

УДК 62.50

# ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ФОРМЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ <sup>1</sup>

**К.А. Рыбаков**

*Московский авиационный институт*  
Россия, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, 4  
E-mail: [rkoffice@mail.ru](mailto:rkoffice@mail.ru)

**Ключевые слова:** идентификация, параметрическая оптимизация, спектральная характеристика, спектральный метод, стохастическая система.

С помощью спектральной формы математического описания решается задача идентификации непрерывных стохастических систем управления диффузионного и диффузионно-скачкообразного типов. Предлагаемая методика базируется на применении уравнений обобщенных характеристических функций (спектральных аналогов уравнений Фоккера – Планка – Колмогорова и Колмогорова – Феллера) и переходе к конечномерной задаче оптимизации. Эффективность методики демонстрируется на модельных примерах.

## IDENTIFICATION OF STOCHASTIC SYSTEMS IN THE SPECTRAL FORM OF THE MATHEMATICAL DESCRIPTION <sup>2</sup>

**K.A. Rybakov**

*Moscow Aviation Institute*  
Russia, 125993, Moscow, Volokolamskoy Highway, 4  
E-mail: [rkoffice@mail.ru](mailto:rkoffice@mail.ru)

**Ключевые слова:** identification, parametric optimization, spectral characteristics, spectral method, stochastic system.

By use of the spectral form of the mathematical description, a problem of the identification of continuous-time stochastic systems of the diffusion and diffusion-stepwise types is solved. The proposed procedure is based on applying the general characteristic functions (spectral analogs of the equations of Focker – Plank – Kolmogorov and Kolmogorov – Feller) and transfer to a finite-dimensional optimization problem. The procedure efficiency is demonstrated by simulation examples.

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-08-00892-а).

<sup>2</sup>The paper is financially supported by the Russian Foundation for Basic Researches (project 12-08-00892-а).

## 1. Введение

В работе рассматривается задача идентификации — задача нахождения параметров или структуры математической модели по известным входным и выходным данным [1, 2] — для непрерывных стохастических систем управления с применением спектральной формы математического описания (спектрального метода), т.е. с помощью описания входных и выходных функций коэффициентами их разложения в функциональные ряды по ортонормированным функциям [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10]. Спектральный метод для идентификации использовался и ранее, но для других классов систем управления [5, 11, 12]. Предлагаемая методика относится к поисковым алгоритмам идентификации систем управления [1].

Работа имеет следующую структуру. Сначала даются основные понятия и определения: спектральные характеристики функций и линейных операторов, спектральная характеристика множительного звена. Вводится новое понятие спектральной характеристики звена свертки. Приводятся основные свойства спектральных характеристик и обозначения, используемые в дальнейшем.

Далее формулируется задача идентификации в классе непрерывных стохастических систем диффузионного типа, приводятся основные соотношения: уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова и уравнение обобщенной характеристической функции, ставится задача идентификации в спектральной форме математического описания. Рассматривается модельный пример решения задачи параметрической и непараметрической идентификации одномерной стохастической системы.

Затем рассматривается задача идентификации в классе непрерывных стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа. Также даются основные соотношения. Для систем диффузионно-скачкообразного типа это уравнение Колмогорова – Феллера и уравнение обобщенной характеристической функции. Решается модельная задача параметрической и непараметрической идентификации одномерной стохастической системы в спектральной форме математического описания.

Все численные расчеты при использовании спектрального метода выполнены с помощью специализированного программного обеспечения Spectrum [13], разработанного для решения задач анализа, синтеза, фильтрации и идентификации систем управления различных классов с применением спектральной формы математического описания.

## 2. Спектральная форма математического описания

Прежде чем сформулировать постановку задачи, приведем определения спектральных характеристик и их свойства [6, 7], используемые в дальнейшем (необходимые сведения о многомерных матрицах приведены в [6]).

Пусть  $i \in \mathbb{Z}_+^m$  — мультииндекс ( $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ ),  $y \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ , т.е.  $\dim i = \dim y = m$ ;  $\{p(i, y)\}_{i \in \mathbb{Z}_+^m}$  — ортонормированный базис, или полная ортонормированная система функций [14], пространства  $L_2(\Omega)$  — пространства квадратично интегрируемых на  $\Omega$  функций с действительными значениями.

**Определение 1.** *Спектральной характеристикой функции  $h(y) \in L_2(\Omega)$  называется многомерная гиперстолбцовая матрица  $H(m, 0)$ , элементы которой — коэффициенты разложения  $h(y)$  по функциям базисной системы  $\{p(i, y)\}_{i \in \mathbb{Z}_+^m}$ :*

$$(1) \quad h_i = \int_{\Omega} p(i, y)h(y)dy, \quad i \in \mathbb{Z}_+^m; \quad H(m, 0) = (h_i).$$

Это определение может применяться и для функций  $h(y) \notin L_2(\Omega)$ , в том числе и для обобщенных функций (условие применимости — конечность величин  $h_i, i \in \mathbb{Z}_+^m$ ).

**Определение 2.** *Спектральной характеристикой линейного оператора  $\mathcal{A}$ , заданного на пространстве  $L_2(\Omega)$ , называется многомерная гиперквадратная матрица  $A(m, m)$ , столбцы которой — спектральные характеристики образов базисных функций (при действии  $\mathcal{A}$ ):*

$$(2) \quad a_{ij} = \int_{\Omega} p(i, y)\mathcal{A}p(j, y)dy, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+^m; \quad A(m, m) = (a_{ij}).$$

**Теорема 1.** *Пусть  $H(m, 0)$  — спектральная характеристика функции  $h(y) \in L_2(\Omega)$ ,  $A(m, m)$  — спектральная характеристика линейного оператора  $\mathcal{A}$ ,  $G(m, 0)$  — спектральная характеристика функции  $g(y) = \mathcal{A}h(y)$ . Тогда  $G(m, 0) = A(m, m) \cdot H(m, 0)$  ( $\cdot$  — знак умножения многомерных матриц — свернутое произведение по последним  $m$  индексам первого операнда и первым  $m$  индексам второго операнда).*

*Доказательство теоремы 1.* Запишем формулу для элемента  $g_i$  спектральной характеристики  $G(m, 0)$  согласно определению 1:

$$g_i \stackrel{(1)}{=} \int_{\Omega} p(i, y)g(y)dy, \quad i \in \mathbb{Z}_+^m,$$

и воспользуемся равенством  $g(y) = \mathcal{A}h(y)$ , представляя функцию  $h(y)$  в виде ряда по функциям базисной системы  $\{p(i, y)\}_{i \in \mathbb{Z}_+^m}$ :

$$h(y) = \sum_j h_j p(j, y),$$

где

$$h_j \stackrel{(1)}{=} \int_{\Omega} p(j, y)h(y)dy, \quad j \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Тогда

$$\begin{aligned} g_i &= \int_{\Omega} p(i, y)\mathcal{A} \sum_j h_j p(j, y)dy = \int_{\Omega} \sum_j h_j p(i, y)\mathcal{A}p(j, y)dy = \\ &= \sum_j h_j \int_{\Omega} p(i, y)\mathcal{A}p(j, y)dy \stackrel{(2)}{=} \sum_j a_{ij}h_j, \end{aligned}$$

или в матричной форме  $G(m, 0) = A(m, m) \cdot H(m, 0)$ . ■

**Определение 3.** Спектральной характеристикой множительного звена называется многомерная матрица  $V(m, 2m)$ , элементы которой вычисляются по формуле

$$(3) \quad v_{ijk} = \int_{\Omega} p(i, y)p(j, y)p(k, y)dy, \quad i, j, k \in \mathbb{Z}_+^m; \quad V(m, 2m) = (v_{ijk}).$$

Спектральная характеристика множительного звена  $V(m, 2m)$  позволяет установить связь между спектральной характеристикой некоторой функции  $h(y) \in L_2(\Omega)$  и спектральной характеристикой оператора умножения  $\mathcal{H}$  на эту функцию:

$$(4) \quad \mathcal{H}f(y) = h(y)f(y).$$

**Теорема 2.** Пусть  $H(m, 0)$  — спектральная характеристика функции  $h(y) \in L_2(\Omega)$ ,  $V(m, 2m)$  — спектральная характеристика множительного звена,  $H(m, m)$  — спектральная характеристика оператора умножения (4). Тогда  $H(m, m) = V(m, 2m) \odot H(m, 0)$  ( $\odot$  — знак умножения  $3m$ -мерной матрицы на  $m$ -мерную матрицу — свернутое произведение по последним  $m$  индексам первого операнда и всем индексам второго операнда).

*Доказательство теоремы 2.* Рассмотрим элемент  $h_{ij}$  спектральной характеристики  $H(m, m)$ . По определению 2

$$h_{ij} \stackrel{(2)}{=} \int_{\Omega} p(i, y)\mathcal{H}p(j, y)dy \stackrel{(4)}{=} \int_{\Omega} h(y)p(i, y)p(j, y)dy, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Далее представим функцию  $h(y)$  в виде ряда по функциям базисной системы  $\{p(i, y)\}_{i \in \mathbb{Z}_+^m}$ :

$$h(y) = \sum_k h_k p(k, y),$$

где

$$h_k \stackrel{(1)}{=} \int_{\Omega} p(k, y)h(y)dy, \quad k \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \int_{\Omega} \sum_k h_k p(k, y)p(i, y)p(j, y)dy = \\ &= \sum_k h_k \int_{\Omega} p(i, y)p(j, y)p(k, y)dy \stackrel{(3)}{=} \sum_k v_{ijk} h_k, \end{aligned}$$

или в матричной форме  $H(m, m) = V(m, 2m) \odot H(m, 0)$ . ■

**Определение 4.** Спектральной характеристикой звена свертки называется многомерная матрица  $W(m, 2m)$ , элементы которой вычисляются по формуле

$$(5) \quad w_{ijk} = \int_{\Omega} p(i, y) \int_{\Omega} \chi_{\Omega}(y - z)p(j, z)p(k, y - z)dzdy, \quad i, j, k \in \mathbb{Z}_+^m;$$

$$W(m, 2m) = (w_{ijk}),$$

где  $\chi_{\Omega}(y)$  — индикатор множества  $\Omega$ .

Спектральная характеристика звена свертки дает возможность связать спектральную характеристику некоторой функции  $h(y) \in L_2(\Omega)$  и спектральную характеристику оператора Фредгольма  $\mathcal{H}$  с ядром, которое задает эта функция:

$$(6) \quad \mathcal{H}f(y) = \int_{\Omega} \chi_{\Omega}(y-z)h(y-z)f(z)dz,$$

что позволяет формировать спектральные характеристики операторов Фредгольма, заранее вычислив элементы многомерной матрицы  $W(m, 2m)$  для различных базисных систем, как это сделано для матриц  $V(m, 2m)$  [3, 15, 16], используя только спектральные характеристики функций. Формулировка этого утверждения аналогична формулировке теоремы 2.

**Теорема 3.** Пусть  $H(m, 0)$  — спектральная характеристика функции  $h(y) \in L_2(\Omega)$ ,  $W(m, 2m)$  — спектральная характеристика звена свертки,  $H(m, m)$  — спектральная характеристика оператора Фредгольма (6). Тогда  $H(m, m) = W(m, 2m) \odot H(m, 0)$ .

