, t_0) \ q^{(\Phi)}(1, t_0) \ q^{(\Phi)}(2, t_0) \ \dots]^\top$, $\Phi_0(n, 0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\varphi_0(x)$ начального состояния X_0 , определенная относительно базисной системы $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^\infty$; $R(n+1, 0)$ – искомая спектральная харак-

теристика функции $\rho(t, x | Y_0^t)$, определенная относительно базисной системы $\{e^{(\Phi)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$.

Применим спектральное преобразование к левой и правой частям уравнения (5). Учитывая линейность спектрального преобразования и введенные обозначения, получаем спектральный аналог робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи [4]:

$$\begin{aligned} P(n+1, n+1) \cdot R(n+1, 0) - q^{(\Phi)}(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0) &= L(n+1, n+1) \cdot R(n+1, 0) - \Lambda(n+1, n+1) \times \\ &\times R(n+1, 0) + H(n+1, n+1) \cdot R(n+1, 0) - \sum_{\alpha=1}^m Y_{\alpha}(n+1, n+1) \cdot L_{\alpha}(n+1, n+1) \cdot R(n+1, 0) + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m Y_{\alpha}(n+1, n+1) \cdot Y_{\beta}(n+1, n+1) \cdot L_{\alpha\beta}(n+1, n+1) \cdot R(n+1, 0) - \\ &- \sum_{\alpha=1}^m Y_{\alpha}(n+1, n+1) \cdot \dot{H}_{\alpha}(n+1, n+1) \cdot R(n+1, 0). \end{aligned} \quad (7)$$

Решение робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи в спектральной форме математического описания имеет вид

$$\begin{aligned} R(n+1, 0) &= (P(n+1, n+1) - L(n+1, n+1) + \Lambda(n+1, n+1) - H(n+1, n+1) + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^m Y_{\alpha}(n+1, n+1) \cdot L_{\alpha}(n+1, n+1) - \sum_{\alpha=1}^m \sum_{\beta=1}^m Y_{\alpha}(n+1, n+1) \cdot Y_{\beta}(n+1, n+1) \cdot L_{\alpha\beta}(n+1, n+1) + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^m Y_{\alpha}(n+1, n+1) \cdot \dot{H}_{\alpha}(n+1, n+1))^{-1} \cdot (q^{(\Phi)}(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \rho(t, x | Y_0^t) &= \mathbb{S}^{-1}[R(n+1, 0)] = \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} r_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e^{(\Phi)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (t, x) \in [t_0, \theta] \times R^n, \\ \rho(\theta, x | Y_0^{\theta}) &= \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} r_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e^{(\Phi)}(i_0, i_1, \dots, i_n, \theta, x), \quad x \in R^n, \end{aligned} \quad (8)$$

где $r_{i_0 i_1 \dots i_n}$ – элементы спектральной характеристики $R(n+1, 0)$, т.е. коэффициенты разложения функции $\rho(t, x | Y_0^t)$ в ряд по функциям базисной системы $\{e^{(\Phi)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$.

Для записи спектрального аналога уравнения Колмогорова – Феллера (6) обозначим через $q^{(n)}(1, 0; \theta)$ матрицу-столбец значений функций базисной системы $\{q^{(n)}(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t = \theta$: $q^{(n)}(1, 0; \theta) = [q^{(n)}(0, \theta) \ q^{(n)}(1, \theta) \ q^{(n)}(2, \theta) \ \dots]^T$, через $\Phi(n+1, 0)$ – спектральную характеристику функции $p(t, x | Y_0^t)$, которую требуется найти наряду с $R(n+1, 0)$, а через $K(n+1, n+1)$ – спектральную характеристику интегрального оператора \mathcal{K} , задаваемого соотношением

$$\mathcal{K}p(t, x) = \int_{R^n} \lambda(t, \xi) \eta(t, x | \xi) p(t, \xi) d\xi.$$

Новые спектральные характеристики $\Phi(n+1,0)$ и $K(n+1,n+1)$ определены относительно базисной системы $\{e^{(n)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$. Кроме того, пусть $\Phi_{\theta}(n,0)$ – спектральная характеристика апостериорной плотности вероятности $p(\theta, x | Y_0^{\theta})$ как функции вектора состояния, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$. Тогда [11, 17]

$$P(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - q^{(n)}(1, 0; \theta) \otimes \Phi_{\theta}(n, 0) = A(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - \Lambda(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) + K(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) \quad (9)$$

и

$$\Phi(n+1, 0) = (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \Lambda(n+1, n+1) - K(n+1, n+1))^{-1} \cdot (q^{(n)}(1, 0; \theta) \otimes \Phi_{\theta}(n, 0)).$$

В уравнении (9) $P(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в текущий момент θ (начальный для промежутка $[\theta, \theta + \Delta(\theta)]$). Как и выше, $A(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора \mathcal{A} , $\Lambda(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на интенсивность $\lambda(t, x)$, однако для этого уравнения перечисленные спектральные характеристики вычисляются относительно базисной системы $\{e^{(n)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$, а не $\{e^{(\Phi)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$.

