УДК 62-50

Спектральные характеристики линейных функционалов и их приложения к анализу и синтезу стохастических систем управления

К.А. Рыбаков

В статье вводится понятие спектральных характеристик линейных функционалов, исследуются их свойства. Рассматриваются возможные приложения полученных результатов при решении задач анализа и синтеза нелинейных нестационарных стохастических систем управления с использованием спектральной формы математического описания, в частности, для определения моментных характеристик вектора состояния, маргинальных и условных плотностей вероятности.

Введение

В работах [1–3] был предложен метод вероятностного анализа нелинейных нестационарных стохастических систем управления, основанный на спектральной форме математического описания [4,5], а в [6,7] этот подход был развит для решения задачи вероятностного анализа стохастических систем с переменной структурой (систем со случайными изменениями структуры) и стохастических непрерывно-дискретных систем. Для решения перечисленных выше задач были введены понятия спектральных характеристик функций (нестационарных спектральных характеристик) и спектральных характеристик линейных операторов (нестационарных передаточных функций) и исследованы их свойства, на основании которых были построены эффективные алгоритмы решения задачи вероятностного анализа, т.е. алгоритмы определения плотности вероятности вектора состояния системы управления как наиболее полной вероятностной характеристики. Однако в некоторых случаях для анализа и синтеза ряда систем требуется определение моментных характеристик вектора состояния, вероятностных характеристик активности структур для систем управления со случайными изменениями структуры, нахождение маргинальных и условных плотностей вероятности [8,9], причем на всех этапах вычислений удобно использовать спектральную форму математического описания систем управления. В связи с этим для решения подобных задач спектральным методом возникает необходимость представления линейных функционалов в спектральной форме математического описания.

Спектральные характеристики линейных функционалов

Пусть $\mathcal{W}$ – линейный функционал, определенный на действительном пространстве $L_2(\Omega)$, где $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$; $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(\Omega)$ [10], $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Будем предполагать, что существует такая действительная функция $w(x)$, что для любой функции $h(x) \in L_2(\Omega)$ справедливо равенство

$$\mathcal{W}h(x) = \int_{\Omega} w(x)h(x)dx. \tag{1}$$

Будем называть спектральной характеристикой линейного функционала $\mathcal{W}$, определенной относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, гиперстрочную матрицу $W(0,n) = \left(W_{i_1 i_2 \ldots i_n}\right)$ (см. приложение 1), элементы которой вычисляются по формуле

$$W_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \left(p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x), w(x)\right)_{L_2(\Omega)}, \qquad i_1,i_2,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots, \tag{2}$$

где $(\ .\ ,\ .\ )_{L_2(\Omega)}$ – скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$, т.е.

$$\left(u(x),v(x)\right)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx \qquad \text{для любых } u(x),v(x) \in L_2(\Omega).$$

Отображение, ставящее в соответствие линейному функционалу его спектральную характеристику, называется спектральным преобразованием и обозначается $\mathbb{S}$:

$$\mathbb{S}[\mathcal{W}] = W(0,n).$$

Нетрудно видеть, что соотношение (2) также задает элементы спектральной характеристики $W(n,0) = \left(W_{i_1 i_2 \ldots i_n}\right)$ функции $w(x)$, определенной относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ (см. приложение 2 и [3,6]). Таким образом, $W(0,n) = \left[W(n,0)\right]^{\mathrm{T}}$, где $\left[W(n,0)\right]^{\mathrm{T}}$ – транспонированная многомерная матрица [11,12].

Замечание. Если функционал $\mathcal{W}$ непрерывен, то по теореме Рисса [10] существует единственная функция $w(x) \in L_2(\Omega)$ такая, что справедливо представление (1) и при этом $\|\mathcal{W}\| = \|w(x)\|_{L_2(\Omega)}$, однако в ряде случаев функция $w(x)$ может принадлежать пространству обобщенных функций, тем не менее, ее спектральная характеристика вычисляется так же, как и спектральные характеристики функций из пространства $L_2(\Omega)$ [4,5].

Теорема 1. Пусть $\mathcal{W}$ – линейный функционал, определенный на пространстве $L_2(\Omega)$, $h(x) \in L_2(\Omega)$, $W(0,n)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{W}$, а $H(n,0)$ – спектральная характеристика функции $h(x)$. Спектральные характеристики $W(0,n)$ и $H(n,0)$ определены относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,...,i_n,x)\}_{i_1,i_2,...,i_n=0}^{\infty}$. Тогда

$$\mathcal{W}h(x)=W(0,n)\cdot H(n,0), \tag{3}$$

т.е. значение функционала $\mathcal{W}h(x)$ равно произведению спектральных характеристик функционала $\mathcal{W}$ и функции $h(x)$.

Доказательство. Из соотношения (1) следует, что формально $\mathcal{W}h(x)=\int\limits_{\Omega} w(x)h(x)dx=(w(x),h(x))_{L_2(\Omega)}$, тогда, представляя функцию $h(x)$ в виде ряда по функциям базисной системы $\{p(i_1,i_2,...,i_n,x)\}_{i_1,i_2,...,i_n=0}^{\infty}$ и используя свойства скалярного произведения, получаем следующее выражение:

$$\mathcal{W}h(x)=\left(w(x),\sum_{i_1,i_2,...,i_n=0}^{\infty} H_{i_1i_2...i_n}\cdot p(i_1,i_2,...,i_n,x)\right)_{L_2(\Omega)}=\sum_{i_1,i_2,...,i_n=0}^{\infty}\left(w(x),p(i_1,i_2,...,i_n,x)\right)_{L_2(\Omega)}\cdot H_{i_1i_2...i_n}=$$

$$=\sum_{i_1,i_2,...,i_n=0}^{\infty}\left(p(i_1,i_2,...,i_n,x),w(x)\right)_{L_2(\Omega)}\cdot H_{i_1i_2...i_n}=\sum_{i_1,i_2,...,i_n=0}^{\infty} W_{i_1i_2...i_n}\cdot H_{i_1i_2...i_n},$$

где $W_{i_1i_2...i_n}$ – элементы спектральной характеристики функционала $\mathcal{W}$ (см. (2)), а $H_{i_1i_2...i_n}$ – элементы спектральной характеристики функции $h(x)$, т.е.

$$H_{i_1i_2...i_n}=\left(p(i_1,i_2,...,i_n,x),h(x)\right)_{L_2(\Omega)},\qquad i_1,i_2,...,i_n=0,1,2,...$$

С учетом правила умножения многомерных матриц [11], отсюда следует, что

$$\mathcal{W}h(x)=W(0,n)\cdot H(n,0).\qquad\lhd$$

Приведем примеры линейных функционалов.

1. Линейный функционал $\delta_{x'}$, ставящий в соответствие функции $h(x)\in L_2(\Omega)$ значение этой функции в точке x', $x'\in\Omega$, т.е. $\delta_{x'}h(x)=h(x')$.

Известно [10], что $\delta_{x'}h(x)$ можно представить в виде $\delta_{x'}h(x)=\int\limits_{\Omega}\delta(x-x')h(x)dx$, где $\delta(x-x')$ – δ-функция векторного аргумента [10]. Тогда по определению спектральной характеристики линейного функционала $\mathbb{S}[\delta_{x'}]=\Delta_{x'}(0,n)$, где элементы гиперстрочной матрицы $\Delta_{x'}(0,n)$ задаются выражением

$$\Delta_{i_1i_2...i_n}=\int\limits_{\Omega} p(i_1,i_2,...,i_n,x)\delta(x-x')dx=p(i_1,i_2,...,i_n,x'),\qquad i_1,i_2,...,i_n=0,1,2,...,$$

следовательно, значение функции $h(x)$ в заданной точке x' вычисляется по правилу

$$h(x')=\Delta_{x'}(0,n)\cdot H(n,0),$$

где $H(n,0)$ – спектральная характеристика функции $h(x)$, определенная относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. Заметим, что полученное соотношение представляет собой формулу обращения спектральных характеристик функций (см. приложение 2):

$$h(x') = \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty} H_{i_1 i_2 \ldots i_n} \cdot p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x'),$$

где $H_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ – элементы спектральной характеристики $H(n,0)$, $x' \in \Omega$.

2. Линейный функционал $\mathcal{J}$, ставящий в соответствие функции $h(x) \in L_2(\Omega)$ значение интеграла от этой функции по множеству Ω, т.е. $\mathcal{J}h(x) = \int\limits_{\Omega} h(x)dx$.

Нетрудно видеть, что функционалу $\mathcal{J}$ соответствует функция $w(x)=1$, следовательно, по определению спектральной характеристики линейного функционала $\mathbb{S}[\mathcal{J}] = J(0,n)$, где элементы гиперстрочной матрицы $J(0,n)$ задаются соотношением

$$J_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \int\limits_{\Omega} p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)dx, \qquad i_1,i_2,\ldots,i_n = 0,1,2,\ldots$$

Тогда значение функционала $\mathcal{J}$ определяется выражением

$$\int\limits_{\Omega} h(x)dx = J(0,n) \cdot H(n,0),$$

при условии, что интеграл в левой части этого выражения существует и существуют интегралы в соотношении для вычисления элементов спектральной характеристики функционала $\mathcal{J}$.

Следует отметить, что спектральная характеристика $J(0,n)$ функционала $\mathcal{J}$ может быть выражена через спектральную характеристику $W(n,0)$ функции $w(x)=1$, определенную относительно базисной системы $\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, а именно $J(0,n) = [W(n,0)]^{\mathrm{T}}$.

Пример 1. Вычислим интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx$, используя в качестве базисной системы для спектрального преобразования функции Эрмита [13].

Рассмотрим функции Эрмита с параметрами $m=0$ и $D=\dfrac{1}{2}$. Известно [13], что элементы спектральной характеристики $W(1,0)$ функции $w(x)=1$, определенной относительно выбранной базисной системы, вычисляются следующим образом:

$$W_0 = \sqrt[4]{4\pi}, \qquad W_1 = 0,$$

$$W_i = \sqrt{\frac{i-1}{i}}\, W_{i-2}, \qquad i = 2,3,4,\ldots$$

Тогда $J(0,1) = \left[W(1,0)\right]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{4\pi} & 0 & \dfrac{\sqrt[4]{4\pi}}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{\sqrt{3}\sqrt[4]{4\pi}}{2\sqrt{2}} & 0 & \ldots \end{bmatrix}$.

Найдем спектральную характеристику функции $h(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ относительно системы функций Эрмита. По определению элементы спектральной характеристики функции $h(x)$ задаются соотношением

$$H_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_i(x) h(x)\, dx, \qquad i = 0,1,2,\ldots,$$

где $\Phi_i(x)$ – функция Эрмита с номером i. Таким образом,

$$H_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_i(x) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \begin{cases} \sqrt[4]{\pi}, & i = 0, \\ 0, & i = 1,2,\ldots, \end{cases}$$

т.е. $H(1,0) = \begin{bmatrix} \sqrt[4]{\pi} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Следовательно, в силу теоремы 1 и правила умножения многомерных матриц значение интеграла определяется выражением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = J(0,1) \cdot H(1,0) = \sum_{i=0}^{\infty} W_i \cdot H_i = \sqrt[4]{4\pi} \cdot \sqrt[4]{\pi} = \sqrt{2\pi}\,. \qquad \triangleleft$$

Введем новые обозначения. Пусть множество Ω представляется в виде $\Omega = \Omega_{(1)} \times \Omega_{(2)}$, где $\Omega_{(1)} \subseteq \mathbb{R}^m$, $\Omega_{(2)} \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$, $1 \le m < n$, а вектор x – в виде $x = \begin{bmatrix} x_{(1)} & x_{(2)} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, где $x_{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \Omega_{(1)}$, $x_{(2)} = \begin{bmatrix} x_{m+1} & \ldots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \Omega_{(2)}$. Пусть также система функций $\left\{ p_{(1)}\left(i_1, i_2, \ldots, i_m, x_{(1)}\right) \right\}_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2\left(\Omega_{(1)}\right)$, а система $\left\{ p_{(2)}\left(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\right) \right\}_{i_{m+1}, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ является базисом пространства $L_2\left(\Omega_{(2)}\right)$. Функцию $h(x)$ будем записывать в виде $h\left(x_{(1)}, x_{(2)}\right)$. Кроме того, будем полагать, что функции базисной системы $\left\{ p\left(i_1, i_2, \ldots, i_n, x\right) \right\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega)$ порождаются всевозможными произведениями функций базисных систем $\left\{ p_{(1)}\left(i_1, i_2, \ldots, i_m, x_{(1)}\right) \right\}_{i_1, i_2, \ldots, i_m = 0}^{\infty}$ и $\left\{ p_{(2)}\left(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\right) \right\}_{i_{m+1}, \ldots, i_n = 0}^{\infty}$, т.е.

$$p\left(i_1, i_2, \ldots, i_m, i_{m+1}, \ldots, i_n, x\right) = p_{(1)}\left(i_1, i_2, \ldots, i_m, x_{(1)}\right) p_{(2)}\left(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\right).$$

Рассмотрим линейный функционал $\mathcal{W}_{(1)}$, заданный на пространстве $L_2\left(\Omega_{(1)}\right)$. Тогда в выражении $\mathcal{W}_{(1)} h\left(x_{(1)}, x_{(2)}\right)$ координаты $x_{(2)}$ играют роль числовых параметров.

