Труды Международной конференции
"Проблемы управления и приложения (техника, производство, экономика)"
Минск, 16 – 20 мая 2005, с. 1–6

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ СИСТЕМАМИ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ О СОСТОЯНИИ

К.А. Рыбаков *

Аннотация. Получены новые достаточные условия оптимальности в задаче управления нелинейными стохастическими системами со случайной структурой при неполной информации о векторе состояния. Приводятся соотношения для определения оптимального управления как для общего случая минимизируемого функционала, так и для нахождения оптимального в среднем управления.

Ключевые слова: системы со случайной структурой, достаточные условия оптимальности, оптимальное управление при неполной информации.

Введение

Современные задачи управления техническими объектами, позволяющие учитывать различные режимы функционирования, скачкообразные внешние воздействия или возможный отказ элементов, приводят к необходимости описания их математических моделей различными уравнениями на разных интервалах времени, т.е. использовать модели систем со случайной структурой, или стохастических мультиструктурных систем.

Примерами систем со случайной структурой могут служить системы поиска и захвата информационного сигнала в задачах навигации и управления полетом летательных аппаратов, системы комбинированного наведения на цель [1], а также системы управления с возможными нарушениями и отказами [2].

В работах [1, 2] рассматривалась задача синтеза оптимального управления с полной обратной связью с учетом смены структуры в случае линейного по плотности вероятности функционала качества. Однако на практике не всегда есть возможность измерения всех координат вектора состояния, кроме того, рассмотрение случая, когда функционал качества линеен по плотности вероятности вектора состояния, сужает класс решаемых задач.

В настоящей работе получены новые достаточные условия оптимальности, основанные на принципе расширения В.Ф. Кротова [3], с использованием методики, предложенной А.В. Пантелеевым для стохастических систем с фиксированной структурой [4]. Другая форма условий оптимальности для таких систем была получена в работах М.М. Хрусталева [5]. Результаты [4, 5] обобщаются на более широкий класс систем – стохастических мультиструктурных систем управления.

Полученные соотношения позволяют найти оптимальное управление с неполной обратной связью при распределенных переходах между структурами [1]. Функционал качества управления в общем случае является нелинейным по плотности вероятности вектора состояния, как частный случай рассмотрен синтез оптимального в среднем управления. Проанализированы предельные случаи информированности и найдены соотношения для синтеза оптимального программного управления и оптимального управления с полной обратной связью.

*Московский авиационный институт, кафедра математической кибернетики, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, 125993 Москва, Россия; rkoffice@mail.ru

1. Постановка задачи

Каждая структура модели стохастической мультиструктурной системы описывается уравнением Ито

$$dX(t) = f^{\langle k\rangle}\big(t, X(t), u^{\langle k\rangle}(t)\big)dt + \sigma^{\langle k\rangle}\big(t, X(t), u^{\langle k\rangle}(t)\big)dW(t), \tag{1}$$

где $X \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $k = 1, 2, ..., N$ – номер структуры, N – число структур, $u^{\langle k\rangle} \in U^{\langle k\rangle} \subseteq \mathbb{R}^q$ – вектор управления структурой с номером k; $t \in T = [t_0, t_1]$ – промежуток времени функционирования системы, моменты времени t_0 и t_1 заданы; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от $X_0 = X(t_0)$; $f^{\langle k\rangle}(t, x, u) : T \times \mathbb{R}^n \times U^{\langle k\rangle} \to \mathbb{R}^n$ – вектор-функция размера n, $\sigma^{\langle k\rangle}(t, x, u) : T \times \mathbb{R}^n \times U^{\langle k\rangle} \to \mathbb{R}^{n\times s}$ – матричная функция размера $n \times s$.

Начальное состояние системы X_0 задается ненормированными плотностями вероятности $\phi_0^{\langle k\rangle}(x)$, при этом выполняется условие $\sum\limits_{k=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^n} \phi_0^{\langle k\rangle}(x)dx = 1$.