Таким образом,

$$p(t, x | Y_0^{\theta}) = \mathbb{S}^{-1}[\Phi(n+1, 0)] = \sum_{i_0=0}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_n=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e^{(n)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x), \quad (t, x) \in [\theta, \theta + \Delta(\theta)] \times R^n, \quad (10)$$

где $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$ – элементы спектральной характеристики $\Phi(n+1, 0)$, т.е. коэффициенты разложения функции $p(t, x | Y_0^{\theta})$ в ряд по функциям базисной системы $\{e^{(n)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$.

Используя спектральную форму математического описания, можно выразить спектральные характеристики $R(n+1, 0)$ и $\Phi_{\theta}(n, 0)$ функций $\rho(t, x | Y_0^t)$ и $p(\theta, x | Y_0^{\theta})$ соответственно, связав таким образом уравнения (7) и (9) в спектральной области. Также можно выразить спектральную характеристику оптимальной оценки $\hat{X}(t)$ через спектральную характеристику $\Phi(n+1, 0)$. Для этого необходимо использовать спектральные характеристики линейных функционалов, ставящих в соответствие функции ее значение в определенной точке и значение интеграла от функции [5], а именно можно показать, что

$$\Phi_{\theta}(n, 0) = \left(\left(q^{(\Phi)}(0, 1; \theta) \otimes J(0, n) \right) \cdot \Psi(n+1, 0) \right)^{-1} \cdot \left(\left(q^{(\Phi)}(0, 1; \theta) \otimes E(n, n) \right) \cdot \Psi(n+1, 0) \right),$$

$$\Psi(n+1, 0) = M(n+1, n+1) \cdot R(n+1, 0),$$

где $q^{(\Phi)}(0, 1; \theta)$ – матрица-строка значений функций базисной системы $\{q^{(\Phi)}(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t = \theta$: $q^{(\Phi)}(0, 1; \theta) = [q^{(\Phi)}(0, \theta) \quad q^{(\Phi)}(1, \theta) \quad q^{(\Phi)}(2, \theta) \quad \dots]$, $J(0, n)$ – спектральная характеристика функционала, ставящего в соответствие функции вектора состояния интеграл от этой функции по пространству R^n , определенная относительно базисной системы $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$, а

$M(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\mu(t, x)$, определенная относительно базисной системы $\{e^{(\Phi)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$.

Отметим, что спектральные характеристики $H(n+1, n+1)$ и $K(n+1, n+1)$ интегральных операторов \mathcal{H} и \mathcal{K} соответственно связаны преобразованием подобия

$$H(n+1, n+1) = M^{-1}(n+1, n+1) \cdot K(n+1, n+1) \cdot M(n+1, n+1),$$

если они определены относительно одной и той же базисной системы со спектральной характеристикой $M(n+1, n+1)$.

Для координаты оптимальной оценки $\hat{X}_i(\theta + \Delta(\theta))$ справедливо соотношение

$$\hat{X}_i(\theta + \Delta(\theta)) = \left(q^{(n)}(0, 1; \theta + \Delta(\theta)) \otimes J(0, n) \right) \cdot X_i(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0), \quad i = 1, \dots, n,$$

где $q^{(n)}(0, 1; \theta + \Delta(\theta))$ – матрица-строка значений функций $\{q^{(n)}(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ при $t = \theta + \Delta(\theta)$: $q^{(n)}(0, 1; \theta + \Delta(\theta)) = [q^{(n)}(0, \theta + \Delta(\theta)) \quad q^{(n)}(1, \theta + \Delta(\theta)) \quad q^{(n)}(2, \theta + \Delta(\theta)) \quad \dots]$, $X_i(n+1, n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на координату x_i , определенная относительно базисной системы $\{e^{(n)}(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$.