*Доказательство теоремы 3.* Рассмотрим элемент  $h_{ij}$  спектральной характеристики  $H(m, m)$ . По определению 2

$$\begin{aligned} h_{ij} &\stackrel{(2)}{=} \int_{\Omega} p(i, y)\mathcal{H}p(j, y)dy \stackrel{(6)}{=} \\ &= \int_{\Omega} p(i, y) \int_{\Omega} \chi_{\Omega}(y-z)h(y-z)p(j, z)dzdy, \quad i, j \in \mathbb{Z}_+^m. \end{aligned}$$

Как и при доказательстве теоремы 2, представим функцию  $h(y)$  в виде ряда по функциям базисной системы  $\{p(i, y)\}_{i \in \mathbb{Z}_+^m}$ :

$$h(y) = \sum_k h_k p(k, y); \quad h(y-z) = \sum_k h_k p(k, y-z), \quad y-z \in \Omega,$$

где

$$h_k \stackrel{(1)}{=} \int_{\Omega} p(k, y)h(y)dy, \quad k \in \mathbb{Z}_+^m.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} h_{ij} &= \int_{\Omega} p(i, y) \int_{\Omega} \chi_{\Omega}(y-z) \sum_k h_k p(k, y-z)p(j, z)dzdy = \\ &= \sum_k h_k \int_{\Omega} p(i, y) \int_{\Omega} \chi_{\Omega}(y-z)p(j, z)p(k, y-z)dzdy \stackrel{(5)}{=} \sum_k w_{ijk} h_k, \end{aligned}$$

или в матричной форме  $H(m, m) = W(m, 2m) \odot H(m, 0)$ . ■

При приближенном решении различных задач анализа, синтеза, фильтрации и идентификации спектральные характеристики усекаются до некоторого порядка, т.е. используется конечное число первых коэффициентов разложения функции в ряд (усеченные спектральные характеристики [3, 6]), в этом случае спектральные характеристики функций представляются конечными

матрицами-столбцами, спектральные характеристики линейных операторов — квадратными матрицами, а спектральные характеристики множительного звена и звена свертки — конечными трехмерными (кубическими) матрицами.

Если в задаче идентификации математическая модель системы управления содержит неизвестные функции-множители или функции, задающие ядро оператора Фредгольма, то при применении спектральной формы математического описания целесообразно использовать спектральные характеристики множительного звена и звена свертки. Тогда существенно сокращается число подлежащих определению чисел — элементов соответствующих спектральных характеристик (вместо элементов квадратной матрицы, соответствующей линейному оператору, достаточно определить элементы одного столбца, соответствующего функции).

Введем некоторые обозначения для последующего решения задачи идентификации динамических систем в спектральной форме математического описания.

Для представления функций времени  $t \in T = [t_0, t_1]$  будем использовать базисную систему  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  (в этом случае, очевидно,  $y = t$ ,  $i = i_0$ ,  $m = 1$ ,  $\Omega = T$ ), а для представления функций вектора состояния  $x \in \mathbb{R}^n$  будем использовать базисную систему  $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$  (здесь  $y = x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = (i_1, \dots, i_n)$ ,  $m = n$ ,  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ). И, наконец, для представления функций времени и вектора состояния будем использовать базисную систему  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ , порожденную всевозможными произведениями функций базисных систем  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  и  $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$  [6, 14]:

$$(7) \quad e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) = q(i_0, t) \cdot p(i_1, \dots, i_n, x),$$

тогда  $y = (t, x) = (t, x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = (i_0, i_1, \dots, i_n)$ ,  $m = n + 1$ ,  $\Omega = T \times \mathbb{R}^n$ .

### 3. Стохастические системы диффузионного типа

#### 3.1. Постановка задачи идентификации

Предполагается, что поведение модели системы управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито [17, 18]

$$(8) \quad dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

где  $X$  — вектор состояния,  $X \in \mathbb{R}^n$ ;  $t \in T$ ,  $T = [t_0, t_1]$  — заданный отрезок времени функционирования системы;  $f(t, x): T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  — вектор-функция  $n \times 1$ ,  $\sigma(t, x): T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times s}$  — матричная функция  $n \times s$ ;  $W(t)$  —  $s$ -мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от  $X_0$ .

Начальное состояние  $X_0$  определяется заданной плотностью вероятности  $\varphi_0(x)$ . Функции  $f(t, x)$  и  $\sigma(t, x)$  задают структуру системы управления. Предполагается, что эти функции удовлетворяют условиям существования и единственности [19] решения задачи (8), а плотность вероятности  $\varphi(t, x)$  вектора состояния удовлетворяет уравнению Фоккера – Планка – Колмогорова

[17, 18, 20]:

$$(9) \quad \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x), \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x),$$

где  $\mathcal{A}$  — линейный оператор (прямой производящий оператор диффузионного процесса), задаваемый выражением

$$(10) \quad \mathcal{A}\varphi(t, x) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x)\varphi(t, x)] + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [g_{ij}(t, x)\varphi(t, x)], \quad g_{ij}(t, x) = \sum_{r=1}^s \sigma_{ir}(t, x)\sigma_{jr}(t, x).$$

Решение уравнения (9) удовлетворяет естественному условию:

$$(11) \quad \varphi(t, x) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(t, x) dx = 1.$$

Это решение в дальнейшем понимается в обобщенном смысле, а именно предполагается, что  $\varphi(t, x) \in L_2(T \times \mathbb{R}^n)$ .

Функции  $f(t, x)$  и  $\sigma(t, x)$ , а значит и  $g(t, x)$ , задающие структуру системы управления, могут содержать неизвестные числовые параметры:

$$f(t, x) = f(t, x; v), \quad \sigma(t, x) = \sigma(t, x; v), \quad g(t, x) = g(t, x; v),$$

где  $v \in \Theta = \mathbb{R}^q$ . Ограничения на координаты вектора  $v$  можно учесть с помощью дополнительных преобразований, например, если координата  $v_k \in \mathbb{R}$ , то  $v_k^2 + a \in [a, +\infty)$ ,  $b - |v_k| \in (-\infty, b]$ ,  $a + (b - a)\left(\frac{\arctg v_k}{\pi} + \frac{1}{2}\right) \in [a, b]$  и т.п., или задать множество допустимых векторов параметров  $\Theta \subset \mathbb{R}^q$ .

Кроме того, некоторые функции, задающие структуру системы управления, могут быть неизвестны. В этом случае будем задавать эти функции приближенно частичными суммами функциональных рядов — разложений этих функций по некоторому подходящему базису. Конечное число коэффициентов разложения также можно представить вектором  $v$ . В общем случае  $v$  может содержать как числовые параметры функций, так и коэффициенты разложения неизвестных функций по некоторому базису.

Аналогичным образом можно параметризовать распределение  $\varphi_0(x)$  начального состояния  $X_0$ :

$$\varphi_0(x) = \varphi_0(x; v).$$

Задача идентификации заключается в нахождении вектора параметров  $v^*$ , при котором достигается минимальное значение функционала качества, определенного на множестве решений уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (9) и множестве допустимых значений вектора параметров:

$$(12) \quad J(\varphi(t, x; v^*), v^*) = \min_{v \in \Theta} J(\varphi(t, x; v), v),$$

где  $\varphi(t, x; v)$  — решение уравнения (9) при векторе параметров  $v$ .

Явная зависимость функционала  $J(\cdot)$  от вектора  $v$  может быть необходимой при учете различных дополнительных ограничений на значения его координат (для введения штрафных или барьерных функций [21]).

Примеры функционалов качества.

1. Функционал, учитывающий отклонение математического ожидания вектора состояния системы (8) от опорного  $m_{\text{оп}}(t)$  в норме пространства  $L_1(T)$ :

$$(13) \quad J(\varphi(t, x; v), v) = \int_T \left| \int_{\mathbb{R}^n} x \varphi(t, x; v) dx - m_{\text{оп}}(t) \right| dt.$$

2. Функционал, учитывающий отклонение плотности вероятности  $\varphi(t, x; v)$  вектора состояния системы (8) от опорной  $\varphi_{\text{оп}}(x)$  для конечного момента времени  $t_1$  в норме пространства  $L_2(\mathbb{R}^n)$ :

$$(14) \quad J(\varphi(t, x; v), v) = \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(t_1, x; v) - \varphi_{\text{оп}}(x))^2 dx.$$

3. Функционал, учитывающий отклонение плотности вероятности  $\varphi(t, x; v)$  вектора состояния системы (8) от опорной  $\varphi_{\text{оп}}(t, x)$  на всем отрезке времени функционирования системы в норме пространства  $L_2(T \times \mathbb{R}^n)$ :

$$(15) \quad J(\varphi(t, x; v), v) = \int_{T \times \mathbb{R}^n} (\varphi(t, x; v) - \varphi_{\text{оп}}(t, x))^2 dt dx.$$

Функции  $m_{\text{оп}}(t)$ ,  $\varphi_{\text{оп}}(x)$  и  $\varphi_{\text{оп}}(t, x)$ , в частности, могут быть получены по результатам измерений выходного процесса для рассматриваемой системы управления. Другие типы функционалов, определенных на решении уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (9), приведены, например, в [22].

### 3.2. Уравнение обобщенной характеристической функции

Будем искать решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (9) в виде ряда по функциям базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$  пространства  $L_2(T \times \mathbb{R}^n)$ , т.е.

$$(16) \quad \varphi(t, x) = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x),$$

где

$$\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \stackrel{(1)}{=} \int_{T \times \mathbb{R}^n} e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x) \varphi(t, x) dt dx, \quad i_0, i_1, \dots, i_n = 0, 1, 2, \dots,$$

или при приближенном решении

$$(17) \quad \varphi(t, x) = \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \cdots \sum_{i_n=0}^{L_n-1} \varphi_{i_0 i_1 \dots i_n} \cdot e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x),$$



где  $L_0, L_1, \dots, L_n$  — выбранные порядки усечения спектральных характеристик [3, 6].

Пусть  $\Phi(n+1, 0)$  — спектральная характеристика плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  (гиперстолбцовая матрица с элементами  $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$  согласно определению 1);  $P(n+1, n+1)$  — спектральная характеристика оператора дифференцирования по времени с учетом значения функции в начальный момент [6];  $A(n+1, n+1)$  — спектральная характеристика оператора  $\mathcal{A}$ , задаваемого формулой (10). Перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ . Кроме того,  $q(1, 0; t_0)$  — матрица-столбец значений функций базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^\infty$  в начальный момент времени  $t_0$ ;  $\Phi_0(n, 0)$  — спектральная характеристика плотности вероятности  $\varphi_0(x)$  начального состояния  $X_0$ , определенная относительно базисной системы  $\{p(i_1, \dots, i_n, x)\}_{i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ . Тогда

$$(18) \quad P(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0) = \\ = A(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0),$$

где  $\otimes$  — знак тензорного умножения многомерных матриц.