При управлении используется информация о времени и о величине m первых координат вектора состояния, $0 \le m \le n$, т.е. $X = \big[X_{(1)}\ X_{(2)}\big]^{\mathrm{T}}$, $u^{\langle k\rangle}(t) = u^{\langle k\rangle}\big(t, X_{(1)}(t)\big)$, где $X_{(1)} = [X_1\ X_2\ ...\ X_m]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $X_{(2)} = [X_{m+1}\ ...\ X_n]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-m}$. Множество $\mathfrak{U}_m^{\langle k\rangle}$ допустимых управлений структурой с номером k состоит из функций $u^{\langle k\rangle}\big(t, x_{(1)}\big) : T \times \mathbb{R}^m \to U^{\langle k\rangle}$ таких, что функции $f^{\langle k\rangle}(t, x) = f^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big(t, x_{(1)}\big)\big)$ и $\sigma^{\langle k\rangle}(t, x) = \sigma^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big(t, x_{(1)}\big)\big)$ удовлетворяют условиям существования и единственности решения уравнения (1).

Процесс смены структуры $K(t) : T \to \{1, 2, ..., N\}$, характеризующий правую часть (1), удовлетворяет условию $\mathsf{P}\big(K(t+\Delta t) = r \mid K(t) = k,\ X(t) = x\big) = \lambda_{kr}(t, x)\Delta t + o(\Delta t)$, $k \ne r$, где $\lambda_{kr}(t, x) : T \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ непрерывна по t, кусочно-непрерывна по x. Характер поведения траекторий случайного процесса $X(t)$ в момент смены структуры определяется заданными нормированными условными плотностями восстановления реализаций $q_{kr}(t, x \mid \tilde{x})$ [1].

Известно [1], что ненормированные плотности вероятности $\phi^{\langle k\rangle}(t, x)$ вектора состояния системы (1) удовлетворяют обобщенным уравнениям Фоккера-Планка-Колмогорова, которые для краткости будем представлять в векторно-операторной форме:

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}_u \phi(t, x), \quad \phi(t_0, x) = \phi_0(x), \quad \phi(t, x)\big|_{x=\pm\infty} = 0, \tag{2}$$

где $\phi(t, x) = \big[\phi^{\langle 1\rangle}(t, x)\ ...\ \phi^{\langle N\rangle}(t, x)\big]^{\mathrm{T}}$, $\phi_0(x) = \big[\phi_0^{\langle 1\rangle}(x)\ ...\ \phi_0^{\langle N\rangle}(x)\big]^{\mathrm{T}}$, $\mathcal{A}_u = \big[\mathcal{A}_{kr}\big]_{k,r=1}^{N}$ – матрица операторов, задаваемых выражением

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}_{kk}\phi^{\langle k\rangle}(t, x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big[f_i^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big(t, x_{(1)}\big)\big)\phi^{\langle k\rangle}(t, x)\Big] + \\
+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Big[g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t, x, u^{\langle k\rangle}\big(t, x_{(1)}\big)\big)\phi^{\langle k\rangle}(t, x)\Big] - \sum_{r=1, r\ne k}^{N} \lambda_{kr}(t, x)\phi^{\langle k\rangle}(t, x), \\
\mathcal{A}_{kr}\phi^{\langle r\rangle}(t, x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \lambda_{rk}(t, \tilde{x})\phi^{\langle r\rangle}(t, \tilde{x})q_{rk}(t, x \mid \tilde{x})d\tilde{x}, \quad k, r = 1, 2, ..., N, \quad k \ne r,
\end{gathered}$$

в котором $g_{ij}^{\langle k\rangle}(t, x, u) = \sum\limits_{r=1}^{s} \sigma_{ir}^{\langle k\rangle}(t, x, u)\sigma_{jr}^{\langle k\rangle}(t, x, u)$.

Решение уравнения (2) будем понимать в обобщенном смысле. Таким образом, $\phi^{\langle k\rangle}(t, x) \in W_2^{1,1}(T \times \mathbb{R}^n)$, а $\phi_0^{\langle k\rangle}(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^n)$.