Теорема 2. Пусть $\mathcal{W}_{(1)}$ – линейный функционал, определенный на пространстве $L_2\left(\Omega_{(1)}\right)$, $h\left(x_{(1)}, x_{(2)}\right) \in L_2(\Omega)$, $h\left(x_{(1)}, x_{(2)}\right) \in L_2\left(\Omega_{(1)}\right)$ почти всюду на $\Omega_{(2)}$, $W_{(1)}(0, m)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{W}_{(1)}$, определенная относительно базисной системы $\left\{p_{(1)}\left(i_1, i_2, \ldots, i_m, x_{(1)}\right)\right\}_{i_1, i_2, \ldots, i_m=0}^{\infty}$, $H(n, 0)$ – спектральная характеристика функции $h\left(x_{(1)}, x_{(2)}\right)$, определенная относительно базисной системы $\left\{p\left(i_1, i_2, \ldots, i_n, x\right)\right\}_{i_1, i_2, \ldots, i_n=0}^{\infty}$, $E(n-m, n-m)$ – единичная матрица размерности $2(n-m)$. Тогда

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{W}_{(1)} h\left(x_{(1)}, x_{(2)}\right)\right]=\left(W_{(1)}(0, m) \otimes E(n-m, n-m)\right) \cdot H(n, 0), \tag{4}$$

где спектральное преобразование применяется к функции $h_{(2)}\left(x_{(2)}\right)=\mathcal{W}_{(1)} h\left(x_{(1)}, x_{(2)}\right)$ относительно базисной системы $\left\{p_{(2)}\left(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\right)\right\}_{i_{m+1}, \ldots, i_n=0}^{\infty}$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что

$$h_{(2)}\left(x_{(2)}\right)=\mathcal{W}_{(1)} h\left(x_{(1)}, x_{(2)}\right)=W_{(1)}(0, m) \cdot H_{(1)}\left(m, 0 ; x_{(2)}\right),$$

где $H_{(1)}\left(m, 0 ; x_{(2)}\right)$ – спектральная характеристика функции $h\left(x_{(1)}, x_{(2)}\right)$ при фиксированном $x_{(2)}$, определенная относительно базисной системы $\left\{p_{(1)}\left(i_1, i_2, \ldots, i_m, x_{(1)}\right)\right\}_{i_1, i_2, \ldots, i_m=0}^{\infty}$. Обозначим через $W_{i_1 i_2 \ldots i_m}$ и $H_{i_1 i_2 \ldots i_m}\left(x_{(2)}\right)$ элементы спектральных характеристик $W_{(1)}(0, m)$ и $H_{(1)}\left(m, 0 ; x_{(2)}\right)$ соответственно. Тогда

$$h_{(2)}\left(x_{(2)}\right)=\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m=0}^{\infty} W_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cdot H_{i_1 i_2 \ldots i_m}\left(x_{(2)}\right).$$

Найдем элементы спектральной характеристики функции $h_{(2)}\left(x_{(2)}\right)$ относительно базисной системы $\left\{p_{(2)}\left(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\right)\right\}_{i_{m+1}, \ldots, i_n=0}^{\infty}$:

$$H_{i_{m+1} \ldots i_n}=\left(p_{(2)}\left(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\right), h_{(2)}\left(x_{(2)}\right)\right)_{L_2\left(\Omega_{(2)}\right)}=\left(p_{(2)}\left(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\right), \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m=0}^{\infty} W_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cdot H_{i_1 i_2 \ldots i_m}\left(x_{(2)}\right)\right)_{L_2\left(\Omega_{(2)}\right)}=$$

$$=\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m=0}^{\infty} W_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cdot\left(p_{(2)}\left(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\right), H_{i_1 i_2 \ldots i_m}\left(x_{(2)}\right)\right)_{L_2\left(\Omega_{(2)}\right)}=\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_m=0}^{\infty} W_{i_1 i_2 \ldots i_m} \cdot H_{i_1 i_2 \ldots i_n},$$

$$i_{m+1}, \ldots, i_n=0,1,2, \ldots,$$

где числа $H_{i_1 i_2 \ldots i_n}=\left(p_{(2)}\left(i_{m+1}, \ldots, i_n, x_{(2)}\right), H_{i_1 i_2 \ldots i_m}\left(x_{(2)}\right)\right)_{L_2\left(\Omega_{(2)}\right)}$ представляют собой элементы спектральной характеристики $H(n,0)$.

Формулу для вычисления $H_{i_{m+1}\dots i_n}$ можно переписать следующим образом:

$$H_{i_{m+1}\dots i_n} = \sum_{j_1, j_2,\dots, j_n=0}^{\infty} \tilde{W}_{i_{m+1}\dots i_n j_1 j_2 \dots j_n} \cdot H_{j_1 j_2 \dots j_n}, \qquad i_{m+1},\dots,i_n = 0,1,2,\dots,$$

где упорядоченная совокупность чисел

$$\tilde{W}_{i_{m+1}\dots i_n j_1 j_2 \dots j_n} = \begin{cases} W_{j_1 j_2 \dots j_m}, & i_{m+1} = j_{m+1}, \ \dots, \ i_n = j_n, \\ 0, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

образует многомерную матрицу $\tilde{W}(n-m,n)$.

Следовательно, по определению произведения и тензорного произведения многомерных матриц получаем выражение для спектральной характеристики функции $h_{(2)}\left(x_{(2)}\right)$:

$$\mathbb{S}\left[h_{(2)}\left(x_{(2)}\right)\right] = \tilde{W}(n-m,n) \cdot H(n,0),$$

где $\tilde{W}(n-m,n) = W_{(1)}(0,m) \otimes E(n-m,n-m)$. Отсюда следует формула (4). $\triangleleft$

Замечание. Аналогичное утверждение можно сформулировать в случае, если $x_{(1)}$ и $x_{(2)}$ образуются другим способом. Например, $x_{(1)} = \begin{bmatrix} x_{m+1} & \dots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $x_{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, или $x_{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_3 & x_5 & \dots & x_{n-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $x_{(2)} = \begin{bmatrix} x_2 & x_4 & x_6 & \dots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, если n – четное; и т.п.

Переход от спектральной характеристики $H_{(2)}(n-m,0) = \mathbb{S}\left[\mathcal{W}_{(1)} h\left(x_{(1)}, x_{(2)}\right)\right]$ к функции $h_{(2)}\left(x_{(2)}\right)$ осуществляется по формуле обращения:

$$h_{(2)}\left(x_{(2)}\right) = \mathbb{S}^{-1}\left[H_{(2)}(n-m,0)\right] = \sum_{i_{m+1},\dots,i_n=0}^{\infty} H_{i_{m+1}\dots i_n} \cdot p_{(2)}\left(i_{m+1},\dots,i_n, x_{(2)}\right), \tag{5}$$

где $H_{i_{m+1}\dots i_n}$ – элементы спектральной характеристики $H_{(2)}(n-m,0)$, $x_{(2)} \in \Omega_{(2)}$.

Пример 2. Запишем выражение для спектральных характеристик функций $h_2(x_2) = \int\limits_{\Omega_1} h(x_1,x_2)\,dx_1$ и $h_1(x_1) = \int\limits_{\Omega_2} h(x_1,x_2)\,dx_2$, где $h(x_1,x_2) \in L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}$.

Пусть $\left\{p_1(i_1,x_1)\right\}_{i_1=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(\Omega_1)$, а $\left\{p_2(i_2,x_2)\right\}_{i_2=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(\Omega_2)$. Положим $x_{(1)} = x_1$, $x_{(2)} = x_2$ и рассмотрим линейный функционал $\mathcal{J}_1$, определенный на пространстве $L_2(\Omega_1)$ и ставящий в соответствие функции $f_1(x_1) \in L_2(\Omega_1)$ интеграл от этой функции по множеству Ω_1, т.е. $\mathcal{J}_1 f_1(x_1) = \int\limits_{\Omega_1} f_1(x_1)\,dx_1$. Нетрудно видеть, что $h_2(x_2) = \mathcal{J}_1 h(x_1,x_2)$ при фиксированном x_2. Тогда из теоремы 2 следует, что спектральная характеристика функции

$h_2(x_2)$, определенная относительно базисной системы $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$, выражается следующим образом:

$$H_2(1,0)=\mathbb{S}\left[h_2(x_2)\right]=\mathbb{S}\left[\int\limits_{\Omega_1} h(x_1,x_2)\,dx_1\right]=\left(J_1(0,1)\otimes E(1,1)\right)\cdot H(2,0),$$

где $J_1(0,1)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}_1$, определенная относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$, $E(1,1)$ – двумерная единичная матрица, $H(2,0)$ – спектральная характеристика функции $h(x_1,x_2)$, определенная относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)\,p_2(i_2,x_2)\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$.

Переход от спектральной характеристики $H_2(1,0)$ к функции $h_2(x_2)$ осуществляется по формуле (5), которая в рассматриваемом примере примет вид:

$$\int\limits_{\Omega_1} h(x_1,x_2)\,dx_1=\mathbb{S}^{-1}\left[H_2(1,0)\right]=\sum_{i_2=0}^{\infty} H''_{i_2}\cdot p_2(i_2,x_2),$$

где H''_{i_2} – элементы спектральной характеристики $H_2(1,0)$, $x_2\in\Omega_2$.

Теперь предположим, что $x_{(1)}=x_2$, а $x_{(2)}=x_1$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем выражение для спектральной характеристики функции $h_1(x_1)$, определенной относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$:

$$H_1(1,0)=\mathbb{S}\left[h_1(x_1)\right]=\mathbb{S}\left[\int\limits_{\Omega_2} h(x_1,x_2)\,dx_2\right]=\left(E(1,1)\otimes J_2(0,1)\right)\cdot H(2,0),$$

где $J_2(0,1)$ – спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}_2$, заданного на пространстве $L_2(\Omega_2)$ и ставящего в соответствие функции $f_2(x_2)\in L_2(\Omega_2)$ интеграл от этой функции по множеству Ω_2, т.е $\mathcal{J}_2 f_2(x_2)=\int\limits_{\Omega_2} f_2(x_2)\,dx_2$. Спектральная характеристика $J_2(0,1)$ определена относительно базисной системы $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$.

Формула обращения для спектральной характеристики $H_1(1,0)$ функции $h_1(x_1)$ имеет вид:

$$\int\limits_{\Omega_2} h(x_1,x_2)\,dx_2=\mathbb{S}^{-1}\left[H_1(1,0)\right]=\sum_{i_1=0}^{\infty} H'_{i_1}\cdot p_1(i_1,x_1),$$

где H'_{i_1} – элементы спектральной характеристики $H_1(1,0)$, $x_1\in\Omega_1$. $\triangleleft$

Рассмотрим линейные функционалы, заданные на множестве функций времени t и вектора x

в предположении, что переменная времени играет роль параметра.