Уравнение (18) является спектральным аналогом уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (9) и называется *уравнением обобщенной характеристической функции* (обобщенная характеристическая функция — это спектральная характеристика  $\Phi(n+1, 0)$ ) [23, 24]. Фактически, это система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения  $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$  плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  относительно базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ , записанная в матричной форме. Подробный вывод уравнения (18) приведен в [6].

Спектральную характеристику  $A(n+1, n+1)$  оператора  $\mathcal{A}$  не обязательно непосредственно находить по определению 2. Для этого можно использовать свойство линейности спектральных характеристик функций и свойство спектральных характеристик композиции линейных операторов [6]. Введем новые обозначения:  $\mathcal{P}_i(n+1, n+1)$  и  $\mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1)$  — спектральные характеристики операторов дифференцирования первого порядка по координатам  $x_i$  и спектральные характеристики операторов дифференцирования второго порядка по координатам  $x_i, x_j$  соответственно;  $F_i(n+1, n+1)$  и  $G_{ij}(n+1, n+1)$  — спектральные характеристики операторов умножения на функции  $f_i(t, x)$  и  $g_{ij}(t, x)$  соответственно;  $i, j = 1, 2, \dots, n$ . Все перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^\infty$ . Тогда

$$(19) \quad A(n+1, n+1) = - \sum_{i=1}^n \mathcal{P}_i(n+1, n+1) \cdot F_i(n+1, n+1) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \mathcal{P}_{ij}(n+1, n+1) \cdot G_{ij}(n+1, n+1).$$

Найденная из уравнения (18) спектральная характеристика

$$(20) \quad \Phi(n+1, 0) = \\ = (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1))^{-1} \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0))$$

определяет решение уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова (9) в спектральной форме математического описания. Это решение выражается формулой (16), приближенное решение — формулой (17), оно же позволяет найти значение функционала (12) точно или приближенно соответственно.

Если функции  $f(t, x)$  и  $\sigma(t, x)$ , задающие структуру системы управления, содержат неизвестные числовые параметры, то эта зависимость естественным образом должна учитываться и для соответствующих спектральных характеристик операторов умножения на эти функции, а именно

$$\begin{aligned} F_i(n+1, n+1) &= F_i(n+1, n+1; v), \\ G_{ij}(n+1, n+1) &= G_{ij}(n+1, n+1; v), \end{aligned}$$

т.е.  $A(n+1, n+1) = A(n+1, n+1; v)$ .

Здесь важно напомнить (см. определение 3) об использовании спектральной характеристики множительного звена  $V(n+1, 2n+2)$ , определенной относительно той же базисной системы, что и спектральные характеристики  $F_i(n+1, n+1)$  и  $G_{ij}(n+1, n+1)$ , которая позволяет сократить трудоемкость пересчета  $F_i(n+1, n+1)$  и  $G_{ij}(n+1, n+1)$  для различных  $v$  (если необходимость такого пересчета имеется):

$$\begin{aligned} F_i(n+1, n+1) &= V(n+1, 2n+2) \odot F_i(n+1, 0), \\ G_{ij}(n+1, n+1) &= V(n+1, 2n+2) \odot G_{ij}(n+1, 0), \end{aligned}$$

где  $F_i(n+1, 0)$  и  $G_{ij}(n+1, 0)$  — спектральные характеристики функций  $f_i(t, x)$  и  $g_{ij}(t, x)$  соответственно, причем

$$F_i(n+1, 0) = F_i(n+1, 0; v), \quad G_{ij}(n+1, 0) = G_{ij}(n+1, 0; v)$$

для тех номеров  $i, j$ , для которых элементы функций  $f(t, x)$  и  $g(t, x)$  зависят от вектора параметров  $v$ . Если же некоторые из функций  $f_i(t, x)$  и  $g_{ij}(t, x)$  неизвестны, то коэффициенты их разложения, т.е. усеченные спектральные характеристики  $F_i(n+1, 0)$  и  $G_{ij}(n+1, 0)$  должны быть составной частью  $v$ . В последнем случае размерность вектора  $v$  можно сокращать, учитывая какую-либо априорную информацию о системе управления, например, независимость функций от части переменных (времени или координат вектора состояния), четность функций и т.п.

Те же рассуждения справедливы и для задания начального распределения — спектральной характеристики  $\Phi_0(n, 0)$  плотности вероятности  $\varphi_0(x)$  начального состояния  $X_0$ :

$$\Phi_0(n, 0) = \Phi_0(n, 0; v).$$

Таким образом, задачу идентификации можно переформулировать как нахождение вектора параметров  $v^*$ , при котором достигается минимальное значение функционала качества, определенного на множестве решений уравнения обобщенной характеристической функции (18) и множестве допустимых значений вектора параметров:

$$(21) \quad \tilde{J}(\Phi(n+1, 0; v^*), v^*) = \min_{v \in \Theta} \tilde{J}(\Phi(n+1, 0; v), v),$$

где  $\Phi(n+1, 0; v)$  — решение уравнения (18) при векторе параметров  $v$ , задаваемое выражением (20). Эту задачу можно решать с помощью методов условной или безусловной конечномерной оптимизации [21, 25, 26].

### 3.3. Пример решения задачи идентификации

Возьмем за основу пример, аналогичный рассмотренному в [27], — решение задачи анализа выходных процессов одномерной ( $n = 1$ ) стохастической релейной системы управления, заданной уравнением Ито

$$(22) \quad dX(t) = F(X(t))dt + \sigma dW(t),$$

где  $X \in \mathbb{R}$ ,  $t \in T = [0, 1]$ ;  $F(x)$  — характеристика релейного элемента:

$$(23) \quad F(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0; \end{cases}$$

$\sigma = 1$ ;  $W(t)$  — одномерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния  $X_0$ , имеющего нормальное распределение с математическим ожиданием  $m_0 = 0.5$  и дисперсией  $D_0 = 0.5$ , т.е.

$$(24) \quad \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-0.5)^2}.$$

Воспользуемся приведенной в [6, 7, 27] методикой приближенного решения задачи анализа выходных процессов стохастических систем диффузионного типа.

1. Выберем в качестве базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  полиномы Лежандра  $\hat{P}(i_0, t)$ , ортонормированные на отрезке  $[0, 1]$ , а в качестве базисной системы  $\{p(i_1, x)\}_{i_1=0}^{\infty}$  — функции Эрмита  $\hat{\Phi}(i_1, x)$  с параметрами  $m = 0$  и  $D = 1$ , ортонормированные на множестве действительных чисел [3, 6, 9, 15].

Сформируем базисную систему  $\{e(i_0, i_1, t, x)\}_{i_0, i_1=0}^{\infty}$  пространства  $L_2([0, 1] \times \mathbb{R})$ :

$$e(i_0, i_1, t, x) \stackrel{(7)}{=} \hat{P}(i_0, t) \cdot \hat{\Phi}(i_1, x), \quad i_0, i_1 = 0, 1, 2, \dots$$

Зададим порядки усечения спектральных характеристик:  $L_0 = L_1 = 16$ .

2. Матрица-столбец  $q(1, 0; 0)$  значений функций базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  в начальный момент времени  $t_0 = 0$  имеет вид

$$q(1, 0; 0) = [\hat{P}(0, 0) \ \hat{P}(1, 0) \ \dots \ \hat{P}(L_0 - 1, 0)]^T.$$

3. Спектральные характеристики  $\mathcal{P}(2, 2)$  и  $\mathcal{P}_1(2, 2)$  операторов дифференцирования первого порядка по переменным  $t$  и  $x$  соответственно, а также спектральная характеристика  $F(2, 2)$  оператора умножения на функцию  $f(t, x) = F(x)$  вычисляются по определению 2. Так, элементы  $p_{i_0 i_1 j_0 j_1}$  и  $p_{1 i_0 i_1 j_0 j_1}$  матриц  $\mathcal{P}(2, 2)$  и  $\mathcal{P}_1(2, 2)$  задаются следующим образом:

$$p_{i_0 i_1 j_0 j_1} \stackrel{(2)}{=} \int_0^1 \hat{P}(i_0, t) \hat{P}'(j_0, t) dt \cdot \delta_{i_1 j_1},$$

$$p_{1 i_0 i_1 j_0 j_1} \stackrel{(2)}{=} \delta_{i_0 j_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(i_1, x) \hat{\Phi}'(j_1, x) dx,$$

где  $\delta_{i_0 j_0}$ ,  $\delta_{i_1 j_1}$  — символы Кронекера;  $i_0, j_0 = 0, 1, \dots, L_0 - 1$ ;  $i_1, j_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1$ . Элементы  $f_{i_0 i_1 j_0 j_1}$  матрицы  $F(2, 2)$  вычисляются по формуле

$$(25) \quad \begin{aligned} f_{i_0 i_1 j_0 j_1} &\stackrel{(2)}{=} \delta_{i_0 j_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \hat{\Phi}(i_1, x) \hat{\Phi}(j_1, x) dx \stackrel{(23)}{=} \\ &= -\delta_{i_0 j_0} \cdot \int_{-\infty}^0 \hat{\Phi}(i_1, x) \hat{\Phi}(j_1, x) dx + \delta_{i_0 j_0} \cdot \int_0^{+\infty} \hat{\Phi}(i_1, x) \hat{\Phi}(j_1, x) dx. \end{aligned}$$

Спектральная характеристика  $G(2, 2)$  оператора умножения на функцию  $g(t, x) = 1$  представляет собой четырехмерную единичную матрицу  $E(2, 2)$ . В случае  $\sigma \neq 1$  будем иметь  $G(2, 2) = \sigma^2 \cdot E(2, 2)$ .

Матрица  $P(2, 2)$  задается в виде [6]

$$P(2, 2) = \mathcal{P}(2, 2) + (q(1, 0; 0) \cdot q^T(1, 0; 0)) \otimes E(1, 1),$$

где  $E(1, 1)$  — двумерная единичная матрица.

4. Спектральная характеристика  $A(2, 2)$  прямого производящего оператора диффузионного процесса с учетом равенства  $G(2, 2) = E(2, 2)$  определяется соотношением

$$A(2, 2) \stackrel{(19)}{=} -\mathcal{P}_1(2, 2) \cdot F(2, 2) + \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_1^2(2, 2).$$

5. Вычислим спектральную характеристику  $\Phi_0(1, 0)$  плотности вероятности  $\varphi_0(x)$  начального состояния  $X_0$  относительно системы функций Эрмита:

$$\Phi_0(1, 0) = (\varphi_{0 i_1}),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{0 i_1} &\stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x) \hat{\Phi}(i_1, x) dx \stackrel{(24)}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-0.5)^2} \hat{\Phi}(i_1, x) dx, \quad i_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1. \end{aligned}$$

6. Найдем решение уравнения обобщенной характеристической функции:

$$\Phi(2, 0) \stackrel{(20)}{=} (P(2, 2) - A(2, 2))^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)),$$

или

$$\begin{aligned} \Phi(2, 0) &= \left( P(2, 2) + \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot F(2, 2) - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_1^2(2, 2) \right)^{-1} \\ &\quad \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)). \end{aligned}$$

7. Определим приближенное решение задачи анализа рассматриваемой стохастической релейной системы:

$$\varphi(t, x) \stackrel{(17)}{=} \sum_{i_0=0}^{L_0-1} \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \varphi_{i_0 i_1} \cdot \hat{P}(i_0, t) \cdot \hat{\Phi}(i_1, x), \quad (t, x) \in [0, 1] \times \mathbb{R},$$

где  $\varphi_{i_0 i_1}$  — элементы матрицы  $\Phi(2, 0)$ .