Обозначим через $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{U}_m$ множество допустимых плотностей вероятности вектора состояния и множество допустимых управлений соответственно:

$$\begin{gathered}
\mathfrak{F} = \left\{\phi(x) = \big[\phi^{\langle 1\rangle}(x)\ ...\ \phi^{\langle N\rangle}(x)\big]^{\mathrm{T}} :\ 0 \le \phi^{\langle k\rangle}(x) \in W_2^1(\mathbb{R}^n), \quad \sum_{k=1}^{N} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \phi^{\langle k\rangle}(x)dx = 1\right\}, \\
\mathfrak{U}_m = \left\{u\left(t, x_{(1)}\right) = \big[u^{\langle 1\rangle}\big(t, x_{(1)}\big)\ ...\ u^{\langle N\rangle}\big(t, x_{(1)}\big)\big]^{\mathrm{T}} :\ u^{\langle k\rangle}\big(t, x_{(1)}\big) \in \mathfrak{U}_m^{\langle k\rangle}\right\}.
\end{gathered}$$

Кроме того, пусть $\mathfrak{D}_m$ – множество пар $d_m = \big(\phi(t,x), u\big(t,x_{(1)}\big)\big)$ таких, что $\phi(t,x)$ и $u\big(t,x_{(1)}\big) \in \mathfrak{U}_m$ удовлетворяют уравнению (2), $\phi(t,x) \in \mathfrak{F}$ для любого $t \in T$.

Определим на $\mathfrak{D}_m$ функционал качества

$$J(\phi_0(x), d_m) = \int\limits_{t_0}^{t_1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \omega\left(t, \phi(t,x), u\big(t,x_{(1)}\big)\right) dxdt + \theta(\phi(t_1,x)), \tag{3}$$

где $\omega(t,\phi(t,x),u): T \times \mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}$ – ограниченная функция, $U = U^{\langle 1 \rangle} \times ... \times U^{\langle N \rangle}$, а $\theta(\phi): \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$ – ограниченный функционал. Функция $\omega(t,\phi(t,x),u)$ и функционал $\theta(\phi)$ заданы.

Задача 1. *Требуется найти такой элемент* $d_m^* = \left(\phi^*(t,x), u^*\left(t,x_{(1)}\right)\right) \in \mathfrak{D}_m$, *что*

$$J(\phi_0(x), d_m^*) = \min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J(\phi_0(x), d_m). \tag{4}$$

Задача 2. *Требуется найти такую синтезирующую функцию* $u^*\left(t, x_{(1)}, \phi(x)\right): T \times \mathbb{R}^m \times \mathfrak{F} \to U$, *что*

$$J(\phi_0(x), d_m^*) = \min_{d_m \in \mathfrak{D}_m} J(\phi_0(x), d_m) \quad \textit{для любых} \quad \phi_0(x) \in \mathfrak{F}. \tag{5}$$

Будем предполагать, что минимум в (4) и (5) существует, иначе задачу 1 и 2 можно сформулировать в терминах минимизирующих последовательностей [3, 5].

В выражении (5) предполагается, что $d_m = \left(\phi(t,x), u\left(t, x_{(1)}, \phi(t,x)\right)\right)$, где $\phi(t,x)$ удовлетворяет уравнению (2) с начальным условием $\phi(t_0,x) = \phi_0(x)$. Таким образом, минимум ищется для всех допустимых функций $\phi_0(x)$. Множество $\mathfrak{D}_m$ зависит от $\phi_0(x)$, однако эта зависимость здесь и далее явно не указана.