Будем предполагать, что функции базисной системы $\left\{e\left(i_0,i_1,...,i_n,t,x\right)\right\}_{i_0,i_1,...,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2\left(T\times\Omega\right)$, где $T\subseteq\left[0,+\infty\right)$ – промежуток времени, порождаются всевозможными произведениями функций систем $\left\{q\left(i_0,t\right)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$ и $\left\{p\left(i_1,i_2,...,i_n,x\right)\right\}_{i_1,i_2,...,i_n=0}^{\infty}$, которые в свою очередь являются базисами пространств $L_2\left(T\right)$ и $L_2\left(\Omega\right)$ соответственно, т.е. $e\left(i_0,i_1,...,i_n,t,x\right)=q\left(i_0,t\right)p\left(i_1,...,i_n,x\right)$.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{W}$ – линейный функционал, определенный на пространстве $L_2\left(\Omega\right)$, $h\left(t,x\right)\in L_2\left(T\times\Omega\right)$, $h\left(t,x\right)\in L_2\left(\Omega\right)$ почти всюду на T, $W\left(0,n\right)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{W}$, определенная относительно базисной системы $\left\{p\left(i_1,i_2,...,i_n,x\right)\right\}_{i_1,i_2,...,i_n=0}^{\infty}$, $H\left(n+1,0\right)$ – спектральная характеристика функции $h\left(t,x\right)$, определенная относительно базисной системы $\left\{e\left(i_0,i_1,...,i_n,t,x\right)\right\}_{i_0,i_1,...,i_n=0}^{\infty}$. Тогда

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{W}h\left(t,x\right)\right]=\left(E\left(1,1\right)\otimes W\left(0,n\right)\right)\cdot H\left(n+1,0\right), \tag{6}$$

где спектральное преобразование применяется к функции $h_0\left(t\right)=\mathcal{W}h\left(t,x\right)$ относительно базисной системы $\left\{q\left(i_0,t\right)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$.

Доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 2.

Запишем формулу обращения для спектральной характеристики $H_0\left(1,0\right)=\mathbb{S}\left[\mathcal{W}h\left(t,x\right)\right]$ функции $h_0\left(t\right)=\mathcal{W}h\left(t,x\right)$:

$$h_0\left(t\right)=\mathbb{S}^{-1}\left[H_0\left(1,0\right)\right]=\sum_{i_0=0}^{\infty}H_{i_0}\cdot q\left(i_0,t\right), \tag{7}$$

где H_{i_0} – элементы спектральной характеристики $H_0\left(1,0\right)$, $t\in T$.

Пример 3. Запишем выражение для спектральной характеристики функции времени $h_0\left(t\right)=\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2}h\left(t,x_1,x_2\right)dx_1dx_2$, где $h\left(t,x_1,x_2\right)\in L_2\left(T\times\Omega_1\times\Omega_2\right)$, $\Omega_1,\Omega_2\subseteq\mathbb{R}$.

Пусть $\left\{q\left(i_0,t\right)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2\left(T\right)$, а $\left\{p_1\left(i_1,x_1\right)p_2\left(i_2,x_2\right)\right\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2\left(\Omega_1\times\Omega_2\right)$. Тогда, по теореме 3, получаем искомую спектральную характеристику в виде

$$H_0\left(1,0\right)=\mathbb{S}\left[h_0\left(t\right)\right]=\mathbb{S}\left[\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2}h\left(t,x_1,x_2\right)dx_1dx_2\right]=\left(E\left(1,1\right)\otimes J\left(0,2\right)\right)\cdot H\left(3,0\right),$$

где $H\left(3,0\right)$ – спектральная характеристика функции $h\left(t,x_1,x_2\right)$, определенная относительно базисной системы $\left\{q(i_0,t)\,p_1(i_1,x_1)\,p_2(i_2,x_2)\right\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$, $J(0,2)$ – спектральная характеристика линейного функционала $\mathcal{J}$, заданного на пространстве $L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$ и ставящего в соответствие функции $f(x_1,x_2)\in L_2(\Omega_1\times\Omega_2)$ интеграл от этой функции по множеству $\Omega_1\times\Omega_2$, т.е. $\mathcal{J}f(x_1,x_2)=\int\limits_{\Omega_1}\int\limits_{\Omega_2} f(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$. Спектральная характеристика $J(0,2)$ определена относительно базисной системы $\left\{p_1(i_1,x_1)\,p_2(i_2,x_2)\right\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$.

Напомним, что $J(0,2)=\left[W(2,0)\right]^{\mathrm{T}}$, где $W(2,0)$ – спектральная характеристика функции $w(x_1,x_2)=1$, определенная относительно базисной системы $\left\{p_1(i_1,x_1)\,p_2(i_2,x_2)\right\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$.

Для перехода от спектральной характеристики $H_0(1,0)$ к соответствующей функции времени применяется формула обращения (7). $\triangleleft$

Сформулируем важное следствие из теорем 2 и 3. Пусть функции базисной системы $\left\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\right\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ порождаются всевозможными произведениями функций базисных систем $\left\{q(i_0,t)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$, $\left\{p_{(1)}\left(i_1,i_2,\ldots,i_m,x_{(1)}\right)\right\}_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{\infty}$ и $\left\{p_{(2)}\left(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\right)\right\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространств $L_2(T)$, $L_2\left(\Omega_{(1)}\right)$ и $L_2\left(\Omega_{(2)}\right)$, т.е. $e(i_0,i_1,\ldots,i_m,i_{m+1},\ldots,i_n,t,x)=q(i_0,t)\,p_{(1)}\left(i_1,\ldots,i_m,x_{(1)}\right)p_{(2)}\left(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\right)$. Пусть также $\mathcal{W}_{(1)}$ – линейный функционал, заданный на пространстве $L_2\left(\Omega_{(1)}\right)$. Будем предполагать, что в выражении $h_{(2)}\left(t,x_{(2)}\right)=\mathcal{W}_{(1)}h\left(t,x_{(1)},x_{(2)}\right)$ переменная времени t и координаты $x_{(2)}$ играют роль числовых параметров. Функцию $h(t,x)$ будем записывать в виде $h\left(t,x_{(1)},x_{(2)}\right)$.

Теорема 4. Пусть $W_{(1)}(0,m)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{W}_{(1)}$, определенная относительно базисной системы $\left\{p_{(1)}\left(i_1,i_2,\ldots,i_m,x_{(1)}\right)\right\}_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{\infty}$, $h\left(t,x_{(1)},x_{(2)}\right)\in L_2(T\times\Omega)$, $h\left(t,x_{(1)},x_{(2)}\right)\in L_2\left(\Omega_{(1)}\right)$ почти всюду на $T\times\Omega_{(2)}$, $H(n+1,0)$ – спектральная характеристика функции $h\left(t,x_{(1)},x_{(2)}\right)$, определенная относительно базисной системы $\left\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\right\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$. Тогда

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{W}_{(1)}h\left(t,x_{(1)},x_{(2)}\right)\right]=\left(E(1,1)\otimes W_{(1)}(0,m)\otimes E(n-m,n-m)\right)\cdot H(n+1,0), \tag{8}$$

где спектральное преобразование применяется к функции $h_{(2)}\left(t,x_{(2)}\right)=\mathcal{W}_{(1)}h\left(t,x_{(1)},x_{(2)}\right)$

относительно базисной системы $\left\{q(i_0,t)\,p_{(2)}\left(i_{m+1},...,i_n,x_{(2)}\right)\right\}_{i_0,i_{m+1},...,i_n=0}^{\infty}$.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 2.

Переход от спектральной характеристики $H_{(2)}(n-m+1,0)=\mathbb{S}\left[\mathcal{W}_{(1)}h\left(t,x_{(1)},x_{(2)}\right)\right]$ к функции $h_{(2)}\left(t,x_{(2)}\right)$ осуществляется по формуле обращения:

$$h_{(2)}\left(t,x_{(2)}\right)=\mathbb{S}^{-1}\left[H_{(2)}(n-m+1,0)\right]=\sum_{i_0,i_{m+1},...,i_n=0}^{\infty}H_{i_0i_{m+1}...i_n}\cdot q(i_0,t)\cdot p_{(2)}\left(i_{m+1},...,i_n,x_{(2)}\right), \tag{9}$$

где $H_{i_0i_{m+1}...i_n}$ – элементы спектральной характеристики $H_{(2)}(n-m+1,0)$, $t\in T$, $x_{(2)}\in\Omega_{(2)}$.

Замечание. Следует отметить, что в общем случае $x_{(1)}$ и $x_{(2)}$ могут формироваться произвольным образом из координат вектора x.

Пример 4. Найдем выражения для спектральных характеристик функций $h_2(t,x_2)=\int\limits_{\Omega_1}h(t,x_1,x_2)\,dx_1$ и $h_1(t,x_1)=\int\limits_{\Omega_2}h(t,x_1,x_2)\,dx_2$, где $h(t,x_1,x_2)\in L_2(T\times\Omega_1\times\Omega_2)$, $\Omega_1,\Omega_2\subseteq\mathbb{R}$.

Пусть $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(T)$, а $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ – базисы пространств $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2)$ соответственно. Тогда, используя результаты, полученные в примере 2 и утверждение теоремы 4, запишем искомые выражения для спектральных характеристик:

$$H_2(2,0)=\mathbb{S}\left[h_2(t,x_2)\right]=\mathbb{S}\left[\int\limits_{\Omega_1}h(t,x_1,x_2)\,dx_1\right]=\left(E(1,1)\otimes J_1(0,1)\otimes E(1,1)\right)\cdot H(3,0),$$

$$H_1(2,0)=\mathbb{S}\left[h_1(t,x_1)\right]=\mathbb{S}\left[\int\limits_{\Omega_2}h(t,x_1,x_2)\,dx_2\right]=\left(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes J_2(0,1)\right)\cdot H(3,0),$$

где $J_1(0,1)$ и $J_2(0,1)$ – спектральные характеристики функционалов $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$, определенные относительно базисных систем $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$ соответственно (см. пример 2), $H(3,0)$ – спектральная характеристика функции $h(t,x_1,x_2)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\,p_1(i_1,x_1)\,p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$.

Для перехода от спектральных характеристик $H_2(2,0)$ и $H_1(2,0)$ к соответствующим функциям применим формулу (9), тогда

$$\int\limits_{\Omega_1}h(t,x_1,x_2)\,dx_1=\mathbb{S}^{-1}\left[H_2(2,0)\right]=\sum_{i_0,i_2=0}^{\infty}H''_{i_0i_2}\cdot q(i_0,t)\cdot p_2(i_2,x_2),$$

$$\int_{\Omega_2} h(t,x_1,x_2)\,dx_2 = \mathbb{S}^{-1}\big[H_1(2,0)\big] = \sum_{i_0,i_1=0}^{\infty} H'_{i_0 i_1}\cdot q(i_0,t)\cdot p_1(i_1,x_1),$$

где $H''_{i_0 i_2}$ и $H'_{i_0 i_1}$ – элементы спектральных характеристик $H_2(2,0)$ и $H_1(2,0)$ соответственно, $t\in T$, $x_1\in\Omega_1$, $x_2\in\Omega_2$. ◁

Вычисление моментных характеристик вектора состояния стохастических систем

Рассмотрим задачу вычисления моментных характеристик вектора состояния стохастических систем управления с фиксированной структурой [14,15] по известной спектральной характеристике плотности вероятности вектора состояния.

Пусть $\phi(t,x)$ – плотность вероятности вектора состояния, тогда математическое ожидание $m(t)$ и ковариационная матрица $R(t)$ определяются следующим образом:

$$m(t) = \begin{bmatrix} m_1(t) & m_2(t) & \cdots & m_n(t)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$R(t) = \begin{bmatrix} R_{11}(t) & R_{12}(t) & \cdots & R_{1n}(t) \\ R_{21}(t) & R_{22}(t) & \cdots & R_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1}(t) & R_{n2}(t) & \cdots & R_{nn}(t)\end{bmatrix},$$

где

n – размерность вектора состояния,

$$m_i(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x_i \phi(t,x)\,dx, \tag{10}$$

$$R_{ij}(t) = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \phi(t,x)\,dx - m_i(t)m_j(t), \tag{11}$$

$i, j = 1,2,\ldots,n$.