Результаты расчетов (графики плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  состояния  $X$  и сечения этой плотности в конечный момент времени  $t_1 = 1$ ) приведены на рис. 1. Несмотря на небольшие порядки усечения спектральных характеристик, полученное решение можно считать довольно точным (сравнение проводилось с решением, найденным с помощью метода Монте-Карло, как и в [27]).

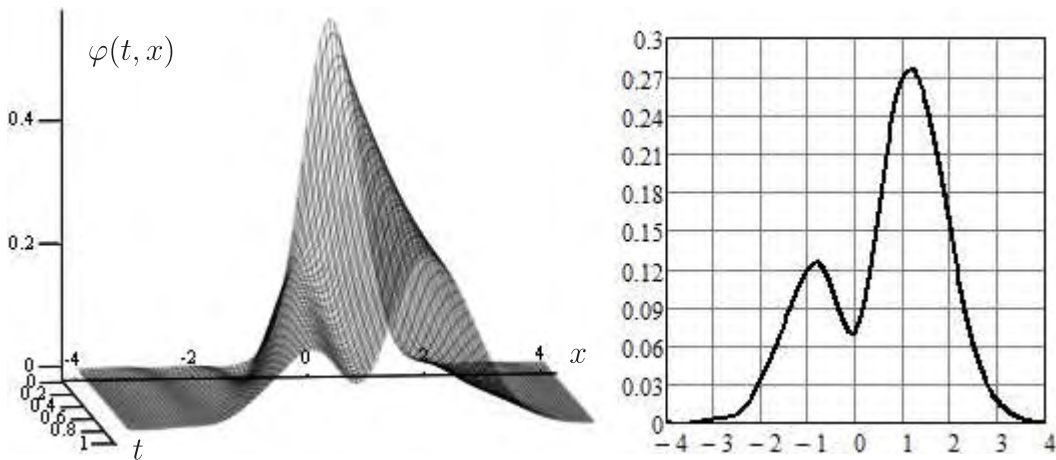


Рис. 1. Плотность вероятности состояния системы.

Далее рассмотрим задачу идентификации. Будем считать, что коэффициент сноса в уравнении (22) — функция  $F(x)$  — неизвестна и ее нужно найти, исходя из критерия минимума функционала (14), т.е. функционала, учитывающего отклонение плотности вероятности состояния системы от опорной  $\varphi_{\text{оп}}(x)$  для конечного момента времени в норме пространства  $L_2(\mathbb{R})$ . Опорная плотность  $\varphi_{\text{оп}}(x)$  — результат решения задачи анализа при  $t_1 = 1$ .

Будем искать функцию  $F(x)$  в виде конечного отрезка ряда по функциям Эрмита:

$$(26) \quad F(x) = \sum_{i_1=0}^{L_1-1} f_{i_1} \cdot \hat{\Phi}(i_1, x), \quad x \in \mathbb{R},$$

следовательно, вектор параметров  $v$  образован коэффициентами разложения функции  $F(x)$  — числами  $f_{i_1}$ ,  $i_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1$ , или  $v = F(1, 0)$ , где  $F(1, 0)$  — усеченная спектральная характеристика неизвестной функции  $F(x)$ , определенная относительно функций Эрмита. Функция  $F(x)$ , заданная формулой (23), не принадлежит  $L_2(\mathbb{R})$ , тем не менее ее спектральную характеристику можно вычислить, поскольку эта функция ограничена на  $\mathbb{R}$  и, следовательно, все коэффициенты разложения по выбранному базису будут конечными.

Однако сравнивать результат решения задачи идентификации с точным решением (23), например, в норме пространства  $L_2(\mathbb{R})$  не имеет смысла, поэтому сравнение будет осуществляться для усеченных спектральных характеристик функций (23) и (26):

$$\Delta_{F(x)} = \sqrt{\sum_{i_1=0}^{L_1-1} (f_{i_1} - f_{i_1}^{\text{оп}})^2},$$

где  $f_{i_1}^{\text{оп}}$  — коэффициенты разложения функции (23) по функциям Эрмита.

Заметим (это следствие формулы (25)), что

$$F(2, 2) = E(1, 1) \otimes F(1, 1),$$

где  $F(1, 1)$  — спектральная характеристика оператора умножения на функцию  $F(x)$ , определенная относительно функций Эрмита, которая, в свою очередь, выражается через спектральную характеристику множительного звена  $V(1, 2)$ , также определенную относительно функций Эрмита (см. теорему 2):

$$(27) \quad F(1, 1) = V(1, 2) \odot F(1, 0).$$

Напомним, что

$$V(1, 2) = (v_{i_1 j_1 k_1}),$$

где

$$v_{i_1 j_1 k_1} \stackrel{(3)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(i_1, x) \hat{\Phi}(j_1, x) \hat{\Phi}(k_1, x) dx, \quad i_1, j_1, k_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1.$$

Таким образом, решение уравнения обобщенной характеристической функции можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Phi(2, 0; v) = & \left( P(2, 2) + \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot \left( E(1, 1) \otimes (V(1, 2) \odot F(1, 0)) \right) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_1^2(2, 2) \right)^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)), \quad v = F(1, 0). \end{aligned}$$

Эквивалентная задаче идентификации задача минимизации формулируется следующим образом:

$$(28) \quad \|\Phi(1, 0; v) - \Phi_{\text{оп}}(1, 0)\|^2 \rightarrow \min_{v \in \Theta}, \quad \Theta = \mathbb{R}^{L_1},$$

где  $\Phi(1, 0; v)$  и  $\Phi_{\text{оп}}(1, 0)$  — спектральные характеристики плотностей вероятности (соответственно для вектора параметров  $v$  и опорной) при  $t_1 = 1$ . В общем случае, согласно свойствам спектральных характеристик функций времени и вектора состояния [6],

$$(29) \quad \Phi(1, 0) = (q^T(1, 0; 1) \otimes E(1, 1)) \cdot \Phi(2, 0).$$

В последнем выражении  $q(1, 0; 1)$  — матрица-столбец значений функций базисной системы  $\{q(i_0, t)\}_{i_0=0}^{\infty}$  в конечный момент времени  $t_1 = 1$ :

$$q(1, 0; 1) = [\hat{P}(0, 1) \quad \hat{P}(1, 1) \quad \dots \quad \hat{P}(L_0 - 1, 1)]^T.$$

Здесь и далее задача безусловной оптимизации (28) решалась методом конфигураций. Параметры метода конфигураций по обозначениям [8]: ускоряющий множитель  $\lambda = 1.5$ , коэффициенты уменьшения и увеличения шага  $\alpha = 1.3$  и  $\beta = 1.1$ , параметр остановки  $\varepsilon = 10^{-3}$  и  $10^{-6}$ . Начальное приближение  $v$  — нулевое. Для параметра остановки  $\varepsilon = 10^{-3}$  количество итераций 65, значение функционала 0.000006101780261,  $\Delta_{F(x)} = 2.658360610877280$ ; для  $\varepsilon = 10^{-6}$  количество итераций 14268, значение функционала 0.000000011604575,  $\Delta_{F(x)} = 1.931766761663984$ .

Для  $\varepsilon = 10^{-6}$  результаты решения задачи анализа с найденной функцией  $F(x)$  показаны на рис. 2.

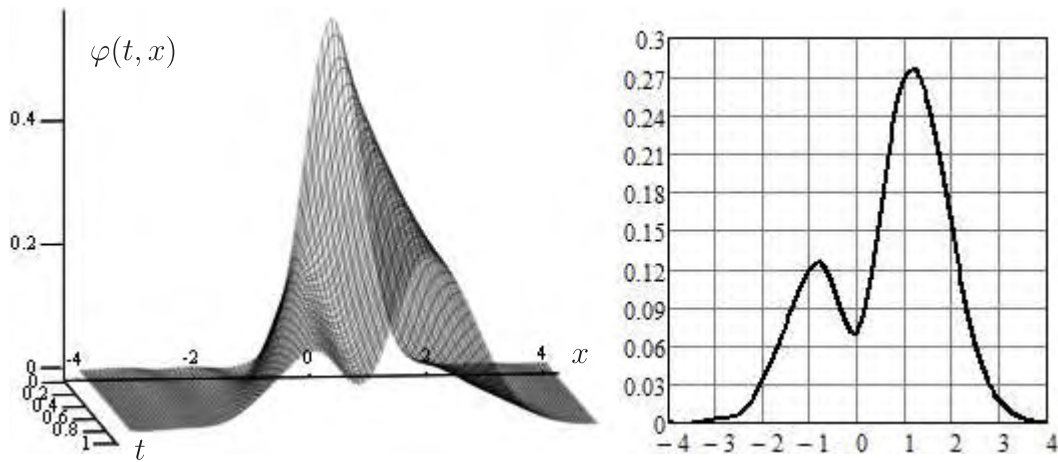


Рис. 2. Плотность вероятности состояния системы после нахождения  $F(x)$ .

Усложним задачу. Рассмотрим два варианта, считая неизвестной величиной математическое ожидание  $m_0$  начального состояния  $X_0$ :

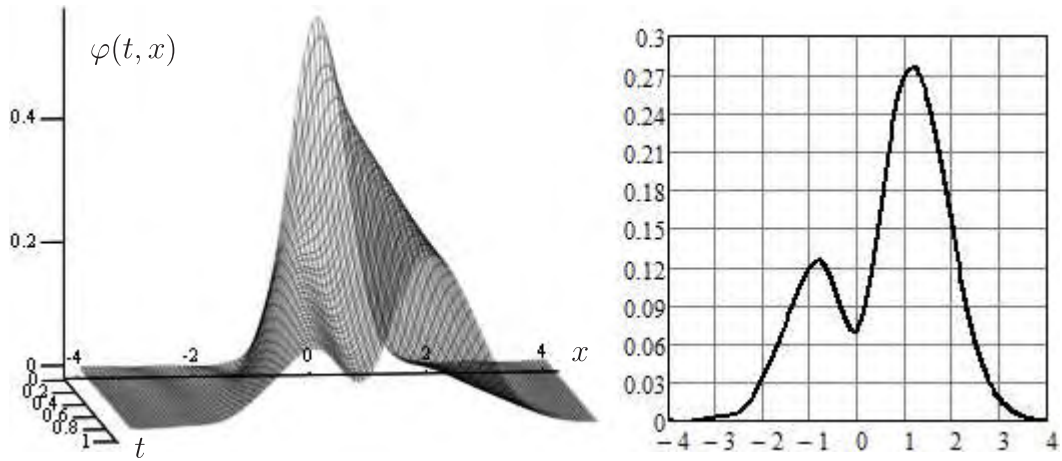
$$\Phi(2, 0; v) = \left( P(2, 2) + \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot \left( E(1, 1) \otimes (V(1, 2) \odot F(1, 0)) \right) - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_1^2(2, 2) \right)^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0; m_0)), \quad v = [F(1, 0) \quad m_0],$$

и считая неизвестным коэффициент  $\sigma$  при винеровском процессе (интенсивность шума) в модели стохастической релейной системы управления (22):

$$\Phi(2, 0; v) = \left( P(2, 2) + \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot \left( E(1, 1) \otimes (V(1, 2) \odot F(1, 0)) \right) - \frac{\sigma^2}{2} \cdot \mathcal{P}_1^2(2, 2) \right)^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)), \quad v = [F(1, 0) \quad \sigma].$$

Для обоих вариантов  $\Theta = \mathbb{R}^{L_1+1}$ .