2. Достаточные условия оптимальности

Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество функций $S(t,\phi(x)): T \times \mathfrak{F} \to \mathbb{R}$, непрерывно дифференцируемых по t на множестве T и имеющих для всех $k = 1,2,...,N$ непрерывные вариационные производные $\frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta \phi^{\langle k \rangle}(x)}$ [6], и определим следующие конструкции:

$$\begin{gathered} R(t,\phi(x),u) = \frac{\partial S(t,\phi(x))}{\partial t} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\left[\frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta \phi(x)} \right]^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_u \phi(x) - \omega(t,\phi(x),u) \right] dx, \\ G(t_1,\phi(x)) = S(t_1,\phi(x)) + \theta(\phi(x)), \end{gathered} \tag{6}$$

где $\frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta \phi(x)} = \left[\frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta \phi^{\langle 1 \rangle}(x)} \; ... \; \frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta \phi^{\langle N \rangle}(x)} \right]^{\mathrm{T}}$.

Предположим, что при некотором заданном m функции $R(t,\phi(x),u)$ и $G(t_1,\phi(x))$ достигают экстремальных значений:

$$\begin{gathered} r_m(t) = \max_{\phi(x) \in \mathfrak{F}} \Big\{ \frac{\partial S(t,\phi(x))}{\partial t} + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \max_{u \in U} \Big\{ \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \Big[\phi^{\mathrm{T}}(x) \mathcal{A}_u^* \left[\frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta \phi(x)} \right] - \\ -\omega\left(t,\phi(x),u\right) \Big] dx_{(2)} \Big\} dx_{(1)} \Big\}, \quad g = \min_{\phi(x) \in \mathfrak{F}} \Big\{ S(t_1,\phi(x)) + \theta(\phi(x)) \Big\}, \end{gathered} \tag{7}$$

где $\mathcal{A}_u^* = [\mathcal{A}_{rk}^*]_{k,r=1}^N$ – матрица операторов, сопряженных по отношению к операторам $\mathcal{A}_{kr}$:

$$\begin{gathered} \mathcal{A}_{kk}^* \psi^{\langle k \rangle}(t,x) = \sum_{i=1}^n f_i^{\langle k \rangle}\big(t,x,u^{\langle k \rangle}\big(t,x_{(1)}\big)\big) \frac{\partial \psi^{\langle k \rangle}(t,x)}{\partial x_i} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij}^{\langle k \rangle}\big(t,x,u^{\langle k \rangle}\big(t,x_{(1)}\big)\big) \frac{\partial^2 \psi^{\langle k \rangle}(t,x)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{r=1, r \neq k}^N \lambda_{kr}(t,x) \psi^{\langle k \rangle}(t,x), \\ \mathcal{A}_{rk}^* \psi^{\langle r \rangle}(t,x) = \lambda_{kr}(t,x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi^{\langle r \rangle}(t,\tilde{x}) q_{kr}(t,\tilde{x} \mid x) d\tilde{x}, \quad k,r = 1,2,...,N, \quad k \neq r. \end{gathered}$$

Теорема 1. *Если существует такая функция* $S(t,\phi(x))\in\mathfrak{S}$, *что элемент* $d_m^*=\big(\phi^*(t,x),u^*\big(t,x_{(1)}\big)\big)\in\mathfrak{D}_m$ *удовлетворяет следующим условиям:*

1) $R\left(t,\phi^*(t,x),u^*\big(t,x_{(1)}\big)\right)=r_m(t)$ *почти всюду на* T,

2) $G(t_1,\phi^*(t_1,x))=g$,

то справедливо условие (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим принцип расширения В.Ф. Кротова [3]. Пусть $\mathfrak{V}$ – множество пар $v=\big(\phi(t,x),u\big(t,x_{(1)}\big)\big)$, которые необязательно удовлетворяют уравнению (2), и таких, что функции $\phi(t,x)$ и $u\big(t,x_{(1)}\big)$ могут иметь разрывы первого рода, при этом определен функционал

$$L(\phi_0(x),d_m)=G(t_1,\phi(t_1,x))-\int\limits_{t_0}^{t_1}R\left(t,\phi(t,x),u\big(t,x_{(1)}\big)\right)dt-S(t_0,\phi_0(x)). \qquad (8)$$