Операцию вычисления математического ожидания можно рассматривать как линейный функционал $\mathcal{J}$ (см. примеры линейных функционалов), заданный на пространстве функций времени и вектора состояния при условии, что переменная времени t фиксирована, $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Перейдем к определению функций $m_i(t)$ и $R_{ij}(t)$ с использованием спектральной формы математического описания. Пусть $M_i(1,0)$ – спектральная характеристика функции $m_i(t)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T)$, $J(0,n)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}$, $X_i(n,n)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_i(x) = x_i$ (нестационарная передаточная функция усилительного звена с коэффициентом передачи $a_i(x)=x_i$); спектральные характеристики $J(0,n)$, $X_i(n,n)$ определены относительно базисной системы $\left\{p(i_1,i_2,...,i_n,x)\right\}_{i_1,i_2,...,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\mathbb{R}^n)$, $\Phi(n+1,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности вектора состояния, определенная относительно базисной системы $\left\{e(i_0,i_1,...,i_n,t,x)=q(i_0,t)\,p(i_1,...,i_n,x)\right\}_{i_0,i_1,...,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(T\times\mathbb{R}^n)$, $E(1,1)$ – двумерная единичная матрица. Тогда по теореме 3 и свойству спектрального преобразования произведения функций [4,5] имеем

$$M_i(1,0)=\left(E(1,1)\otimes J(0,n)\right)\cdot\left(E(1,1)\otimes X_i(n,n)\right)\cdot\Phi(n+1,0), \tag{12}$$

$i=1,2,...,n$,

так как спектральная характеристика подынтегральной функции в выражении (10) равна $\left(E(1,1)\otimes X_i(n,n)\right)\cdot\Phi(n+1,0)$.

Запишем выражение для представления функции $R_{ij}(t)$. По аналогии со спектральной характеристикой функции $m_i(t)$ получаем, что

$$\mathbb{S}\left[\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \phi(t,x)\,dx\right]=\left(E(1,1)\otimes J(0,n)\right)\cdot\left(E(1,1)\otimes X_{ij}(n,n)\right)\cdot\Phi(n+1,0),$$

где $X_{ij}(n,n)=X_i(n,n)\cdot X_j(n,n)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a_{ij}(x)=x_i x_j$. По свойству спектрального преобразования произведения функций времени [5] $\mathbb{S}\left[m_i(t)m_j(t)\right]=M_i(1,1)\cdot M_j(1,0)$, где $M_i(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $m_i(t)$, определенная относительно базисной системы $\left\{q(i_0,t)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$, а $M_j(1,0)$ – спектральная характеристика функции $m_j(t)$, причем спектральную характеристику $M_i(1,1)$ можно найти по известной спектральной характеристике $M_i(1,0)$ [4,5]:

$$M_i(1,1)=V(1,2)\odot M_i(1,0),$$

где $V(1,2)$ – спектральная характеристика множительного звена (трехмерная нестационарная передаточная функция множительного звена), определенная относительно базисной системы $\left\{q(i_0,t)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$. Следовательно, спектральная характеристика $R_{ij}(1,0)$ функции $R_{ij}(t)$ определяется соотношением

$$R_{ij}(1,0)=\left(E(1,1)\otimes J(0,n)\right)\cdot\left(E(1,1)\otimes X_{ij}(n,n)\right)\cdot\Phi(n+1,0)-\left(V(1,2)\odot M_i(1,0)\right)\cdot M_j(1,0), \tag{13}$$

$i,j=1,2,...,n$.

Спектральные характеристики функций $m_i(t)$ и $R_{ij}(t)$ можно найти другим способом. Определим линейные функционалы $\mathcal{M}_{x_i}$ и $\mathcal{M}_{x_i x_j}$ на пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\mathcal{M}_{x_i} h(x) = \int_\Omega x_i h(x)\,dx\,, \quad \mathcal{M}_{x_i x_j} h(x) = \int_\Omega x_i x_j h(x)\,dx\,, \quad h(x) \in L_2(\Omega),$$

тогда $M_i(0,n) = \mathbb{S}\big[\mathcal{M}_{x_i}\big] = \big[X_i(n,0)\big]^{\mathrm{T}}$, $M_{ij}(0,n) = \mathbb{S}\big[\mathcal{M}_{x_i x_j}\big] = \big[X_{ij}(n,0)\big]^{\mathrm{T}}$, где $X_i(n,0)$ и $X_{ij}(n,0)$ – спектральные характеристики функций $a_i(x) = x_i$ и $a_{ij}(x) = x_i x_j$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\big\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\big\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2(\Omega)$. Следовательно, если $\Omega = \mathbb{R}^n$, то по теореме 3, свойству линейности спектрального преобразования и свойству спектрального преобразования произведения функций времени

$$M_i(1,0) = \big(E(1,1) \otimes M_i(0,n)\big) \cdot \Phi(n+1,0), \tag{14}$$

$$R_{ij}(1,0) = \big(E(1,1) \otimes M_{ij}(0,n)\big) \cdot \Phi(n+1,0) - \big(V(1,2) \odot M_i(1,0)\big) \cdot M_j(1,0), \tag{15}$$

$i, j = 1,2,\ldots,n$.

Покажем, что соотношения (12) и (14) эквивалентны. Для этого преобразуем выражение $\big(E(1,1) \otimes J(0,n)\big) \cdot \big(E(1,1) \otimes X_i(n,n)\big)$, используя свойства операций над многомерными матрицами [12]:

$$\big(E(1,1) \otimes J(0,n)\big) \cdot \big(E(1,1) \otimes X_i(n,n)\big) = \big(E(1,1) \cdot E(1,1)\big) \otimes \big(J(0,n) \cdot X_i(n,n)\big) =$$
$$= E(1,1) \otimes \Big(\big[J(0,n) \cdot X_i(n,n)\big]^{\mathrm{T}}\Big)^{\mathrm{T}} = E(1,1) \otimes \Big(\big[X_i(n,n)\big]^{\mathrm{T}} \cdot \big[J(0,n)\big]^{\mathrm{T}}\Big)^{\mathrm{T}}.$$

Известно [4,5], что спектральные характеристики операторов умножения представляют собой симметрические матрицы, т.е. $\big[X_i(n,n)\big]^{\mathrm{T}} = X_i(n,n)$. Кроме того, $J(0,n) = \big[W(n,0)\big]^{\mathrm{T}}$ и, следовательно, $\big[J(0,n)\big]^{\mathrm{T}} = W(n,0)$, где $W(n,0)$ – спектральная характеристика функции $w(x) = 1$, определенная относительно базисной системы $\big\{p(i_1,i_2,\ldots,i_n,x)\big\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, поэтому $E(1,1) \otimes \Big(\big[X_i(n,n)\big]^{\mathrm{T}} \cdot \big[J(0,n)\big]^{\mathrm{T}}\Big)^{\mathrm{T}} = E(1,1) \otimes \big(X_i(n,n) \cdot W(n,0)\big)^{\mathrm{T}}$. По свойству спектрального преобразования произведения функций [4,5] $X_i(n,n) \cdot W(n,0) = X_i(n,0)$. Таким образом,

$$E(1,1) \otimes \big(X_i(n,n) \cdot W(n,0)\big)^{\mathrm{T}} = E(1,1) \otimes \big[X_i(n,0)\big]^{\mathrm{T}} = E(1,1) \otimes M_i(0,n),$$

т.е. $\big(E(1,1) \otimes J(0,n)\big) \cdot \big(E(1,1) \otimes X_i(n,n)\big) = E(1,1) \otimes M_i(0,n)$, из чего следует эквивалентность соотношений (12) и (14). Эквивалентность соотношений (13) и (15) доказывается аналогично.

Переход от спектральных характеристик $M_i(1,0)$ и $R_{ij}(1,0)$ к соответствующим функциям времени осуществляется по формуле (7):

$$m_i(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[M_i(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} M_{i;i_0} \cdot q(i_0,t), \tag{16}$$

$$R_{ij}(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[R_{ij}(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} R_{ij;i_0} \cdot q(i_0,t), \tag{17}$$

где $M_{i;i_0}$ и $R_{ij;i_0}$ – элементы спектральных характеристик $M_i(1,0)$ и $R_{ij}(1,0)$ соответственно, $t \in T$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Замечание. В одномерном случае $(n=1)$ функция $R(t)$ называется дисперсией и обозначается $D(t)$. Спектральную характеристику функции $D(t)$ будем обозначать $D(1,0)$.

Пример 5. Запишем выражения для спектральных характеристик математического ожидания и дисперсии состояния одномерной стохастической системы.

Формулы (10) и (11) для одномерной стохастической системы примут вид:

$$m(t) = \int_{\mathbb{R}} x\phi(t,x)dx, \qquad D(t) = \int_{\mathbb{R}} x^2\phi(t,x)dx - m^2(t).$$

Для получения искомых спектральных характеристик воспользуемся результатами, полученными выше. Пусть $\left\{q(i_0,t)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(T)$, $V(1,2)$ – спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно этой базисной системы; $\left\{p(i_1,x)\right\}_{i_1=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(\mathbb{R})$, а $J(0,1)$ и $X(1,1)$ – спектральные характеристики функционала $\mathcal{J}$ и оператора умножения функцию $a(x) = x$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\left\{p(i_1,x)\right\}_{i_1=0}^{\infty}$; $\Phi(2,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности состояния, т.е. функции $\phi(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\left\{q(i_0,t)\,p(i_1,x)\right\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$. Тогда спектральные характеристики $M(1,0)$ и $D(1,0)$ функций $m(t)$ и $D(t)$ соответственно выражаются следующим образом:

$$M(1,0) = \big(E(1,1)\otimes J(0,1)\big)\cdot\big(E(1,1)\otimes X(1,1)\big)\cdot\Phi(2,0),$$

$$D(1,0) = \big(E(1,1)\otimes J(0,1)\big)\cdot\big(E(1,1)\otimes X^2(1,1)\big)\cdot\Phi(2,0) - \big(V(1,2)\otimes M(1,0)\big)\cdot M(1,0).$$

Переход от спектральных характеристик $M(1,0)$ и $D(1,0)$ к соответствующим функциям времени осуществляется по формулам (16) и (17). $\triangleleft$

Замечание. Используя понятие спектральных характеристик линейных функционалов, можно получить соотношения, аналогичные (12) и (13) (или (14) и (15)), для определения начальных и центральных моментов любого порядка по известной спектральной характеристике плотности вероятности.

Перейдем к определению спектральных характеристик математического ожидания и ковариационной матрицы вектора состояния для систем со случайными изменениями структуры [16–18]. Пусть $\phi^{<k>}(t,x)$ – ненормированная плотность вероятности вектора состояния [16–18] для структуры с номером k, N – число структур системы. Тогда координаты вектора $m(t)$ и элементы матрицы $R(t)$ выражаются следующим образом [17]:

$$m_i(t)=\sum_{k=1}^{N} m_i^{<k>}(t), \qquad R_{ij}(t)=\sum_{k=1}^{N}\left(R_{ij}^{<k>}(t)+\frac{m_i^{<k>}(t)m_j^{<k>}(t)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}\right)-m_i(t)m_j(t), \qquad i,j=1,2,\dots,n, \tag{18}$$

где n – размерность вектора состояния, а функции $m_i^{<k>}(t)$ и $R_{ij}^{<k>}(t)$ определяются соотношениями

$$m_i^{<k>}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i\phi^{<k>}(t,x)dx, \tag{19}$$

$$R_{ij}^{<k>}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i x_j\phi^{<k>}(t,x)dx-\frac{m_i^{<k>}(t)m_j^{<k>}(t)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}, \tag{20}$$

$i,j=1,2,\dots,n, \qquad k=1,2,\dots,N$;

$\mathbb{P}^{<k>}(t)$ – вероятность работы структуры с номером k:

$$\mathbb{P}^{<k>}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\phi^{<k>}(t,x)dx. \tag{21}$$

Наряду с ненормированными плотностями вероятности $\phi^{<k>}(t,x)$, функциями $m_i^{<k>}(t)$ и $R_{ij}^{<k>}(t)$ будем рассматривать нормированные плотности

$$\tilde{\phi}^{<k>}(t,x)=\frac{\phi^{<k>}(t,x)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}$$

и моментные характеристики

$$\tilde{m}_i^{<k>}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i\tilde{\phi}^{<k>}(t,x)dx=\frac{m_i^{<k>}(t)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}, \tag{22}$$

$$\tilde{R}_{ij}^{<k>}(t)=\int\limits_{\mathbb{R}^n} x_i x_j\tilde{\phi}^{<k>}(t,x)dx-\tilde{m}_i^{<k>}(t)\tilde{m}_j^{<k>}(t)=\frac{R_{ij}^{<k>}(t)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}, \tag{23}$$

$i,j=1,2,\dots,n, \qquad k=1,2,\dots,N$.