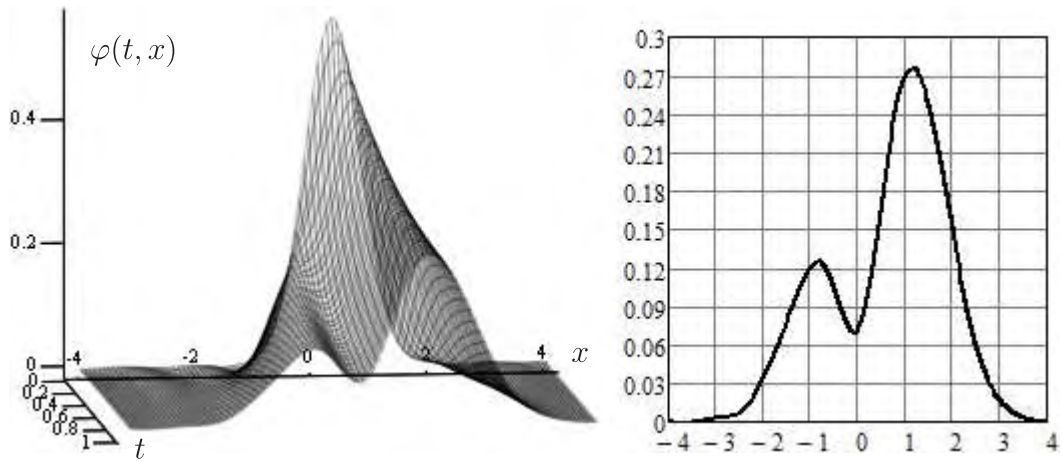
В первом варианте задачи для параметра остановки  $\varepsilon = 10^{-3}$  количество итераций 87, значение функционала 0.000004948037072,  $\Delta_{F(x)} = 3.509987030614025$ , математическое ожидание  $m_0 = 0.034015248720079$ ; для  $\varepsilon = 10^{-6}$  количество итераций 9603, значение функционала 0.000000002710701,  $\Delta_{F(x)} =$



**Рис. 3.** Плотность вероятности состояния системы после нахождения  $F(x)$  и параметра  $m_0$ .

$= 2.861108806680458$ , математическое ожидание  $m_0 = 0.121631048605796$ . Результаты решения задачи анализа с найденной функцией  $F(x)$  и параметром  $m_0$  при  $\varepsilon = 10^{-6}$  приведены на рис. 3.

Во втором варианте задачи для параметра остановки  $\varepsilon = 10^{-3}$  количество итераций 118, значение функционала 0.000000893011172,  $\Delta_{F(x)} = 4.824995268823908$ , интенсивность шума  $\sigma = 1.617765582353769$ ; для  $\varepsilon = 10^{-6}$  количество итераций 9846, значение функционала 0.000000006157943,  $\Delta_{F(x)} = 5.242485055490428$ , интенсивность шума  $\sigma = 1.587655663620249$ . Результаты решения задачи анализа с найденной функцией  $F(x)$  и параметром  $\sigma$  при  $\varepsilon = 10^{-6}$  приведены на рис. 4.



**Рис. 4.** Плотность вероятности состояния системы после нахождения  $F(x)$  и параметра  $\sigma$ .

Существенное отличие первого варианта от второго состоит в том, что при нахождении обобщенной характеристической функции  $\Phi(2, 0; v)$  спектральную характеристику  $\Phi_0(1, 0; m_0)$  плотности вероятности

$$(30) \quad \varphi_0(x; m_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x-m_0)^2}$$



начального состояния  $X_0$  нужно пересчитывать при изменении параметра  $m_0$  — одной из координат вектора параметров  $v$ :

$$\Phi_0(1, 0; m_0) = (\varphi_{0i_1}),$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_{0i_1} &\stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x; m_0) \hat{\Phi}(i_1, x) dx \stackrel{(30)}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-m_0)^2} \hat{\Phi}(i_1, x) dx, \quad i_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1. \end{aligned}$$

Для второго варианта переменная  $\sigma$  входит в уравнение обобщенной характеристической функции явно, что не требует пересчета спектральных характеристик, кроме, разумеется, спектральной характеристики  $\Phi(2, 0; v)$ .

В решенных задачах идентификации точность определения параметров  $m_0$  и  $\sigma$  не очень высока, так как сравнения плотности вероятности в конечный момент времени с опорной плотностью, очевидно, недостаточно (решение задачи идентификации в такой постановке может быть неединственным). Поэтому воспользуемся другим критерием, а именно критерием минимума функционала (15), т.е. функционала, учитывающего отклонение плотности вероятности состояния системы от опорной  $\varphi_{\text{оп}}(t, x)$  на всем отрезке времени функционирования системы управления в норме пространства  $L_2([0, 1] \times \mathbb{R})$ . Опорная плотность  $\varphi_{\text{оп}}(t, x)$  — результат решения задачи анализа.

Здесь предполагается, что неизвестны функция  $F(x)$ , коэффициент  $\sigma$  при винеровском процессе и математическое ожидание  $m_0$  начального состояния  $X_0$ , т.е.

$$(31) \quad \|\Phi(2, 0; v) - \Phi_{\text{оп}}(2, 0)\|^2 \rightarrow \min_{v \in \Theta}, \quad \Theta = \mathbb{R}^{L_1+2},$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(2, 0; v) &= \left( P(2, 2) + \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot \left( E(1, 1) \otimes (V(1, 2) \odot F(1, 0)) \right) - \right. \\ &\left. - \frac{\sigma^2}{2} \cdot \mathcal{P}_1^2(2, 2) \right)^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0, m_0)), \quad v = [F(1, 0) \ \sigma \ m_0], \end{aligned}$$

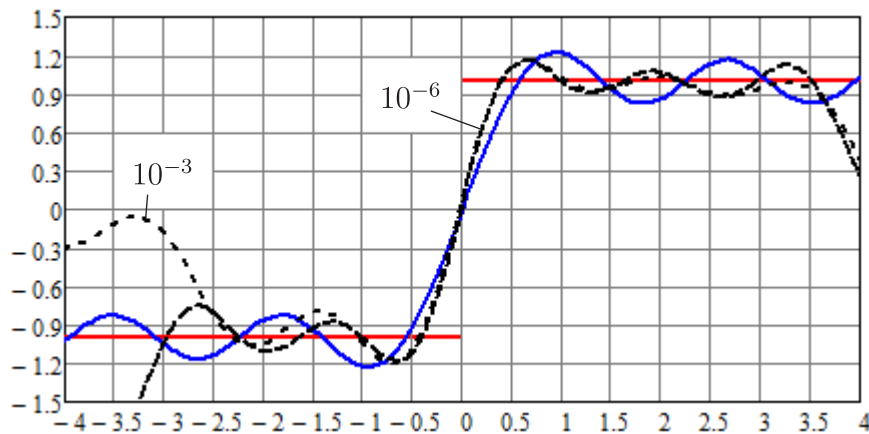
а  $\Phi_{\text{оп}}(2, 0)$  — спектральная характеристика опорной плотности вероятности  $\varphi_{\text{оп}}(t, x)$ , найденной в результате решения задачи анализа и представленной на рис. 1.

В этой задаче для параметра остановки  $\varepsilon = 10^{-3}$  количество итераций 153, значение функционала 0.000016153565544,  $\Delta_{F(x)} = 2.663634327972063$ , интенсивность шума  $\sigma = 1.023503047078211$ , математическое ожидание  $m_0 = 0.497102002780878$ ; для  $\varepsilon = 10^{-6}$  количество итераций 8370, значение функционала 0.000006275883726,  $\Delta_{F(x)} = 2.977928191113343$ , интенсивность шума  $\sigma = 1.009017856811955$ , математическое ожидание  $m_0 = 0.499594580118209$ . Результаты решения задачи анализа с найденной функцией  $F(x)$ , а также параметрами  $\sigma$  и  $m_0$  при  $\varepsilon = 10^{-6}$  на графике совпадают с приведенными на рис. 1.

Уменьшение параметра остановки  $\varepsilon$  метода конфигураций качественно не меняет результаты, полученные для  $\varepsilon = 10^{-6}$ : для параметра остановки  $\varepsilon = 10^{-9}$  количество итераций 14043, значение функционала 0.00000627579 4250,  $\Delta_{F(x)} = 2.985297003359311$ , интенсивность шума  $\sigma = 1.009001297612823$ , математическое ожидание  $m_0 = 0.499597522112122$ . Этот параметр метода конфигураций фактически означает точность нахождения координат вектора параметров  $v$ .

Нетрудно видеть, что для всех решенных вариантов задачи идентификации ошибка оценивания коэффициентов разложения функции  $F(x)$  наиболее значительна, это отчасти объясняется тем, что  $F(x) \notin L_2(\mathbb{R})$  и  $F(x)$  разрывна, а также тем, что многие свойства для спектральных характеристик функций и операторов при усечении выполняются приближенно, в том числе и свойство (27), применение которого позволяет существенно сократить размерность задач оптимизации (28) и (31). Не применяя это свойство, требовалось бы определять  $L_1(L_1 + 1)/2$  элементов (за счет симметричности матрицы  $F(1, 1)$ ) вместо  $L_1$  элементов. Тем не менее, при найденных значениях параметров плотность вероятности состояния в конечный момент времени  $t_1 = 1$  или на всем отрезке времени  $T = [0, 1]$  в зависимости от используемого критерия практически совпадает с опорной (порядок погрешности по значению функционала:  $-9 \dots -5$ ).

Дополнительно на рис. 5 приведем графики функций  $F(x)$ , найденных при решении задачи идентификации по критерию (31), соответствующие различным значениям параметра остановки  $\varepsilon$  (результаты для  $\varepsilon = 10^{-6}$  и  $\varepsilon = 10^{-9}$  на графике совпадают за исключением отрезка  $[3.5, 4]$ ), в сравнении с графиком функции (23) и графиком функции (26) с коэффициентами разложения, вычисленными по функции (23)



**Рис. 5.** Приближения функции  $F(x)$  в сравнении с точным решением (точное решение показано красным, результат обращения точного решения — синим).