При численных расчетах необходимо усекавать все спектральные характеристики и представлять приближенное решение задач фильтрации и прогнозирования в виде частичных сумм рядов (8) и (10), как и при решении задачи анализа [5, 11, 17]. Базисные системы для представления функций времени и вектора состояния могут формироваться различным образом из базисных функций одной переменной [5, 6, 18]. После определения апостериорной плотности вероятности $p(t, x | Y_0^\theta)$ можно найти оптимальную оценку $\hat{X}(t)$, $t \in [\theta, \theta + \Delta(\theta)]$, $\theta \in [t_0, T]$ или воспользоваться соотношением для нахождения $\hat{X}_i(\theta + \Delta(\theta))$, которое приведено выше.

В рассматриваемых задачах оптимальной фильтрации и прогнозирования при выводе спектральных аналогов робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи и уравнения Колмогорова – Феллера предполагалось, что момент времени θ зафиксирован вместе с измерениями Y_0^θ , однако можно воспользоваться и базисными системами, заданными на нестационарных отрезках времени [6], что позволит решать задачу оценивания текущего и будущего состояний сразу для всех моментов времени $\theta \in [t_0, T]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- 1. Рыбаков К.А.** Решение робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи спектральным методом // Системи обробки інформації. – 2013. – Вып. 7 (114). – С. 139–143.
- 2. Рыбаков К.А.** О решении робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи для нестационарных систем // Информационные и телекоммуникационные технологии. – 2014. – № 22. – С. 9–15.
- 3. Рыбаков К.А.** Решение робастного уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи для систем диффузионно-скачкообразного типа на основе спектрального метода // Системи обробки інформації. – 2014. – Вып. 7 (123). – С. 143–147.
- 4. Рыбаков К.А.** О решении уравнения Дункана – Мортенсена – Закаи для нестационарных систем диффузионно-скачкообразного типа спектральным методом // Актуальные проблемы вычислительной и прикладной математики – 2015. Международная конференция, Новосибирск, 19–23 октября 2015 г.: Тр. конф. – Новосибирск: Абвей, 2015. – С. 643–649.

5. **Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л.** Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2015.
6. **Солодовников В.В., Семенов В.В.** Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974.
7. **Пугачев В.С., Сеницын И.Н.** Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990.
8. **Сеницын И.Н.** Фильтры Калмана и Пугачева. – М.: Логос, 2007.
9. **Lototsky S., Mikulevicius R., Rozovskii B.L.** Nonlinear filtering revisited: A spectral approach // *SIAM Journal on Control and Optimization*. – 1997. Vol. 35, № 2. – Pp. 435 – 461.
10. **Luo X., Yau S.S.-T.** Hermite spectral method to 1-D forward Kolmogorov equation and its application to nonlinear filtering problems // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2013. Vol. 58, № 10. – Pp. 2495–2507.
11. **Рыбаков К.А.** Вероятностный анализ стохастических систем с пуассоновской составляющей // *Научный вестник МГТУ ГА*. – 2013. – № 194. – С. 55–62.
12. **Рыбаков К.А.** Фильтрация сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа на основе метода статистических испытаний // *Научный вестник МГТУ ГА*. – 2015. – № 220. – С. 73–81.
13. **Рыбаков К.А.** Приближенный метод фильтрации сигналов в стохастических системах диффузионно-скачкообразного типа // *Научный вестник МГТУ ГА*. – 2014. – № 207. – С. 54–60.
14. **Параев Ю.И.** Введение в статистическую динамику процессов управления и фильтрации. – М.: Советское радио, 1976.
15. **Hazewinkel M.** Lectures on linear and nonlinear filtering // *Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems* (ed. by W.O. Schiehlen, W. Wedig). – Springer-Verlag, 1988. – Pp. 103–136.
16. **Luo X., Yau S.S.-T.** Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory // *IEEE Transactions on Automatic Control*. – 2013. Vol. 58, № 10. – Pp. 2563–2578.
17. **Аверина Т.А., Рыбаков К.А.** Новые методы анализа воздействия пуассоновских дельта-импульсов в задачах радиотехники // *Журнал радиоэлектроники*. – 2013. – № 1. [Электронный ресурс]. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/contents.html>
18. **Рыбаков К.А.** Многопараметрические базисные системы для представления функций в неограниченных областях // *Научный вестник МГТУ ГА*. – 2013. – № 195 (9). – С. 45–50.