Замечание. Функция $\phi^{<k>}(t,x)$ представляет собой совместную плотность вероятности $\phi(t,x,k)$ вектора состояния и номера структуры при фиксированном k, а $\tilde{\phi}^{<k>}(t,x)$ – условная плотность вероятности $\phi(t,x\,|\,k)$. По принятой в [17] терминологии, будем называть функции

$m^{<k>}(t)=\left[m_i^{<k>}(t)\right]_{i=1}^n$ и $R^{<k>}(t)=\left[R_{ij}^{<k>}(t)\right]_{i,j=1}^n$ взвешенными, а $\tilde{m}^{<k>}(t)=\left[\tilde{m}_i^{<k>}(t)\right]_{i=1}^n$ и $\tilde{R}^{<k>}(t)=\left[\tilde{R}_{ij}^{<k>}(t)\right]_{i,j=1}^n$ условными моментными характеристиками.

Спектральные характеристики $M_i^{<k>}(1,0)$ функций $m_i^{<k>}(t)$ определяются аналогично спектральным характеристикам координат математического ожидания вектора состояния стохастических систем с фиксированной структурой (см. (12)):

$$M_i^{<k>}(1,0)=\big(E(1,1)\otimes J(0,n)\big)\cdot\big(E(1,1)\otimes X_i(n,n)\big)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0), \tag{24}$$

$i=1,2,\ldots,n$, $\quad k=1,2,\ldots,N$,

где $\Phi^{<k>}(n+1,0)$ – спектральная характеристика ненормированной плотности вероятности $\phi^{<k>}(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\left\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\right\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Из соотношения (21) и теоремы 3 следует, что спектральная характеристика $P^{<k>}(1,0)$ функции $\mathbb{P}^{<k>}(t)$, определенная относительно базисной системы $\left\{q(i_0,t)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$, выражается следующим образом:

$$P^{<k>}(1,0)=\big(E(1,1)\otimes J(0,n)\big)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0), \qquad k=1,2,\ldots,N. \tag{25}$$

Для спектральной характеристики $R_{ij}^{<k>}(1,0)$ функции $R_{ij}^{<k>}(t)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} R_{ij}^{<k>}(1,0)&=\big(E(1,1)\otimes J(0,n)\big)\cdot\big(E(1,1)\otimes X_{ij}(n,n)\big)\cdot\Phi^{<k>}(n+1,0)-\\ &-\big(V(1,2)\odot P^{<k>}(1,0)\big)^{-1}\cdot\big(V(1,2)\odot M_i^{<k>}(1,0)\big)\cdot M_j^{<k>}(1,0), \end{aligned} \tag{26}$$

$i,j=1,2,\ldots,n$, $\quad k=1,2,\ldots,N$.

Данное выражение получено с использованием свойства спектрального преобразования произведения функций времени [4,5], а именно

$$\mathbb{S}\left[\frac{m_i^{<k>}(t)m_j^{<k>}(t)}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}\right]=\big(P^{<k>}(1,1)\big)^{-1}\cdot M_i^{<k>}(1,1)\cdot M_j^{<k>}(1,0),$$

где $P^{<k>}(1,1)$ и $M_i^{<k>}(1,1)$ – спектральные характеристики операторов умножения на функции $\mathbb{P}^{<k>}(t)$ и $m_i^{<k>}(t)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\left\{q(i_0,t)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$, причем $P^{<k>}(1,1)=V(1,2)\odot P^{<k>}(1,0)$ и $M_i^{<k>}(1,1)=V(1,2)\odot M_i^{<k>}(1,0)$; $M_j^{<k>}(1,0)$ – спектральная характеристика функции $m_j^{<k>}(t)$, определенная относительно базисной системы $\left\{q(i_0,t)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$.

Для спектральных характеристик $\tilde{M}_i^{<k>}(1,0)$ и $\tilde{R}_{ij}^{<k>}(1,0)$ функций $\tilde{m}_i^{<k>}(t)$ и $\tilde{R}_{ij}^{<k>}(t)$ соответственно справедливы формулы

$$\tilde{M}_i^{<k>}\left(1,0\right)=\left(E\left(1,1\right)\otimes J\left(0,n\right)\right)\cdot\left(E\left(1,1\right)\otimes X_i\left(n,n\right)\right)\cdot\tilde{\Phi}^{<k>}\left(n+1,0\right), \tag{27}$$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{ij}^{<k>}\left(1,0\right)&=\left(E\left(1,1\right)\otimes J\left(0,n\right)\right)\cdot\left(E\left(1,1\right)\otimes X_{ij}\left(n,n\right)\right)\cdot\tilde{\Phi}^{<k>}\left(n+1,0\right)-\\&-\left(V\left(1,2\right)\odot\tilde{M}_i^{<k>}\left(1,0\right)\right)\cdot\tilde{M}_j^{<k>}\left(1,0\right),\end{aligned} \tag{28}$$

$i,j=1,2,...,n$, $\quad k=1,2,...,N$,

где $\tilde{\Phi}^{<k>}\left(n+1,0\right)$ – спектральная характеристика функции $\tilde{\varphi}^{<k>}\left(t,x\right)$, определенная относительно базисной системы $\left\{e\left(i_0,i_1,...,i_n,t,x\right)\right\}_{i_0,i_1,...,i_n=0}^{\infty}$.

Нетрудно показать, что спектральные характеристики функций $\tilde{m}_i^{<k>}\left(t\right)$ и $m_i^{<k>}\left(t\right)$, а также функций $\tilde{R}_{ij}^{<k>}\left(t\right)$ и $R_{ij}^{<k>}\left(t\right)$ связаны следующими соотношениями:

$$\tilde{M}_i^{<k>}\left(1,0\right)=\left(V\left(1,2\right)\odot P^{<k>}\left(1,0\right)\right)^{-1}\cdot M_i^{<k>}\left(1,0\right),$$

$$\tilde{R}_{ij}^{<k>}\left(1,0\right)=\left(V\left(1,2\right)\odot P^{<k>}\left(1,0\right)\right)^{-1}\cdot R_{ij}^{<k>}\left(1,0\right),$$

$i,j=1,2,...,n$, $\quad k=1,2,...,N$.

Переход от спектральных характеристик $M_i^{<k>}\left(1,0\right)$ и $R_{ij}^{<k>}\left(1,0\right)$ к соответствующим функциям времени осуществляется по формуле (7):

$$m_i^{<k>}\left(t\right)=\mathbb{S}^{-1}\left[M_i^{<k>}\left(1,0\right)\right]=\sum_{i_0=0}^{\infty}M_{i;i_0}^{<k>}\cdot q\left(i_0,t\right), \tag{29}$$

$$R_{ij}^{<k>}\left(t\right)=\mathbb{S}^{-1}\left[R_{ij}^{<k>}\left(1,0\right)\right]=\sum_{i_0=0}^{\infty}R_{ij;i_0}^{<k>}\cdot q\left(i_0,t\right), \tag{30}$$

где $M_{i;i_0}^{<k>}$ и $R_{ij;i_0}^{<k>}$ – элементы спектральных характеристик $M_i^{<k>}\left(1,0\right)$ и $R_{ij}^{<k>}\left(1,0\right)$ соответственно, $t\in T$, $i,j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,N$.

Формулы обращения спектральных характеристик $\tilde{M}_i^{<k>}\left(1,0\right)$ и $\tilde{R}_{ij}^{<k>}\left(1,0\right)$ аналогичны (29), (30), а именно

$$\tilde{m}_i^{<k>}\left(t\right)=\mathbb{S}^{-1}\left[\tilde{M}_i^{<k>}\left(1,0\right)\right]=\sum_{i_0=0}^{\infty}\tilde{M}_{i;i_0}^{<k>}\cdot q\left(i_0,t\right), \tag{31}$$

$$\tilde{R}_{ij}^{<k>}\left(t\right)=\mathbb{S}^{-1}\left[\tilde{R}_{ij}^{<k>}\left(1,0\right)\right]=\sum_{i_0=0}^{\infty}\tilde{R}_{ij;i_0}^{<k>}\cdot q\left(i_0,t\right), \tag{32}$$

где $\tilde{M}_{i;i_0}^{<k>}$ и $\tilde{R}_{ij;i_0}^{<k>}$ – элементы спектральных характеристик $\tilde{M}_i^{<k>}\left(1,0\right)$ и $\tilde{R}_{ij}^{<k>}\left(1,0\right)$ соответственно, $t\in T$, $i,j=1,2,...,n$, $k=1,2,...,N$.

Запишем формулу обращения для спектральной характеристики $P^{<k>}\left(1,0\right)$:

$$\mathbb{P}^{<k>}(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[P^{<k>}(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} P_{i_0}^{<k>} \cdot q(i_0,t), \qquad (33)$$

где $P_{i_0}^{<k>}$ – элементы спектральной характеристики $P^{<k>}(1,0)$, $t \in T$, $k = 1,2,\ldots,N$.

Замечания.

1. В одномерном случае функции $R(t)$, $R^{<k>}(t)$ и $\tilde{R}^{<k>}(t)$ будем обозначать через $D(t)$, $D^{<k>}(t)$ и $\tilde{D}^{<k>}(t)$, а их спектральные характеристики – через $D(1,0)$, $D^{<k>}(1,0)$ и $\tilde{D}^{<k>}(1,0)$ соответственно.

2. Формулы (24), (26)–(28) могут быть записаны с использованием спектральных характеристик линейных функционалов $\mathcal{M}_{x_i}$ и $\mathcal{M}_{x_i x_j}$ (см. (14) и (15)).

3. Как и в случае стохастических систем с фиксированной структурой, можно получить соотношения для спектральных характеристик начальных и центральных моментов любого порядка, причем как взвешенных, так и условных.

Определение маргинальных и условных плотностей вероятности

Пусть $\phi(t,x)$ – плотность вероятности вектора состояния стохастической системы управления, $x \in \Omega = \mathbb{R}^n$. Не ограничивая общности, будем рассматривать маргинальную плотность вероятности

$$\phi_{(1)}\left(t, x_{(1)}\right) = \int_{\mathbb{R}^{n-m}} \phi(t,x)\,dx_{(2)}, \qquad (34)$$

где $1 \le m < n$, $x_{(1)} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_m \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^m$, $x_{(2)} = \begin{bmatrix} x_{m+1} & \ldots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n-m}$, и условную плотность вероятности

$$\phi_{(2|1)}\left(t, x_{(2)} \mid x_{(1)}\right) = \frac{\phi(t,x)}{\phi_{(1)}\left(t, x_{(1)}\right)}. \qquad (35)$$

Будем предполагать, что функции базисной системы $\left\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\right\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ пространства $L_2\left(T \times \mathbb{R}^n\right)$ порождаются всевозможными произведениями функций базисных систем $\left\{q(i_0,t)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$, $\left\{p_{(1)}\left(i_1,i_2,\ldots,i_m,x_{(1)}\right)\right\}_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{\infty}$ и $\left\{p_{(2)}\left(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\right)\right\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$, которые в свою очередь являются базисами пространств $L_2(T)$, $L_2\left(\mathbb{R}^m\right)$ и $L_2\left(\mathbb{R}^{n-m}\right)$ соответственно. Обозначим через $\mathcal{J}_{(2)}$ линейный функционал, определенный на пространстве $L_2\left(\mathbb{R}^{n-m}\right)$, который ставит в соответствие функции $h\left(x_{(2)}\right) \in L_2\left(\mathbb{R}^{n-m}\right)$ значение интеграла $\int_{\mathbb{R}^{n-m}} h\left(x_{(2)}\right)dx_{(2)}$. Следовательно,

$\phi_{(1)}\left(t,x_{(1)}\right)=\mathcal{J}_{(2)}\phi(t,x)$ при фиксированных t и $x_{(1)}$.