## 4. Стохастические системы диффузионно-скачкообразного типа

### 4.1. Постановка задачи идентификации

Пусть поведение модели системы управления описывается стохастическим дифференциальным уравнением Ито с пуассоновской составляющей [17, 18]

$$(32) \quad dX(t) = f(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) + dQ(t), \quad X(t_0) = X_0,$$

где к обозначениям, введенным в разд. 3.1., нужно добавить общий пуассоновский процесс  $Q(t)$ , заданный в форме

$$Q(t) = \sum_{k=1}^{P(t)} \delta_k.$$

Предполагается, что  $P(t)$  — пуассоновский процесс,  $\delta_k$  — независимые случайные величины из  $\mathbb{R}^n$ , распределение которых задано плотностью вероятности  $\psi(\tau_k, \delta)$ , т.е. вектор состояния  $X$  получает случайные приращения в случайные моменты времени  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , образующие пуассоновский поток событий:

$$X(\tau_k) = X(\tau_k - 0) + \delta_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Величина приращения  $\delta_k$  не зависит от вектора состояния  $X(\tau_k - 0)$ .

Пуассоновский поток событий и, следовательно, пуассоновский процесс  $P(t)$  определяется интенсивностью  $\lambda(t, x)$  появления разрывов траекторий случайного процесса  $X(t)$  (интенсивность появления скачков):

$$\Pr(P(t + \Delta t) - P(t) = 1 | X(t - 0) = x) = \lambda(t, x)\Delta t + o(\Delta t),$$

$$\Pr(P(t + \Delta t) - P(t) = 0 | X(t - 0) = x) = 1 - \lambda(t, x)\Delta t + o(\Delta t).$$

Как и в разд. 3.1., будем считать, что все функции, задающие модель системы управления, удовлетворяют условиям существования и единственности решения задачи (32), а плотность вероятности  $\varphi(t, x)$  вектора состояния удовлетворяет уравнению Колмогорова – Феллера [18, 20]:

$$(33) \quad \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = \mathcal{A}\varphi(t, x) - \lambda(t, x)\varphi(t, x) + \int_{\mathbb{R}^m} \psi(t, x - z)\lambda(t, z)\varphi(t, z)dz, \quad \varphi(t_0, x) = \varphi_0(x),$$

где оператор  $\mathcal{A}$  определен выражением (10).

Задача идентификации заключается в нахождении вектора параметров  $v^*$ , при котором достигается минимальное значение функционала качества, определенного на множестве решений уравнения Колмогорова – Феллера (33) и множестве допустимых значений вектора параметров:

$$(34) \quad J(\varphi(t, x; v^*), v^*) = \min_{v \in \Theta} J(\varphi(t, x; v), v),$$

где  $\varphi(t, x; v)$  — решение уравнения (33) при векторе параметров  $v$  с учетом того, что от  $v$  могут зависеть функции  $f(t, x)$ ,  $g(t, x)$ ,  $\varphi_0(x)$  (см. разд. 3.1.), а также функции  $\lambda(t, x)$  и  $\psi(t, \delta)$ :

$$\begin{aligned} f(t, x) &= f(t, x; v), & g(t, x) &= g(t, x; v), & \varphi_0(x) &= \varphi_0(x; v), \\ \lambda(t, x) &= \lambda(t, x; v), & \psi(t, \delta) &= \psi(t, \delta; v). \end{aligned}$$

## 4.2. Уравнение обобщенной характеристической функции

Представим решение уравнения Колмогорова–Феллера (33) с помощью функционального ряда (16) или при приближенном решении с помощью частичной суммы (17) этого ряда. К ранее введенным обозначениям добавим следующие:  $\Lambda(n+1, n+1)$  — спектральная характеристика оператора умножения на интенсивность  $\lambda(t, x)$  пуассоновского потока событий — разрывов траекторий случайного процесса  $X(t)$ ;  $H(n+1, n+1)$  — спектральная характеристика оператора Фредгольма  $\mathcal{H}$  с ядром, которое определяется плотностью вероятности  $\psi(t, \delta)$  приращений вектора состояния  $X$ :

$$(35) \quad \mathcal{H}\varphi(t, x) = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(t, x - z)\varphi(t, z)dz.$$

Перечисленные спектральные характеристики определены относительно базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ .

Тогда

$$(36) \quad \begin{aligned} P(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0) = \\ = A(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) - \Lambda(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0) + \\ + H(n+1, n+1) \cdot \Lambda(n+1, n+1) \cdot \Phi(n+1, 0). \end{aligned}$$

Уравнение (36) — это спектральный аналог уравнения Колмогорова–Феллера (33). Оно также называется *уравнением обобщенной характеристической функции*. Как и уравнение (18), уравнение (36) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений для коэффициентов разложения  $\varphi_{i_0 i_1 \dots i_n}$  плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  относительно базисной системы  $\{e(i_0, i_1, \dots, i_n, t, x)\}_{i_0, i_1, \dots, i_n=0}^{\infty}$ , записанную в матричной форме. Подробный вывод уравнения (36) приведен в [28] с той лишь разницей, что в [28] рассмотрен более сложный случай зависимости приращения вектора состояния от текущего значения этого вектора состояния и определения оператора  $\mathcal{H}$  как оператора Фредгольма с ядром, задаваемым произведением условной плотности вероятности  $\psi(t, x | z)$  и интенсивности  $\lambda(t, z)$ .

Найденная из уравнения (36) спектральная характеристика

$$(37) \quad \begin{aligned} \Phi(n+1, 0) = \\ = (P(n+1, n+1) - A(n+1, n+1) + \Lambda(n+1, n+1) - \\ - H(n+1, n+1) \cdot \Lambda(n+1, n+1))^{-1} \cdot (q(1, 0; t_0) \otimes \Phi_0(n, 0)) \end{aligned}$$

определяет решение уравнения Колмогорова–Феллера (33) в спектральной форме математического описания. Оно позволяет найти значение функционала (34).

Каким образом учитывать зависимость функций  $f(t, x)$  и  $g(t, x)$ , а также распределения начального состояния  $X_0$  от параметров в спектральной форме математического описания, показано в разд. 3.2. Аналогично можно поступить и со спектральной характеристикой оператора умножения на интенсивность  $\lambda(t, x)$  появления разрывов траекторий случайного процесса  $X(t)$ :

$$\Lambda(n+1, n+1) = V(n+1, 2n+2) \odot \Lambda(n+1, 0),$$

$$\Lambda(n+1, n+1) = \Lambda(n+1, n+1; v), \quad \Lambda(n+1, 0) = \Lambda(n+1, 0; v),$$

где  $\Lambda(n+1, 0)$  — спектральная характеристика интенсивности  $\lambda(t, x)$ .

Для выражения спектральной характеристики  $H(n+1, n+1)$  оператора Фредгольма (35) можно воспользоваться спектральной характеристикой звена свертки. Тогда, согласно теореме 3, имеем

$$H(n+1, n+1) = W(n+1, 2n+2) \odot \Psi(n+1, 0),$$

$$H(n+1, n+1) = H(n+1, n+1; v), \quad \Psi(n+1, 0) = \Psi(n+1, 0; v),$$

где  $\Psi(n+1, 0)$  — спектральная характеристика плотности вероятности  $\psi(t, \delta)$  приращений вектора состояния  $X$ .

Следовательно, задачу идентификации можно переформулировать как нахождение вектора параметров  $v^*$ , при котором достигается минимальное значение функционала качества, определенного на множестве решений уравнения обобщенной характеристической функции (36) и множестве допустимых значений вектора параметров:

$$(38) \quad \tilde{J}(\Phi(n+1, 0; v^*), v^*) = \min_{v \in \Theta} \tilde{J}(\Phi(n+1, 0; v), v),$$

где  $\Phi(n+1, 0; v)$  — решение уравнения (36) при векторе параметров  $v$ , задаваемое выражением (37). Эту задачу, как и задачу (21), можно решать с помощью методов условной или безусловной конечномерной оптимизации [21, 25, 26]. Использование спектральных характеристик множительного звена и звена свертки может существенно сократить размерность задачи оптимизации и время вычислений.

### 4.3. Пример решения задачи идентификации

Вернемся к примеру из разд. 3.3., добавив в уравнение модели стохастической релейной системы управления (22) пуассоновскую составляющую:

$$(39) \quad dX(t) = F(X(t))dt + \sigma dW(t) + dQ(t),$$

которая задается постоянной интенсивностью появления разрывов траекторий случайного процесса  $X(t)$ :  $\lambda = 1.4$ , и распределением для приращений

состояния системы  $X$ : случайная величина  $\delta$  имеет нормальное распределение с математическим ожиданием  $m_\delta = -0.5$  и дисперсией  $D_\delta = 1$ , т.е. плотность вероятности стационарна (она не зависит от времени,  $\psi(t, \delta) = \psi(\delta)$ ) и задается следующим образом:

$$(40) \quad \psi(\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\delta+0.5)^2}{2}}.$$

Воспользуемся методикой приближенного решения задачи анализа выходных процессов стохастических систем диффузионно-скачкообразного типа, изложенной в [28].

Шаги 1–3, 5 и 7 такие же, как и в разд. 3.3. На шаге 4 добавим вычисление спектральной характеристики  $\Lambda(2, 2)$  интенсивности появления скачков в траекториях  $X(t)$  и спектральной характеристики  $H(2, 2)$  оператора Фредгольма  $\mathcal{H}$  с ядром, которое задается плотностью вероятности  $\psi(\delta)$ . В общем случае интенсивность появления скачков — функция времени и вектора состояния, но в рассматриваемой задаче она постоянная, поэтому  $\Lambda(2, 2) = \lambda \cdot E(2, 2)$ . Плотность вероятности приращений стационарна, следовательно,

$$\begin{aligned} h_{i_0 i_1 j_0 j_1} &\stackrel{(2)}{=} \delta_{i_0 j_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(i_1, x) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x-z) \hat{\Phi}(j_1, z) dz dx \stackrel{(40)}{=} \\ &= \frac{\delta_{i_0 j_0}}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(i_1, x) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-z+0.5)^2}{2}} \hat{\Phi}(j_1, z) dz dx, \end{aligned}$$

где  $\delta_{i_0 j_0}$  — символ Кронекера;  $i_0, j_0 = 0, 1, \dots, L_0 - 1$ ;  $i_1, j_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1$ .

На шаге 6 найдем решение уравнения обобщенной характеристической функции:

$$\begin{aligned} \Phi(2, 0) &\stackrel{(37)}{=} (P(2, 2) - A(2, 2) + \Lambda(2, 2) - H(2, 2) \cdot \Lambda(2, 2))^{-1} \cdot \\ &\quad \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \Phi(2, 0) &= \left( P(2, 2) + \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot F(2, 2) - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_1^2(2, 2) + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \cdot E(2, 2) - \lambda \cdot H(2, 2) \right)^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)). \end{aligned}$$

Результаты расчетов (графики плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  состояния  $X$  и сечения этой плотности в конечный момент времени  $t_1 = 1$ ) приведены на рис. 6.

Перейдем к задаче идентификации. Предположим, что интенсивность скачков  $\lambda$  неизвестна. Эту интенсивность требуется определить исходя из критерия минимума функционала (14), т.е. функционала, учитывающего отклонение плотности вероятности состояния системы от опорной  $\varphi_{\text{оп}}(x)$  для конечного момента времени в норме пространства  $L_2(\mathbb{R})$ . Опорная плотность  $\varphi_{\text{оп}}(x)$  — результат решения задачи анализа при  $t_1 = 1$ . В данном случае вектор параметров  $v$  состоит из одной координаты. Неотрицательность  $\lambda$  можно учесть, например, так:  $\lambda = |v|$ .