Тогда с учетом (6) получаем, что $L(\phi_0(x),v)=S(t_1,\phi(t_1,x))+\theta(\phi(t_1,x))-S(t_0,\phi_0(x))-$ $-\int_{t_0}^{t_1}\left[\frac{\partial S(t,\phi(t,x))}{\partial t}+\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left[\frac{\delta S(t,\phi(t,x))}{\delta\phi(x)}\right]^{\mathrm{T}}\mathcal{A}_u\phi(t,x)-\omega\left(t,\phi(t,x),u\big(t,x_{(1)}\big)\right)\right]dx\right]dt.$

Рассмотрим значения этого функционала на множестве $\mathfrak{D}_m$. Элементы $d_m\in\mathfrak{D}_m$ удовлетворяют уравнению (2), кроме того, полная производная по времени функции $S(t,\phi(t,x))$ определяется выражением $\frac{dS(t,\phi(t,x))}{dt}=\frac{\partial S(t,\phi(t,x))}{\partial t}+\int_{\mathbb{R}^n}\left[\frac{\delta S(t,\phi(t,x))}{\delta\phi(x)}\right]^{\mathrm{T}}\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}dx$ (см. [6]), следовательно, $L(\phi_0(x),d_m)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{\mathbb{R}^n}\omega\left(t,\phi(t,x),u\big(t,x_{(1)}\big)\right)dxdt+\theta(\phi(t_1,x))-S(t_0,\phi_0(x))+$ $+S(t_1,\phi(t_1,x))-\int_{t_0}^{t_1}\frac{dS(t,\phi(t,x))}{dt}dt=J(\phi_0(x),d_m)$, т.е. значения функционалов $J(\phi_0(x),d_m)$ и $L(\phi_0(x),v)$ совпадают на множестве $\mathfrak{D}_m$.

Для вычисления минимума функционала $L(\phi_0(x),v)$ достаточно вычислить минимумы его слагаемых, что следует из свойств множества $\mathfrak{V}$, тогда $\min\limits_{v\in\mathfrak{V}}L(\phi_0(x),v)=$ $=\min\limits_{v\in\mathfrak{V}}G(t_1,\phi(t_1,x))-\max\limits_{v\in\mathfrak{V}}\int_{t_0}^{t_1}R\left(t,\phi(t,x),u\big(t,x_{(1)}\big)\right)dt-S(t_0,\phi_0(x))\ \geq\ g-\int_{t_0}^{t_1}r_m(t)dt-$ $-S(t_0,\phi_0(x))$, так как $\max\limits_{v\in\mathfrak{V}}\int_{t_0}^{t_1}R\left(t,\phi(t,x),u\big(t,x_{(1)}\big)\right)dt\leq\int_{t_0}^{t_1}r_m(t)dt$.

Таким образом, если элемент $d_m^*\in\mathfrak{D}_m$ удовлетворяет условиям теоремы, то $L(\phi_0(x),d_m^*)=\min\limits_{d_m\in\mathfrak{V}}L(\phi_0(x),d_m)$. Следовательно, $J(\phi_0(x),d_m^*)=\min\limits_{d_m\in\mathfrak{D}_m}J(\phi_0(x),d_m)$, так как $\mathfrak{D}_m\subset\mathfrak{V}$ и для любого элемента $d_m\in\mathfrak{D}_m$ справедливо равенство $J(\phi_0(x),d_m)=$ $=L(\phi_0(x),d_m)$. ◀

Заметим, что если $S(t,\phi(x))$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то нетрудно показать, что с помощью замены $\tilde{S}\left(t,\phi(x)\right)=S\left(t,\phi(x)\right)+\int_t^{t_1}r_m\left(\tau\right)d\tau-g$, $r_m(t)$ и g, соответствующие $\tilde{S}\left(t,\phi(x)\right)$, можно положить равными нулю, причем $\tilde{S}(t,\phi(x))$ будет также удовлетворять условиям теоремы 1. Тогда минимальное значение функционала (3) определяется соотношением $J(\phi_0(x),d_m^*)=-\tilde{S}(t_0,\phi_0(x))$ (см. [4]).