Из теоремы 4 и замечания к ней следует, что спектральная характеристика $\Phi_{(1)}(m+1,0)$ функции $\phi_{(1)}\left(t,x_{(1)}\right)$, определенная относительно базисной системы $\left\{q(i_0,t)\,p_{(1)}\left(i_1,\ldots,i_m,x_{(1)}\right)\right\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}$, задается следующим выражением:

$$\Phi_{(1)}(m+1,0)=\left(E(1,1)\otimes E(m,m)\otimes J_{(2)}(0,n-m)\right)\cdot\Phi(n+1,0), \tag{36}$$

где $E(1,1)$ – двумерная единичная матрица, $E(m,m)$ – единичная матрица размерности $2m$, $J_{(2)}(0,n-m)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}_{(2)}$, определенная относительно базисной системы $\left\{p_{(2)}\left(i_{m+1},\ldots,i_n,x_{(2)}\right)\right\}_{i_{m+1},\ldots,i_n=0}^{\infty}$, $\Phi(n+1,0)$ – спектральная характеристика функции $\phi(t,x)$, определенная относительно базисной системы $\left\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\right\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$.

Формула обращения для спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(m+1,0)$ имеет вид:

$$\phi_{(1)}\left(t,x_{(1)}\right)=\mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(1)}(m+1,0)\right]=\sum_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}\Phi_{(1);i_0,i_1,\ldots,i_m}\cdot q(i_0,t)\cdot p_{(1)}\left(i_1,\ldots,i_m,x_{(1)}\right), \tag{37}$$

где $\Phi_{(1);i_0,i_1,\ldots,i_m}$ – элементы спектральной характеристики $\Phi_{(1)}(m+1,0)$, $t\in T$, $x_{(1)}\in\mathbb{R}^m$.

Перейдем к определению спектральной характеристики условной плотности вероятности $\phi_{(2|1)}\left(t,x_{(2)}\,|\,x_{(1)}\right)$. Перепишем формулу (35) в виде $\phi(t,x)=\phi_{(1)}\left(t,x_{(1)}\right)\phi_{(2|1)}\left(t,x_{(2)}\,|\,x_{(1)}\right)$ и применим спектральное преобразование к левой и правой части полученного выражения. Тогда из свойства спектрального преобразования произведения функций следует, что

$$\Phi(n+1,0)=\Phi_{(1)}(n+1,n+1)\cdot\Phi_{(2|1)}(n+1,0),$$

где $\Phi_{(1)}(n+1,n+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\phi_{(1)}\left(t,x_{(1)}\right)$, определенная относительно базисной системы $\left\{e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x)\right\}_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty}$, $\Phi_{(2|1)}(n+1,0)$ – спектральная характеристика функции $\phi_{(2|1)}\left(t,x_{(2)}\,|\,x_{(1)}\right)$, определенная относительно той же базисной системы. Функция $\phi_{(1)}\left(t,x_{(1)}\right)$ не зависит от $x_{(2)}$, поэтому $\Phi_{(1)}(n+1,n+1)=\Phi_{(1)}(m+1,m+1)\otimes E(n-m,n-m)$, где $\Phi_{(1)}(m+1,m+1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $\phi_{(1)}\left(t,x_{(1)}\right)$, определенная относительно базисной системы $\left\{q(i_0,t)\,p_{(1)}\left(i_1,\ldots,i_m,x_{(1)}\right)\right\}_{i_0,i_1,\ldots,i_m=0}^{\infty}$, $E(n-m,n-m)$ – единичная матрица размерности $2(n-m)$. Спектральная характеристика $\Phi_{(1)}(m+1,m+1)$ в свою очередь выражается через спектральную характеристику $\Phi_{(1)}(m+1,0)$ [4,5]:

$$\Phi_{(1)}(m+1,m+1) = \left(V(1,2) \otimes \tilde{V}(m,2m)\right) \odot \Phi_{(1)}(m+1,0),$$

где $V(1,2)$ – спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\left\{q(i_0,t)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$, а $\tilde{V}(m,2m)$ – спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\left\{p_{(1)}\left(i_1,i_2,\ldots,i_m,x_{(1)}\right)\right\}_{i_1,i_2,\ldots,i_m=0}^{\infty}$. Таким образом,

$$\Phi(n+1,0) = \left(\left(\left(V(1,2) \otimes \tilde{V}(m,2m)\right) \odot \Phi_{(1)}(m+1,0)\right) \otimes E(n-m,n-m)\right) \cdot \Phi_{(2|1)}(n+1,0)$$

и, следовательно,

$$\Phi_{(2|1)}(n+1,0) = \left(\left(\left(V(1,2) \otimes \tilde{V}(m,2m)\right) \odot \Phi_{(1)}(m+1,0)\right) \otimes E(n-m,n-m)\right)^{-1} \cdot \Phi(n+1,0).$$

Учитывая свойства операций над многомерными матрицами, окончательно получаем выражение для спектральной характеристики условной плотности вероятности:

$$\Phi_{(2|1)}(n+1,0) = \left(\left(\left(V(1,2) \otimes \tilde{V}(m,2m)\right) \odot \Phi_{(1)}(m+1,0)\right)^{-1} \otimes E(n-m,n-m)\right) \cdot \Phi(n+1,0). \quad (38)$$

Для перехода от спектральной характеристики $\Phi_{(2|1)}(n+1,0)$ к функции $\phi_{(2|1)}\left(t,x_{(2)} \mid x_{(1)}\right)$ применяется формула обращения

$$\phi_{(2|1)}\left(t,x_{(2)} \mid x_{(1)}\right) = \mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{(2|1)}(n+1,0)\right] = \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_n=0}^{\infty} \Phi_{(2|1);i_0 i_1 \ldots i_n} \cdot e(i_0,i_1,\ldots,i_n,t,x), \quad (39)$$

где $\Phi_{(2|1);i_0 i_1 \ldots i_n}$ – элементы спектральной характеристики $\Phi_{(2|1)}(n+1,0)$, $t \in T$, $x_{(1)} \in \mathbb{R}^m$, $x_{(2)} \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Пример 6. Найдем выражения для спектральных характеристик маргинальной плотности вероятности $\phi_1(t,x_1)$ и условной плотности вероятности $\phi_{2|1}(t,x_2 \mid x_1)$ по известной спектральной характеристике плотности вероятности $\phi(t,x_1,x_2)$ вектора состояния двумерной стохастической системы.

Пусть $\left\{q(i_0,t)\right\}_{i_0=0}^{\infty}$ – базис пространства $L_2(T)$, а $\left\{p_1(i_1,x_1)\right\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\left\{p_2(i_2,x_2)\right\}_{i_2=0}^{\infty}$ – базисы пространства $L_2(\mathbb{R})$. В рассматриваемом примере $\phi_1(t,x_1) = \int_{\mathbb{R}} \phi(t,x_1,x_2)\,dx_2$, $\phi_{2|1}(t,x_2 \mid x_1) = \dfrac{\phi(t,x_1,x_2)}{\phi_1(t,x_1)}$, поэтому соотношения (36) и (38) примут вид:

$$\Phi_1(2,0) = \left(E(1,1) \otimes E(1,1) \otimes J_2(0,1)\right) \cdot \Phi(3,0),$$

где $\Phi_1(2,0)$ – спектральная характеристика функции $\phi_1(t,x_1)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\,p_1(i_1,x_1)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$, $J_2(0,1)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}_2$ (см. пример 2), определенная относительно базисной системы $\{p_2(i_2,x_2)\}_{i_2=0}^{\infty}$, $\Phi(3,0)$ – спектральная характеристика функции $\phi(t,x_1,x_2)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\,p_1(i_1,x_1)\,p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$;

$$\Phi_{2|1}(3,0)=\left(\left(\left(V(1,2)\otimes\tilde{V}(1,2)\right)\odot\Phi_1(2,0)\right)^{-1}\otimes E(1,1)\right)\cdot\Phi(3,0),$$

где $\Phi_{2|1}(3,0)$ – спектральная характеристика функции $\phi_{2|1}(t,x_2\,|\,x_1)$, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\,p_1(i_1,x_1)\,p_2(i_2,x_2)\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$, $V(1,2)$ – спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{q(i_0,t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, а $\tilde{V}(1,2)$ – спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно базисной системы $\{p_1(i_1,x_1)\}_{i_1=0}^{\infty}$.

Переход от спектральных характеристик $\Phi_1(2,0)$ и $\Phi_{2|1}(3,0)$ к соответствующим плотностям вероятности осуществляется по формулам обращения (37), (39):

$$\phi_1(t,x_1)=\mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_1(2,0)\right]=\sum_{i_0,i_1=0}^{\infty}\Phi_{1;i_0,i_1}\cdot q(i_0,t)\cdot p_1(i_1,x_1),$$

$$\phi_{2|1}(t,x_2\,|\,x_1)=\mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_{2|1}(3,0)\right]=\sum_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}\Phi_{2|1;i_0i_1i_2}\cdot q(i_0,t)\cdot p_1(i_1,x_1)\cdot p_2(i_2,x_2),$$

где $\Phi_{1;i_0,i_1}$ и $\Phi_{2|1;i_0i_1i_2}$ – элементы спектральных характеристик $\Phi_1(2,0)$ и $\Phi_{2|1}(3,0)$ соответственно, $t\in T$, $x_1,x_2\in\mathbb{R}$. $\triangleleft$

Замечание. Соотношения (34)–(39) с точностью до обозначений справедливы для маргинальных и условных плотностей вероятности вектора состояния систем управления со случайными изменениями структуры.

Примеры вероятностного анализа стохастических систем

Приведем примеры вероятностного анализа стохастической системы с фиксированной структурой и системы со случайными изменениями структуры с использованием спектральной формы математического описания систем управления.

Замечание. При решении задач анализа и синтеза спектральным методом на вычислительных машинах можно оперировать только с конечными матрицами, поэтому спектральные характеристики функций, линейных операторов и линейных функционалов усекаются по всем измерениям бесконечного порядка до некоторого порядка L, называемого порядком усечения. Методика вычисления погрешности расчета, обусловленной усечением матриц, приведена в [3–5].

Пример 7. Рассмотрим задачу вероятностного анализа линейной стационарной детерминированной системы второго порядка, заданной уравнением $\ddot{X} + X = 0$, где $t \in T = [0, 2\pi]$, $X \in \mathbb{R}$, с начальным условием $X(0) = X_0$, $\dot{X}(0) = \dot{X}_0$, причем X_0 и $\dot{X}_0$ – независимые случайные величины, имеющие гауссовское распределение с математическим ожиданием $m = 1$ и дисперсией $D = 1/2$.

Поскольку начальное условие для рассматриваемой системы является случайной величиной, решение $X(t)$ представляет собой случайный процесс, следовательно, задача состоит в нахождении плотности вероятности состояния системы. Отметим, что данная задача относится к классу задач анализа систем управления ансамблем траекторий [8].

Сделаем замену переменных. Пусть $X_1 = X$, а $X_2 = \dot{X}$, тогда исходное дифференциальное уравнение сводится к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = X_2, \\ \dot{X}_2 = -X_1, \end{cases}$$

начальные условия для которой определяются выражениями $X_1(0) = X_0$ и $X_2(0) = \dot{X}_0$. Эту систему можно рассматривать как частный случай двумерной стохастической системы с функцией сноса $f(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{bmatrix}$ и нулевой матрицей диффузии [14], т.е. $g(t, x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Следовательно, плотность вероятности $\phi(t, x_1, x_2)$ вектора $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка-Колмогорова [14,19]

$$\frac{\partial \phi(t, x_1, x_2)}{\partial t} = -x_2 \frac{\partial \phi(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \phi(t, x_1, x_2)}{\partial x_2}$$

с начальным условием $\phi(0, x_1, x_2) = \dfrac{1}{\pi} \exp\left(-(x_1 - 1)^2 - (x_2 - 1)^2 \right)$ и нулевыми краевыми условиями.