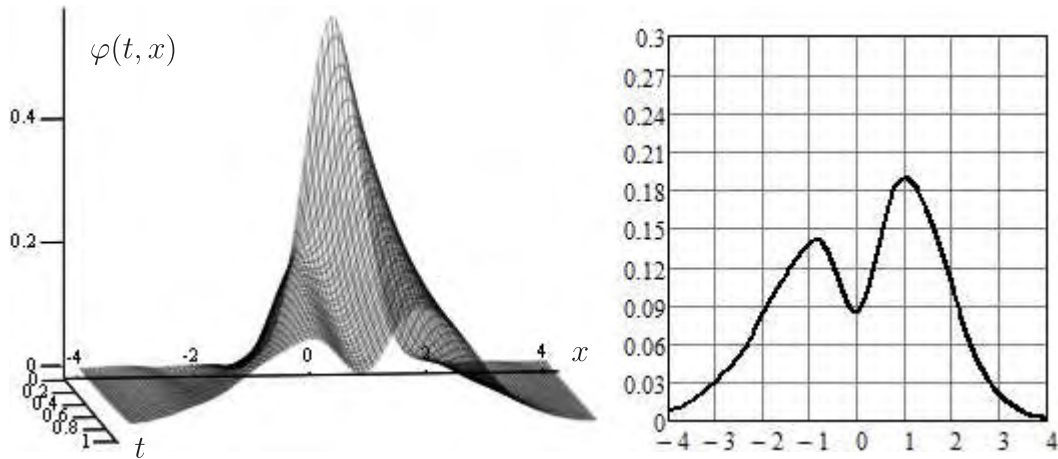


Рис. 6. Плотность вероятности состояния системы.

Следовательно, решение уравнения обобщенной характеристической функции для скалярного параметра  $v$  имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(2, 0; v) = & \left( P(2, 2) + \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot F(2, 2) - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_1^2(2, 2) + \right. \\ & \left. + \lambda \cdot E(2, 2) - \lambda \cdot H(2, 2) \right)^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)), \quad |v| = \lambda. \end{aligned}$$

Эквивалентная задаче идентификации задача минимизации формулируется следующим образом:

$$(41) \quad \|\Phi(1, 0; v) - \Phi_{\text{оп}}(1, 0)\|^2 \rightarrow \min_{v \in \Theta}, \quad \Theta = \mathbb{R},$$

где  $\Phi(1, 0; v)$  и  $\Phi_{\text{оп}}(1, 0)$  — спектральные характеристики плотностей вероятности (соответственно для скалярного параметра  $v$  и опорной) при  $t_1 = 1$ . Переход от  $\Phi(2, 0)$  к  $\Phi(1, 0)$  задается выражением (29).

Задача безусловной оптимизации (41) решалась методом конфигураций. Параметры метода конфигураций такие же, как и в разд. 3.3. Начальное приближение  $v$  — нулевое. Для параметра остановки  $\varepsilon = 10^{-3}$  количество итераций 21, значение функционала 0.000000067124942, интенсивность скачков  $\lambda = 1.396665179002945$ ; для  $\varepsilon = 10^{-6}$  количество итераций 52, значение функционала 0.000000000000005, интенсивность скачков  $\lambda = 1.400000875965492$ .

Добавим к вектору параметров математическое ожидание  $m_\delta$  и дисперсию  $D_\delta$  приращения  $\delta$  состояния системы управления:

$$(42) \quad \psi(\delta; m_\delta, D_\delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\delta}} e^{-\frac{(\delta - m_\delta)^2}{2D_\delta}}.$$

Кроме того, воспользуемся тем, что

$$H(2, 2) = E(1, 1) \otimes H(1, 1),$$

где  $H(1, 1)$  — спектральная характеристика оператора Фредгольма  $\mathcal{H}$  с ядром  $\psi(\delta)$ , определенная относительно функций Эрмита, которую целесообразно выразить через спектральную характеристику звена свертки  $W(1, 2)$

и спектральную характеристику  $\Psi(1, 0)$  плотности вероятности  $\psi(\delta)$ , также определенные относительно функций Эрмита (см. теорему 3):

$$H(1, 1) = W(1, 2) \odot \Psi(1, 0),$$

$$H(1, 1) = H(1, 1; m_\delta, D_\delta), \quad \Psi(1, 0) = \Psi(1, 0; m_\delta, D_\delta).$$

Спектральные характеристики  $W(1, 2)$  и  $\Psi(1, 0; m_\delta, D_\delta)$  вычисляются по определению:

$$W(1, 2) = (w_{i_1 j_1 k_1}), \quad \Psi(1, 0; m_\delta, D_\delta) = (\psi_{i_1}),$$

где

$$w_{i_1 j_1 k_1} \stackrel{(5)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(i_1, x) \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\Phi}(j_1, z) \hat{\Phi}(k_1, x - z) dz dx, \\ i_1, j_1, k_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1,$$

$$\psi_{i_1} \stackrel{(1)}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(\delta; m_\delta, D_\delta) \hat{\Phi}(i_1, x) dx \stackrel{(42)}{=} \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_\delta}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-m_\delta)^2}{2D_\delta}} \hat{\Phi}(i_1, x) dx, \quad i_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1,$$

или при  $D_\delta = 0$

$$\psi_{i_1} \stackrel{(1)}{=} \hat{\Phi}(i_1, m_\delta), \quad i_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1,$$

т.е. в последнем случае спектральная характеристика  $\Psi(1, 0; m_\delta, D_\delta)|_{D_\delta=0}$  образована значениями функций Эрмита при  $x = m_\delta$  (спектральная характеристика  $\delta$ -функции [6], сосредоточенной в точке  $m_\delta$ ).

Таким образом,

$$\Phi(2, 0; v) = \left( P(2, 2) + \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot F(2, 2) - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_1^2(2, 2) + \lambda \cdot E(2, 2) - \right. \\ \left. - \lambda \cdot \left( E(1, 1) \otimes (W(1, 2) \odot \Psi(1, 0; m_\delta, D_\delta)) \right) \right)^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)), \\ v = [v_1 \ v_2 \ v_3], \quad |v_1| = \lambda, \quad v_2 = m_\delta, \quad |v_3| = D_\delta.$$

Здесь, очевидно,  $\Theta = \mathbb{R}^3$ .

Для параметра остановки  $\varepsilon = 10^{-3}$  количество итераций 37, значение функционала 0.000000000659691, интенсивность скачков  $\lambda = 1.39988907109$  6118, математическое ожидание  $m_\delta = -0.500086716413844$ , дисперсия  $D_\delta = 0.999476562726131$ ; для  $\varepsilon = 10^{-6}$  количество итераций 60, значение функционала 0.00000000009031, интенсивность скачков  $\lambda = 1.399998266085182$ , математическое ожидание  $m_\delta = -0.500001397888687$ , дисперсия  $D_\delta = 0.999982541$  451416. Начальное приближение для метода конфигураций:  $v = [1 \ 2 \ 3]$ . Поскольку, как и для предыдущего варианта задачи идентификации, достигнута хорошая точность при нахождении параметров (порядок абсолютной погрешности:  $-6 \dots -4$ ), графики плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  состояния системы управления не приводятся.



Изменим постановку задачи идентификации, а именно перейдем от параметрического к непараметрическому оцениванию для закона распределения приращений  $\delta$  состояния системы управления. Будем искать плотность вероятности  $\psi(\delta)$  в виде конечного отрезка ряда по функциям Эрмита:

$$(43) \quad \psi(\delta) = \sum_{i_1=0}^{L_1-1} \psi_{i_1} \cdot \hat{\Phi}(i_1, \delta), \quad \delta \in \mathbb{R},$$

где  $\psi_{i_1}$  — коэффициенты разложения функции  $\psi(\delta)$ ,  $i_1 = 0, 1, \dots, L_1 - 1$ , составляющие наряду с интенсивностью появления скачков  $\lambda$  вектор параметров  $v$ . В этой задаче в отличие от задачи, рассмотренной в разд. 3.3., сравнение результата решения задачи идентификации с точным решением (40) целесообразно проводить именно в норме пространства  $L_2(\mathbb{R})$  или графически, причем такое сравнение практически эквивалентно сравнению усеченных спектральных характеристик функций (40) и (43):

$$\Delta_{\psi(\delta)} = \sqrt{\sum_{i_1=0}^{L_1-1} (\psi_{i_1} - \psi_{i_1}^{\text{оп}})^2},$$

где  $\psi_{i_1}^{\text{оп}}$  — коэффициенты разложения функции (40) по функциям Эрмита.

В результате получаем

$$(44) \quad \Phi(2, 0; v) = \left( P(2, 2) + \mathcal{P}_1(2, 2) \cdot F(2, 2) - \frac{1}{2} \cdot \mathcal{P}_1^2(2, 2) + \lambda \cdot E(2, 2) - \lambda \cdot (E(1, 1) \otimes (W(1, 2) \odot \Psi(1, 0))) \right)^{-1} \cdot (q(1, 0; 0) \otimes \Phi_0(1, 0)),$$

$$v = [v_1 \quad \Psi(1, 0)], \quad |v_1| = \lambda.$$

Начальное приближение  $v$  — нулевое,  $\Theta = \mathbb{R}^{L_1+1}$ .

Для параметра остановки  $\varepsilon = 10^{-3}$  количество итераций 26, значение функционала 0.000007807750192, интенсивность скачков  $\lambda = 0.743653825371285$ ,  $\Delta_{\psi(\delta)} = 0.630118671647406$ ; для  $\varepsilon = 10^{-6}$  количество итераций 1375, значение функционала 0.000000000230457, интенсивность скачков  $\lambda = 0.832058695911908$ ,  $\Delta_{\psi(\delta)} = 0.598538037007894$ .

Для  $\varepsilon = 10^{-6}$  результаты решения задачи анализа с найденной интенсивностью  $\lambda$  и плотностью вероятности  $\psi(\delta)$  показаны на рис. 7.

Полученные результаты для  $\lambda$  и  $\psi(\delta)$  не согласуются с точным решением, и ситуация не улучшается при уменьшении параметра остановки  $\varepsilon$  метода конфигураций: для параметра остановки  $\varepsilon = 10^{-9}$  количество итераций 3861, значение функционала 0.0000000000000000, интенсивность скачков  $\lambda = 0.832803489513514$ ,  $\Delta_{\psi(\delta)} = 0.599919849203895$ . Графики оценок плотности вероятности  $\psi(\delta)$ , соответствующие различным значениям параметра остановки  $\varepsilon$  (результаты для  $\varepsilon = 10^{-6}$  и  $\varepsilon = 10^{-9}$  на графике совпадают), в сравнении с графиком функции (40) изображены на рис. 8.

При этом достигается точное минимальное значение функционала (41), т.е. цель решения задачи идентификации достигнута в рамках этой сформулированной задачи, более того, графики плотности вероятности  $\varphi(t, x)$  при выбранном масштабе совпадают с приведенными на рис. 6.