Теорема 2. *Если существуют* $S(t,\phi(x))\in\mathfrak{S}$ *и* $u^*\left(t,x_{(1)},\phi(x)\right)$ *такие, что при почти всех* $t\in T$ *и для произвольной функции* $\phi(x)\in\mathfrak{F}$ *выполняются следующие условия:*

1) $\frac{\partial S(t,\phi(x))}{\partial t}+\int_{\mathbb{R}^m}\max\limits_{u\in U}\left\{\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\left[\phi^{\mathrm{T}}(x)\mathcal{A}_u^*\left[\frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta\phi(x)}\right]-\omega(t,\phi(x),u)\right]dx_{(2)}\right\}dx_{(1)}=0$,

2) $S(t_1,\phi(x))+\theta(\phi(x))=0$,

то справедливо условие (5).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u^*\left(t,x_{(1)},\phi(x)\right)$ – оптимальная синтезирующая функция, а $\phi_0(x)$ – произвольная функция из множества $\mathfrak{F}$. Тогда, интегрируя (2) с учетом оптимальной синтезирующей функции, получаем функцию $\phi^*(t,x)$.

Рассмотрим значение функционала $J(\phi_0(x),d_m)$, используя определение (8). Тогда $J(\phi_0(x),d_m)=G(t_1,\phi(t_1,x))-\int_{t_0}^{t_1}R\left(t,\phi(t,x),u\big(t,x_{(1)}\big)\right)dt-S(t_0,\phi_0(x))$, так как значения функционалов $J(\phi_0(x), d_m)$ и $L(\phi_0(x), v)$ на множестве $\mathfrak{D}_m$ совпадают. Из условия 2 следует, что $G(t_1, \phi^*(t_1, x)) = 0$, кроме того, $R\left(t, \phi^*(t,x), u^*\left(t, x_{(1)}, \phi^*(t,x)\right)\right) = 0$ вследствие условия 1, т.е. $J(\phi_0(x), d_m^*) = -S(t_0, \phi_0(x))$, где $d_m^* = \left(\phi^*(t,x), u^*\left(t, x_{(1)}, \phi^*(t,x)\right)\right)$. Пусть элемент $d'_m = \left(\phi'(t,x), u'\left(t, x_{(1)}\right)\right) \in \mathfrak{D}_m$ такой, что функция $\phi'(t,x)$ удовлетворяет уравнению (2) с тем же начальным условием, тогда $G(t_1, \phi'(t_1, x)) = 0$, $R\left(t, \phi'(t,x), u'\left(t, x_{(1)}\right)\right) \le 0$. Следовательно, $J(\phi_0(x), d_m^*) \le J(\phi_0(x), d'_m)$. ◄

Пусть $\Psi(t,x,u) = [\phi^*(t,x)]^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_u^* \left[\frac{\delta S(t,\phi^*(t,x))}{\delta\phi(x)}\right] - \omega\left(t, \phi^*(t,x), u\right)$. Тогда, используя (7) и первое условие теоремы 1, можно записать структуру оптимального управления:

$$u^*\big(t, x_{(1)}\big) = \arg\max_{u\in U}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}} \Psi(t,x,u)dx_{(2)}\right\}. \tag{9}$$

В частном случае оптимальное программное управление $(m=0)$ и оптимальное управление с полной обратной связью $(m=n)$ определяются выражениями $u^*(t) = \arg\max\limits_{u\in U}\left\{\int_{\mathbb{R}^n} \Psi\left(t,x,u\right)dx\right\}$ и $u^*(t,x) = \arg\max\limits_{u\in U}\big\{\Psi(t,x,u)\big\}$ соответственно.