Выберем в качестве базисной системы пространства $L_2(T)$ полиномы Лежандра $\left\{ P_{i_0}(t) \right\}_{i_0=0}^{\infty}$ [4,5], а для пространства $L_2(\mathbb{R})$ – функции Эрмита $\left\{ \Phi_{i_1}(x_1) \right\}_{i_1=0}^{\infty}$ и $\left\{ \Phi_{i_2}(x_2) \right\}_{i_2=0}^{\infty}$ с параметрами $m = 0$ и $D = \dfrac{1}{2}$ [13,15].

Пусть $P(1,1)$ – двумерная нестационарная передаточная функция дифференцирующего звена первого рода, определенная относительно системы полиномов Лежандра [4,5], $q(1,0;0)$ – вектор значений функций этой системы при $t=0$; $\mathcal{P}(1,1)$ – двумерная нестационарная передаточная функция дифференцирующего звена второго рода, определенная относительно системы функций Эрмита [13]; $F_1(3,3)$ и $F_2(3,3)$ – спектральные характеристики операторов умножения на функции $f_1(t,x_1,x_2)=x_2$ и $f_2(t,x_1,x_2)=-x_1$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\left\{P_{i_0}(t)\Phi_{i_1}(x_1)\Phi_{i_2}(x_2)\right\}_{i_0,i_1,i_2=0}^{\infty}$, $\Phi(3,0)$ – спектральная характеристика плотности вероятности $\phi(t,x_1,x_2)$, определенная относительно той же базисной системы, а $\Phi_0(2,0)$ – спектральная характеристика начальной плотности вероятности $\phi(0,x_1,x_2)$, определенная относительно базисной системы $\left\{\Phi_{i_1}(x_1)\Phi_{i_2}(x_2)\right\}_{i_1,i_2=0}^{\infty}$. Применяя спектральное преобразование к левой и правой части уравнения Фоккера-Планка-Колмогорова с учетом начальных и краевых условий [1,2] и принимая во внимание тот факт, что матрица двумерной нестационарной передаточной функции дифференцирующего звена второго рода, определенной относительно системы функций Эрмита, является кососимметрической [13], получаем уравнение обобщенной характеристической функции [2,3]:

$$
\begin{aligned}
&P^t(3,3)\cdot\Phi(3,0)-q(1,0;0)\otimes\Phi_0(2,0)=\\
&\qquad=-P_1^x(3,3)\cdot F_1(3,3)\cdot\Phi(3,0)-P_2^x(3,3)\cdot F_2(3,3)\cdot\Phi(3,0),
\end{aligned}
$$

где спектральные характеристики операторов дифференцирования первого порядка по времени и координатам x_1 и x_2 задаются соотношениями

$$P^t(3,3)=P(1,1)\otimes E(1,1)\otimes E(1,1),$$

$$P_1^x(3,3)=E(1,1)\otimes\mathcal{P}(1,1)\otimes E(1,1),\qquad P_2^x(3,3)=E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes\mathcal{P}(1,1).$$

Выражая из полученного уравнения неизвестную спектральную характеристику $\Phi(3,0)$, получаем следующее выражение:

$$\Phi(3,0)=\left(P^t(3,3)+P_1^x(3,3)\cdot F_1(3,3)+P_2^x(3,3)\cdot F_2(3,3)\right)^{-1}\cdot\left(q(1,0;0)\otimes\Phi_0(2,0)\right).$$

Так как состоянием исходной системы является координата X_1, то необходимо найти маргинальную плотность вероятности $\phi_1(t,x_1)=\int_{\mathbb{R}}\phi(t,x_1,x_2)\,dx_2$, причем спектральную характеристику $\Phi_1(2,0)$ функции $\phi_1(t,x_1)$ можно выразить через спектральную характеристику $\Phi(3,0)$, используя теорему 4 и результаты, полученные в примере 6. Тогда

$$\Phi_1(2,0)=\left(E(1,1)\otimes E(1,1)\otimes J_2(0,1)\right)\cdot\Phi(3,0),$$

где $J_2(0,1)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}_2$ (см. пример 2), определенная относительно системы функций Эрмита. По формуле обращения получаем, что

$$\phi_1(t,x_1)=\mathbb{S}^{-1}\left[\Phi_2(2,0)\right]=\sum_{i_0,i_1=0}^{\infty}\Phi'_{i_0i_1}\cdot P_{i_0}(t)\cdot\Phi_{i_1}(x_1),$$

где $\Phi'_{i_0i_1}$ – элементы спектральной характеристики $\Phi_1(2,0)$, $t\in T$, $x_1\in\mathbb{R}$.

График функции $\phi_1(t,x_1)$ и графики ее сечений при различных значениях переменной времени t изображены на рис. 1 и 2 соответственно (порядок усечения спектральных характеристик равен восьми).

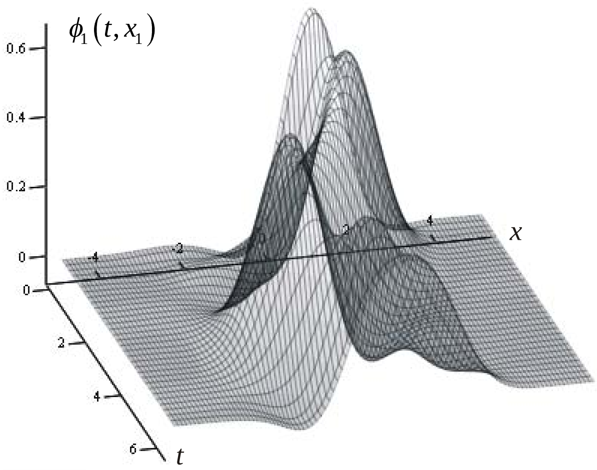

Рис. 1. Плотность вероятности состояния системы.

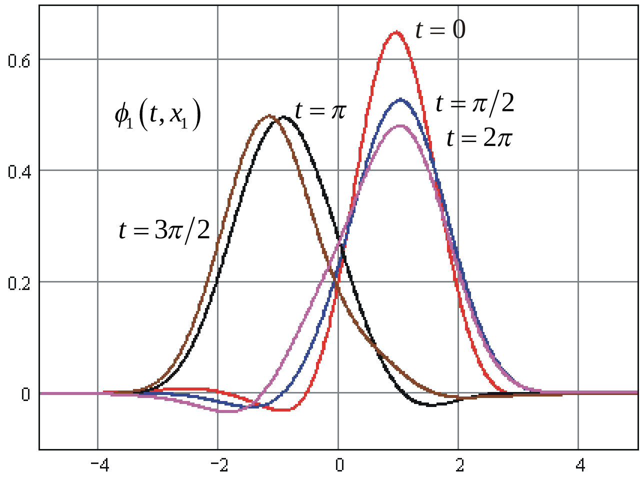

Рис. 2. Плотность вероятности состояния системы в различные моменты времени.

Вычислим математическое ожидание состояния системы $m(t)=\mathbb{M}\left[X_1(t)\right]$, для этого воспользуемся результатами, полученными в примере 5:

$$M(1,0)=\left(E(1,1)\otimes J_1(0,1)\right)\cdot\left(E(1,1)\otimes X_1(1,1)\right)\cdot\Phi_1(2,0),$$

где $M(1,0)$ – спектральная характеристика функции $m(t)$, определенная относительно системы полиномов Лежандра, $J_1(0,1)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}_1$ (см. пример 2), определенная относительно системы функций Эрмита, а $X_1(1,1)$ – спектральная характеристика оператора умножения на функцию $a(x_1)=x_1$, также определенная относительно системы функций Эрмита.

Переход от спектральной характеристики $M(1,0)$ к соответствующей функции времени осуществляется по формуле (7):

$$m(t)=\mathbb{S}^{-1}\left[M(1,0)\right]=\sum_{i_0=0}^{\infty}M_{i_0}\cdot P_{i_0}(t),$$

где M_{i_0} – элементы спектральной характеристики $M(1,0)$, $t\in T$.

Для проверки точности проведенных расчетов определим функцию $m(t)$ другим способом. Найдем математическое ожидание левой и правой части уравнения $\ddot{X}+X=0$, тогда $\ddot{m}+m=0$. Аналогичным образом можно получить начальные условия, а именно $m(0)=1$, $\dot{m}(0)=1$. Интегрируя дифференциальное уравнение $\ddot{m}+m=0$ с учетом начальных условий, получаем выражение для математического ожидания состояния системы:

$m(t)=\cos t+\sin t$.

На рис. 3 сплошной линией изображен график математического ожидания, полученного спектральным методом, а пунктиром – график функции $m(t)=\cos t+\sin t$. Как видно из результатов, спектральный метод обеспечивает достаточную точность даже при небольших порядках усечения спектральных характеристик.

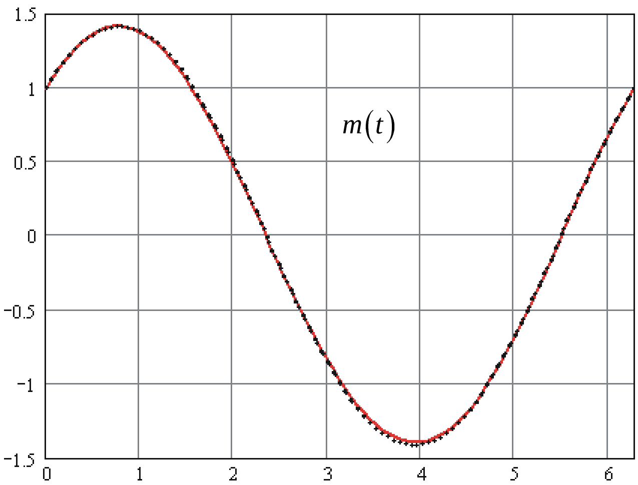

Рис. 3. Математическое ожидание состояния системы.

◁

Пример 8. Найдем ненормированные плотности вероятности и моментные характеристики состояния одномерной системы стабилизации [17]. Первая структура этой системы изображена на рис. 4.

При выходе координаты X из множества $[-\Delta_0,\Delta_0]$ возможен срыв стабилизации и переход в режим поиска (рис. 5), причем интенсивность этого перехода постоянна и равна c_1.

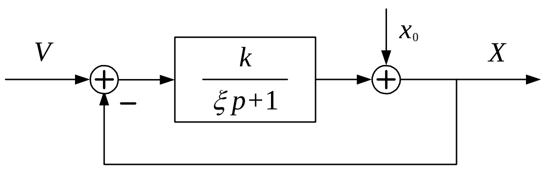

Рис. 4. Первая структура системы стабилизации.

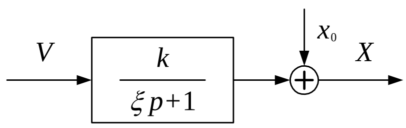

Рис. 5. Вторая структура системы стабилизации.

В режиме поиска при попадании координаты X в область $[-\Delta,\Delta]$, где $\Delta>\Delta_0$, система может перейти обратно в первое состояние, таким образом, осуществляется захват сигнала.

Интенсивность захвата также постоянна и равна c_2.

На рис. 4 и 5 используются следующие обозначения: V – стандартный гауссовский белый шум; k, ξ, x_0 – числовые параметры. Отрезок времени функционирования системы $T=[0,1]$. Распределение начального состояния $X(0)=X_0$ определяется ненормированными плотностями вероятности $\phi_0^{<1>}(x)=\alpha\phi_N(x)$, $\phi_0^{<2>}(x)=(1-\alpha)\phi_N(x)$, где $\phi_N(x)$ – плотность вероятности стандартной гауссовской случайной величины, $0\le\alpha\le 1$.