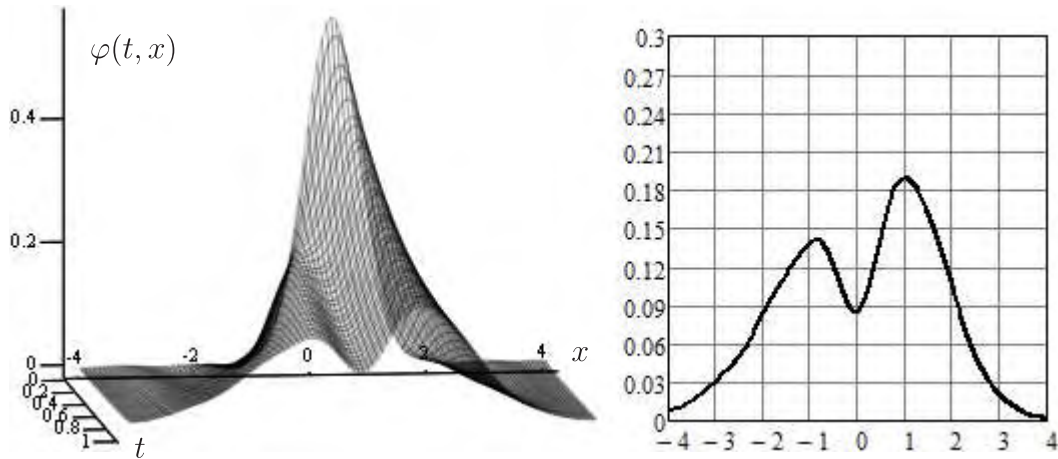


Рис. 7. Плотность вероятности состояния системы после нахождения  $\lambda$  и  $\psi(\delta)$ .

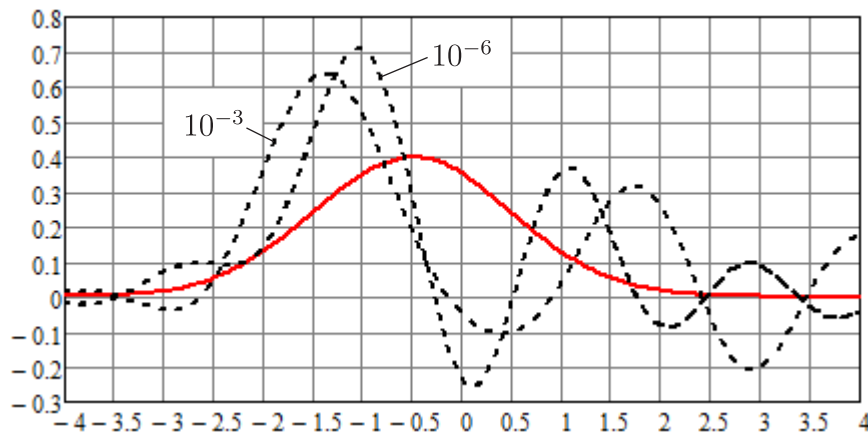


Рис. 8. Оценки плотности вероятности  $\psi(\delta)$  в сравнении с точным решением (точное решение показано красным).

Далее, для улучшения результатов идентификации, как и в примере из разд. 3.3., воспользуемся другим критерием — критерием минимума функционала (15), т.е. функционала, учитывающего отклонение плотности вероятности состояния системы от опорной  $\varphi_{\text{оп}}(t, x)$  на всем отрезке времени функционирования системы управления в норме пространства  $L_2([0, 1] \times \mathbb{R})$ . Опорная плотность  $\varphi_{\text{оп}}(t, x)$  — результат решения задачи анализа. Таким образом,

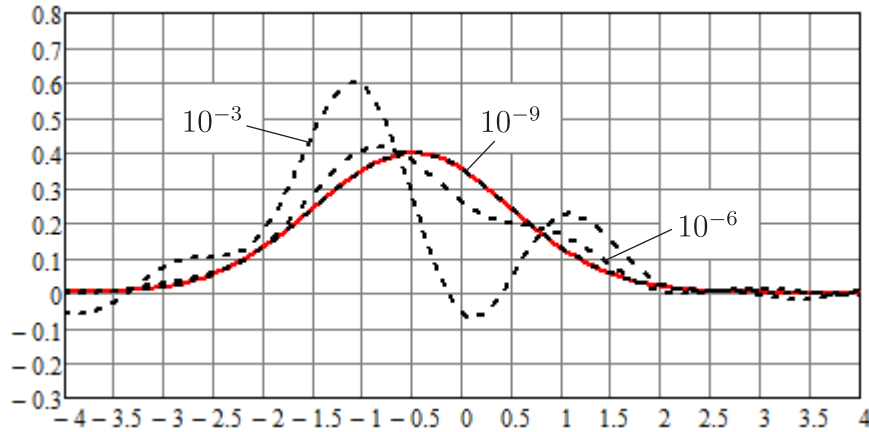
$$(45) \quad \|\Phi(2, 0; v) - \Phi_{\text{оп}}(2, 0)\|^2 \rightarrow \min_{v \in \Theta}, \quad \Theta = \mathbb{R}^{L_1+1},$$

где  $\Phi(2, 0; v)$  определяется соотношением (44), а  $\Phi_{\text{оп}}(2, 0)$  — спектральная характеристика опорной плотности вероятности  $\varphi_{\text{оп}}(t, x)$ , найденной в результате решения задачи анализа и представленной на рис. 6.

Для параметра остановки  $\varepsilon = 10^{-3}$  количество итераций 30, значение функционала 0.000002600840398, интенсивность скачков  $\lambda = 0.875598558697989$ ,  $\Delta_{\psi(\delta)} = 0.425363816675746$ ; для  $\varepsilon = 10^{-6}$  количество итераций 15804, значение функционала 0.000000013557039, интенсивность скачков  $\lambda = 1.256868794008931$ ,  $\Delta_{\psi(\delta)} = 0.096433712530178$ .

Дополнительные расчеты для параметра остановки  $\varepsilon = 10^{-9}$  с количеством итераций 72496 дали наилучший результат: значение функционала 0.000000000000027, интенсивность скачков  $\lambda = 1.400040397417164$ ,  $\Delta_{\psi(\delta)} = 0.000038763275291$ . Как видно из результатов, порядок абсолютной погрешности оценивания параметра  $\lambda$  составляет  $-5$ .

Графики оценок плотности вероятности  $\psi(\delta)$  для различных значений параметра остановки  $\varepsilon$  и график функции (40) показаны на рис. 9.



**Рис. 9.** Оценки плотности вероятности  $\psi(\delta)$  в сравнении с точным решением (точное решение показано красным).

Отметим, что задача идентификации была решена как задача безусловной оптимизации. На коэффициенты разложения функции  $\psi(\delta)$  никаких ограничений, обеспечивающих ее неотрицательность и нормированность:

$$\psi(\delta) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \psi(\delta) d\delta = 1,$$

не накладывалось. Получение приближения к функции  $\psi(\delta)$  (нахождение непараметрической оценки плотности вероятности приращений состояния стохастической релейной системы управления) обусловлено свойствами решений уравнения Колмогорова – Феллера (33), которое, как и уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (9), является уравнением сохранения вероятности. Это свойство выражается соотношением (11).

## 5. Заключение

В работе предложена методика решения задачи идентификации стохастических систем управления диффузионного и диффузионно-скачкообразного типов в спектральной форме математического описания (спектральным методом) на основе решения уравнений обобщенных характеристических функций. Она удобна для реализации на ЭВМ, в том числе и с применением современных технологий параллельных вычислений. Апробация методики проводилась на модельных примерах. Можно считать приведенные примеры искусственными, поскольку идентификация проводилась по выходным процессам,

полученным в результате анализа по известной модели и известных параметрах системы управления, тем не менее они демонстрируют основные этапы решения задач идентификации с применением спектральной формы математического описания.

## Список литературы

1. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. Красовского А.А. М.: Наука, 1987.
2. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.
3. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. М.: Наука, 1974.
4. Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егунов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. М.: Машиностроение, 1986.
5. Лапин С.В., Егунов Н.Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.
6. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. М.: Вузовская книга, 2006. (Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. № 1. <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>)
7. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Прикладной вероятностный анализ нелинейных систем управления спектральным методом. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2010.
8. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Методы и алгоритмы синтеза оптимальных стохастических систем управления при неполной информации. М.: Изд-во МАИ, 2012.
9. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных непрерывно-дискретных систем управления спектральным методом в системах компьютерной математики. М.: Изд-во МАИ, 2011.
10. Рыбин В.В. Моделирование нестационарных систем управления целого и дробного порядка проекционно-сеточным спектральным методом. М.: Изд-во МАИ, 2013.
11. Пупков К.А., Егунов Н.Д., Трофимов А.И. Статистические методы анализа, синтеза и идентификации нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Егунова Н.Д. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998.
12. Рыбаков К.А., Хакимов З.Р. О применении спектральной формы математического описания к идентификации систем управления космическими аппаратами // Вестник Московского авиационного института. 2010. Т. 17, № 3. С. 226-229.
13. Рыбаков К.А. Программное обеспечение спектрального метода Spectrum // Труды МАИ. 2003. № 14. <http://www.mai.ru>.
14. Пугачев В.С. Лекции по функциональному анализу. М.: Изд-во МАИ, 1996.
15. Романов В.А., Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Эрмита // Труды МАИ. 2010. № 39. <http://www.mai.ru>.
16. Рыбаков К.А. Спектральные характеристики операторов умножения, дифференцирования и интегрирования в базисе обобщенных функций Лагерра // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2012. № 1. С. 114-141. <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.
17. Пугачев В.С., Сеницын И.Н. Теория стохастических систем. М.: Логос, 2004.
18. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: Советское радио, 1977.
19. Анулова С.В., Веретенников А.Ю., Крылов Н.В., Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Стохастическое исчисление // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНТИ, 1989. Т. 45.
20. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. М.: Физматлит, 1993.
21. Пантелеев А.В., Летова Т.А. Методы оптимизации в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 2008.
22. Дикусар В.В., Вуйтович М. Методы идентификации параметров в стохастических дифференциальных уравнениях // Труды IX Международной конференции «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO '12. Москва, 30 января - 2 февраля

- 2012 г. М.: Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, 2012. С. 150-168.
23. Семенов В.В. Уравнение обобщенной характеристической функции вектора состояния систем автоматического управления // Аналитические методы синтеза регуляторов. Вып. 2. Межвуз. науч. сб. Саратов: СПИ, 1977. С. 3-36.
  24. Сотскова И.Л. Применение аппарата обобщенной характеристической функции к анализу стохастических систем управления ЛА // Задачи стохастического управления. Тем. сб. науч. тр. М.: МАИ, 1986. С. 71-78.
  25. Пантелеев А.В. Метаэвристические алгоритмы поиска глобального экстремума. М.: Изд-во МАИ-ПРИНТ, 2009.
  26. Пантелеев А.В., Алешина Е.А., Метлицкая Д.В. Методы глобальной оптимизации. Метаэвристические стратегии и алгоритмы. М.: Вузовская книга, 2013.
  27. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций // АиТ. 2011. № 2. С. 183-194.
  28. Аверина Т.А., Рыбаков К.А. Два метода анализа стохастических систем с пуассоновской составляющей // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2013. № 3. С. 85-116. <http://www.math.spbu.ru/diffjournal>.