Применяя необходимые условия экстремума в (6), получаем

$$\frac{\delta S_t(t, \phi^*(t,x))}{\delta\phi(x)} = -\frac{\delta H\left(t, \phi^*(t,x), u^*\big(t, x_{(1)}\big)\right)}{\delta\phi(x)}, \quad \frac{\delta S(t_1, \phi^*(t_1,x))}{\delta\phi(x)} = -\frac{\delta\theta(\phi^*(t_1,x))}{\delta\phi(x)}, \tag{10}$$

где $S_t(t,\phi(x)) = \frac{\partial S(t,\phi(x))}{\partial t}$, $H(t,\phi(x),u) = \int_{\mathbb{R}^n}\left[\phi^{\mathrm{T}}(x)\mathcal{A}_u^*\left[\frac{\delta S(t,\phi(\varkappa))}{\delta\phi(x)}\right] - \omega(t,\phi(x),u)\right]dx$.

В соотношениях (9) и (10) функция $\phi^*(t,x)$ является решением (2), а окончательный вид уравнений (10) для нахождения оптимального управления зависит от решаемой задачи и, следовательно, от задания функции $S(t,\phi(x)) \in \mathfrak{S}$.

3. Синтез оптимального в среднем управления

Пусть заданы ограниченные функции $\omega^{\langle k\rangle}\left(t,x,u\right) : T\times\mathbb{R}^n\times U^{\langle k\rangle}\to\mathbb{R}$ и $\theta^{\langle k\rangle}(x) : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $k = 1,2,...,N$. Рассмотрим случай, когда функционал (3) является линейным по плотности вероятности:

$$J\left(\phi_0(x), d_m\right) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat\omega^{\mathrm{T}}\left(t,x,u\left(t,x_{(1)}\right)\right)\phi(t,x)dxdt + \int\limits_{\mathbb{R}^n}\hat\theta^{\mathrm{T}}(x)\phi(t_1,x)dx, \tag{11}$$

где $\hat\omega(t,x,u) = \left[\omega^{\langle 1\rangle}\left(t,x,u^{\langle 1\rangle}\right) \,...\, \omega^{\langle N\rangle}\left(t,x,u^{\langle N\rangle}\right)\right]^{\mathrm{T}}$, $\hat\theta(x) = \left[\theta^{\langle 1\rangle}(x) \,...\, \theta^{\langle N\rangle}(x)\right]^{\mathrm{T}}$, т.е. $\omega(t,\phi(t,x),u) = \hat\omega^{\mathrm{T}}(t,x,u)\phi(t,x)$, $\theta(\phi(x)) = \int_{\mathbb{R}^n}\hat\theta^{\mathrm{T}}(x)\phi(x)dx$.

Будем искать функцию $S(t,\phi(x)) \in \mathfrak{S}$ в виде $S(t,\phi(x)) = \int_{\mathbb{R}^n}\psi^{\mathrm{T}}(t,x)\phi(x)dx$, где $\psi(t,x) = \left[\psi^{\langle 1\rangle}(t,x) \,...\, \psi^{\langle N\rangle}(t,x)\right]^{\mathrm{T}}$ – неизвестная функция такая, что $\psi^{\langle k\rangle}(t,x) \in W^{1,2}_{2,\mathrm{loc}}(T\times\mathbb{R}^n)$ и непрерывно дифференцируема по t, $k = 1,2,...,N$.

Заметим, что от управления зависят только диагональные элементы матрицы $\mathcal{A}_u^*$, тогда из (9) следует, что структура оптимального управления имеет вид

$$\begin{gathered} u^{*\langle k\rangle}\left(t,x_{(1)}\right) = \arg\max_{u^{\langle k\rangle}\in U^{\langle k\rangle}}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^{n-m}}\left[\sum_{i=1}^n f_i^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i} + \right.\right. \\ \left.\left. +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial^2\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j} - \omega^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\right]\phi^{*\langle k\rangle}_{(2|1)}\left(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\right)dx_{(2)}\right\}, \end{gathered} \tag{12}$$

где $\phi^{*\langle k\rangle}_{(2|1)}\left(t,x_{(2)}\mid x_{(1)}\right) = \phi^{*\langle k\rangle}(t,x)/\int_{\mathbb{R}^{n-m}}\phi^{*\langle k\rangle}(t,x)dx_{(2)}$, $k = 1,2,...,N$.