THE SPECTRAL METHOD OF OPTIMAL FILTERING AND EXTRAPOLATION FOR JUMP-DIFFUSION MODELS

Rybakov K.A.

The article deals with the optimal filtering and extrapolation problems for non-stationary stochastic differential systems with a Poisson component. To find an approximate density of the observed object's state vector the spectral method based on the representation of robust Duncan-Mortensen-Zakai equation and Kolmogorov-Feller equation solutions in the form of orthogonal series is used.

Key words: conditional density, extrapolation problem, jump-diffusion, Kolmogorov-Feller equation, filtering problem, robust Duncan-Mortensen-Zakai equation, spectral method, stochastic system.

REFERENCES

1. **Rybakov K.A.** Solving robust Duncan-Mortensen-Zakai equation by spectral method. *Information Processing Systems*. 2013. No. 7 (114). Pp. 139–143. (in Russian).

2. **Rybakov K.A.** Solving robust Duncan-Mortensen-Zakai equation for nonstationary systems. *Information and Communication Technologies*. 2014. No. 22. Pp. 9–15. (in Russian).
3. **Rybakov K.A.** Solving robust Duncan-Mortensen-Zakai equation for jump-diffusion models by spectral method. *Information Processing Systems*. 2014. No. 7 (123). Pp. 143–147. (in Russian).
4. **Rybakov K.A.** The solution of the Duncan-Mortensen-Zakai equation for nonstationary jump-diffusion systems by spectral method. *Proceedings of International Conference “Advanced Mathematics, Computations and Applications 2015”*. Novosibirsk. 2015. Pp. 643–649. (in Russian).
5. **Panteleev A.V., Rybakov K.A., Sotskova I.L.** Spectral Method of Nonlinear Stochastic Control System Analysis. Moscow. 2015. (in Russian).
6. **Solodovnikov V.V., Semenov V.V.** Spectral Theory of Nonstationary Control Systems. Moscow. 1974. (in Russian).
7. **Pugachev V.S., Sinitsyn I.N.** Stochastic Systems: Theory and Applications, World Scientific. 2001.
8. **Sinitsyn I.N.** Kalman and Pugachev Filters. Moscow. 2007. (in Russian).
9. **Lototsky S., Mikulevicius R., Rozovskii B.L.** Nonlinear filtering revisited: A spectral approach. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 1997. Vol. 35. No. 2. Pp. 435–461.
10. **Luo X., Yau S.S.-T.** Hermite spectral method to 1-D forward Kolmogorov equation and its application to nonlinear filtering problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2013. Vol. 58. No. 10. Pp. 2495–2507.
11. **Rybakov K.A.** Probability analysis of stochastic systems with Poisson component. *Scientific Herald MSTUCA*. 2013. No. 194. Pp. 55–62. (in Russian).
12. **Rybakov K.A.** Filtering for jump-diffusion models by statistical modeling method. *Scientific Herald MSTUCA*. 2015. No. 220. Pp. 73–81. (in Russian).
13. **Rybakov K.A.** Approximate filter for jump-diffusion models. *Scientific Herald MSTUCA*. 2014. No. 207. Pp. 54–60. (in Russian).
14. **Paraev Yu.I.** Introduction to Statistical Dynamics of Control and Filtering Processes. Moscow. 1976. (in Russian).
15. **Hazewinkel M.** Lectures on linear and nonlinear filtering, Analysis and Estimation of Stochastic Mechanical Systems (ed. by W.O. Schiehlen, W. Wedig). Springer-Verlag. 1988. Pp. 103–136.
16. **Luo X., Yau S.S.-T.** Complete real time solution of the general nonlinear filtering problem without memory. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2013. Vol. 58. No. 10. Pp. 2563–2578.
17. **Averina T.A., Rybakov K.A.** New methods of Poisson impulses analysis in radio engineering problems. *Journal of Radio Electronics*. 2013. No. 1. Available at: <http://jre.cplire.ru/jre/contents.html>. (in Russian).
18. **Rybakov K.A.** Multiparameter basis to represent functions in unbounded domains // *Scientific Herald MSTUCA*. 2013. No. 195. Pp. 45–50. (in Russian).

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Рыбаков Константин Александрович, 1979 г.р., окончил МАИ (2002), кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической кибернетики факультета «Прикладная математика и физика» МАИ, автор более 100 научных работ. Области научных интересов – анализ и синтез стохастических систем управления, спектральная форма математического описания, методы моделирования систем управления, электронный адрес: rkoffice@mail.ru.