Применяя правила вычисления вариационных производных [6], а также учитывая уравнения (2) и (10), можно записать соотношения для определения функций $\phi^*(t,x)$ и $\psi(t,x)$:

$$\frac{\partial\phi^*(t,x)}{\partial t} = \mathcal{A}_{u^*}\phi^*(t,x), \quad \phi^*(t_0,x)=\phi_0(x), \quad \phi^*(t,x)\big|_{x=\pm\infty}=0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = -\mathcal{A}^*_{u^*}\psi(t,x)+\hat\omega\big(t,x,u^*\big(t,x_{(1)}\big)\big), \quad \psi(t_1,x)=-\hat\theta(x). \tag{14}$$

Таким образом, для определения оптимального управления необходимо интегрировать систему (13), (14) с учетом (12). После определения $\psi(t,x)$ можно вычислить минимум функционала (11), а именно $J(\phi_0(x),d^*_m) = -\int_{\mathbb{R}^n}\psi^{\mathrm{T}}(t_0,x)\phi_0(x)dx$.

Рассмотрим предельные случаи информированности. Структура оптимального программного управления и оптимального управления с полной обратной связью имеет вид

$$\begin{aligned} u^{*\langle k\rangle}(t) = \arg\max_{u^{\langle k\rangle}\in U^{\langle k\rangle}} \Bigg\{ \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Bigg[\sum_{i=1}^n f_i^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i} + \\ +\frac12\sum_{i,j=1}^n g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial^2\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j} - \omega^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\Bigg]\phi^{*\langle k\rangle}(t,x)dx\Bigg\}, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} u^{*\langle k\rangle}(t,x) = \arg\max_{u^{\langle k\rangle}\in U^{\langle k\rangle}} \Bigg\{ \sum_{i=1}^n f_i^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i} + \\ +\frac12\sum_{i,j=1}^n g_{ij}^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\frac{\partial^2\psi^{\langle k\rangle}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j} - \omega^{\langle k\rangle}\big(t,x,u^{\langle k\rangle}\big)\Bigg\}, \end{aligned} \tag{16}$$

причем соотношения (13)–(15) аналогичны уравнениям стохастического принципа максимума, а система уравнений (14), (16) по структуре аналогична уравнению Беллмана для стохастических систем с фиксированной структурой [4].

Отметим, что соотношения (10) получены с использованием только необходимых условий экстремума, поэтому после решения задачи (12)–(14) нужны дополнительные исследования, однако из теоремы 2 и (11) при $m=n$ следует, что для синтеза оптимального управления с полной обратной связью достаточно интегрировать уравнение (14) с учетом (16), так как в этом случае для произвольной функции $\phi(x)\in\mathfrak{F}$ справедливы равенства $\int_{\mathbb{R}^n}\phi^{\mathrm{T}}(x)\Big[\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} + \max\limits_{u^{\langle k\rangle}\in U^{\langle k\rangle}}\big\{\,\mathcal{A}^*_u\psi(t,x)-\hat\omega(t,x,u)\big\}\Big]dx=0$, $\int_{\mathbb{R}^n}\phi^{\mathrm{T}}(x)\big[\psi(t_1,x)+\theta(x)\big]dx=0$.

Список литературы

[1] *Казаков И.Е., Артемьев В.М.* Оптимизация динамических систем случайной структуры. М.: Наука, 1980.

[2] *Ghosh M.K., Arapostathis A., Marcus S.I.* Ergodic control of switching diffusions // SIAM J. Control Optim. 1997. V. 35. No. 6. P. 1952–1988.

[3] *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. М.: Наука, 1973.

[4] *Пантелеев А.В., Семенов В.В.* Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. М.: МАИ, 1992.

[5] *Савастюк С.В., Хрусталев М.М.* Оптимизация стохастических систем диффузионного типа с ограничениями на процесс управления-наблюдения // АиТ. 1991. № 7. С. 89–96. № 8. С. 94–100.

[6] *Авербух В.И., Смолянов О.Г.* Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // УМН. 1967. т. XXII. вып. 6 (138). С. 201–260.