Изменение состояния системы стабилизации для первой структуры описывается стохастическим дифференциальным уравнением $dX=\left(-\dfrac{k+1}{\xi}X(t)+\dfrac{x_0}{\xi}\right)+\dfrac{k}{\xi}dW$ (см. рис. 4). Так как переход в состояние поиска происходит вне отрезка $[-\Delta_0,\Delta_0]$ с интенсивностью c_1, то соответствующая функция поглощения [16–18] имеет вид $b_{12}(t,x)=c_1\left(1-\mathbb{I}_{[-\Delta_0,\Delta_0]}(x)\right)\phi^{<1>}(t,x)$, где $\mathbb{I}_{[-\Delta_0,\Delta_0]}(x)$ – индикатор множества $[-\Delta_0,\Delta_0]$ (см. [10]), $\phi^{<1>}(t,x)$ – ненормированная плотность вероятности состояния для первой структуры.

Для второй структуры справедливо уравнение $dX=\left(-\dfrac{1}{\xi}X(t)+\dfrac{x_0}{\xi}\right)+\dfrac{k}{\xi}dW$ (см. рис. 5). Функция поглощения, характеризующая обратный переход в состояние захвата, задается формулой $b_{21}(t,x)=c_2\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x)\phi^{<2>}(t,x)$, где $\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x)$ – индикатор множества $[-\Delta,\Delta]$, $\phi^{<2>}(t,x)$ – ненормированная плотность вероятности состояния для второй структуры.

Ненормированные плотности вероятности $\phi^{<1>}(t,x)$ и $\phi^{<2>}(t,x)$ удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова [16–18], которые в рассматриваемом случае записываются следующим образом:

$$\frac{\partial\phi^{<1>}(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{\xi}\frac{\partial\left(\left((k+1)x-x_0\right)\phi^{<1>}(t,x)\right)}{\partial x}+\frac{k^2}{2\xi^2}\frac{\partial^2\phi^{<1>}(t,x)}{\partial x^2}-$$
$$-c_1\left(1-\mathbb{I}_{[-\Delta_0,\Delta_0]}(x)\right)\phi^{<1>}(t,x)+c_2\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x)\phi^{<2>}(t,x),$$

$$\frac{\partial\phi^{<2>}(t,x)}{\partial t}=\frac{1}{\xi}\frac{\partial\left((x-x_0)\phi^{<2>}(t,x)\right)}{\partial x}+\frac{k^2}{2\xi^2}\frac{\partial^2\phi^{<2>}(t,x)}{\partial x^2}-$$
$$-c_2\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x)\phi^{<2>}(t,x)+c_1\left(1-\mathbb{I}_{[-\Delta_0,\Delta_0]}(x)\right)\phi^{<1>}(t,x).$$

Данные уравнения следует интегрировать с начальными условиями $\phi^{<1>}(0,x)=\dfrac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$, $\phi^{<2>}(0,x)=\dfrac{1-\alpha}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ и краевым условием $\phi^{<1>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty}=\phi^{<2>}(t,x)\big|_{x=\pm\infty}=0$.

Выберем в качестве базисной системы пространства $L_2(T)$ полиномы Лежандра $\{P_{i_0}(t)\}_{i_0=0}^{\infty}$, а для пространства $L_2(\mathbb{R})$ – функции Эрмита $\{\Phi_{i_1}(x)\}_{i_1=0}^{\infty}$ с параметрами $m=0$ и $D=1$. Пусть $P(1,1)$ – двумерная нестационарная передаточная функция дифференцирующего звена первого рода, определенная относительно системы полиномов Лежандра, $q(1,0;0)$ – вектор значений функций этой системы при $t=0$; $\mathcal{P}(1,1)$ – двумерная нестационарная передаточная функция дифференцирующего звена второго рода, определенная относительно системы функций Эрмита; $X(1,1)$, $I_1(1,1)$ и $I_2(1,1)$ – спектральные характеристики операторов умножения на функции $a(x)=x$, $\mathbb{I}_{[-\Delta_0,\Delta_0]}(x)$ и $\mathbb{I}_{[-\Delta,\Delta]}(x)$ соответственно, а $\Phi_N(1,0)$ – спектральная характеристика функции $\phi_N(x)$. Спектральные характеристики $X(1,1)$, $I_1(1,1)$, $I_2(1,1)$ и $\Phi_N(1,0)$ определены относительно системы функций Эрмита; $\Phi^{<1>}(2,0)$ и $\Phi^{<2>}(2,0)$ – спектральные характеристики функций $\phi^{<1>}(t,x)$ и $\phi^{<2>}(t,x)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\{P_{i_0}(t)\Phi_{i_1}(x)\}_{i_0,i_1=0}^{\infty}$.

Запишем уравнения обобщенных характеристических функций для рассматриваемой системы стабилизации [6]:

$$\begin{cases} P^t(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)-A_{11}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)-A_{12}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)=q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0), \\ P^t(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)-A_{21}(2,2)\cdot\Phi^{<1>}(2,0)-A_{22}(2,2)\cdot\Phi^{<2>}(2,0)=q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0), \end{cases}$$

где

$$P^t(2,2)=P(1,1)\otimes E(1,1),$$

$$A_{11}(2,2)=-\big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}(1,1)\big)\cdot\left(E(1,1)\otimes\left(-\frac{k+1}{\xi}X(1,1)+\frac{x_0}{\xi}E(1,1)\right)\right)+$$
$$+\frac{k^2}{2\xi^2}\big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}^2(1,1)\big)-c_1\Big(E(1,1)\otimes\big(E(1,1)-I_1(1,1)\big)\Big),$$

$$A_{12}(2,2)=c_2\big(E(1,1)\otimes I_2(1,1)\big),\qquad A_{21}(2,2)=c_1\Big(E(1,1)\otimes\big(E(1,1)-I_1(1,1)\big)\Big),$$

$$A_{11}(2,2)=-\big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}(1,1)\big)\cdot\left(E(1,1)\otimes\left(-\frac{1}{\xi}X(1,1)+\frac{x_0}{\xi}E(1,1)\right)\right)+$$
$$+\frac{k^2}{2\xi^2}\big(E(1,1)\otimes\mathcal{P}^2(1,1)\big)-c_2\big(E(1,1)\otimes I_2(1,1)\big),$$

$$\Phi_0^{<1>}(1,0)=\alpha\Phi_N(1,0),\qquad \Phi_0^{<2>}(1,0)=(1-\alpha)\Phi_N(1,0).$$

Известно [6], что решение полученной системы уравнений определяется следующим образом:

$$\Phi^{<1>}(2,0)=\left(Z_{11}(2,2)-\Gamma_1(2,2)\cdot Z_{21}(2,2)\right)^{-1}\cdot\left(q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0)-\Gamma_1(2,2)\cdot\left(q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0)\right)\right),$$
$$\Phi^{<2>}(2,0)=\left(Z_{22}(2,2)-\Gamma_2(2,2)\cdot Z_{12}(2,2)\right)^{-1}\cdot\left(q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<2>}(1,0)-\Gamma_2(2,2)\cdot\left(q(1,0;0)\otimes\Phi_0^{<1>}(1,0)\right)\right),$$

где

$$Z_{11}(2,2)=P^t(2,2)-A_{11}(2,2),\qquad Z_{12}(2,2)=-A_{12}(2,2),\qquad Z_{21}(2,2)=-A_{21}(2,2),$$
$$Z_{22}(2,2)=P^t(2,2)-A_{22}(2,2),\qquad \Gamma_1(2,2)=Z_{12}(2,2)\cdot Z_{22}^{-1}(2,2),\qquad \Gamma_2(2,2)=Z_{21}(2,2)\cdot Z_{11}^{-1}(2,2).$$

Переход от спектральных характеристик $\Phi^{<1>}(2,0)$ и $\Phi^{<2>}(2,0)$ к соответствующим плотностям вероятности осуществляется по формуле обращения:

$$\phi^{<k>}(t,x)=\mathbb{S}^{-1}\left[\Phi^{<k>}(2,0)\right]=\sum_{i_0,i_1=0}^{\infty}\Phi_{i_0 i_1}^{<k>}\cdot P_{i_0}(t)\cdot\Phi_{i_1}(x),$$

где $\Phi_{i_0 i_1}^{<k>}$ – элементы спектральной характеристики $\Phi^{<k>}(2,0)$, $t\in T$, $x\in\mathbb{R}$, $k=1,2$.

На рис. 6–9 изображены графики функций $\phi^{<1>}(t,x)$, $\phi^{<2>}(t,x)$ и их сечений при различных значениях переменной времени t (порядок усечения спектральных характеристик равен шестнадцати), причем при расчете были выбраны следующие параметры системы стабилизации: $\alpha=0.7$, $k=1.4$, $x_0=2$, $\xi=0.5$, $\Delta_0=2$, $\Delta=2.5$, $c_1=2$, $c_2=0.4$.

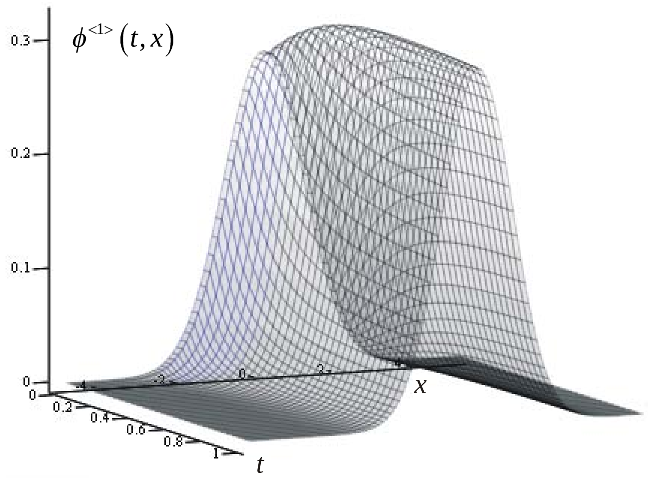

Рис. 6. Плотность вероятности состояния системы стабилизации в режиме захвата.

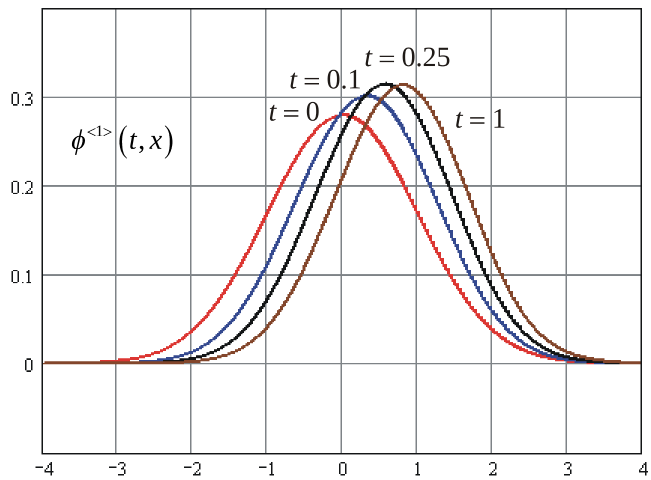

Рис. 7. Плотность вероятности состояния системы стабилизации в режиме захвата при различных значениях переменной времени.

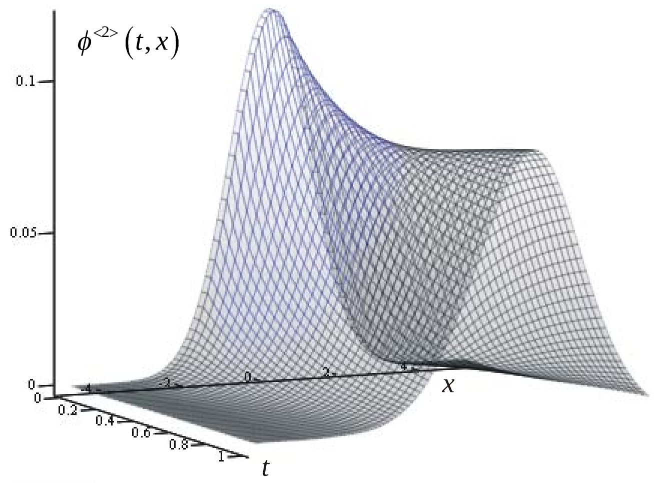

Рис. 8. Плотность вероятности состояния системы стабилизации в режиме поиска.

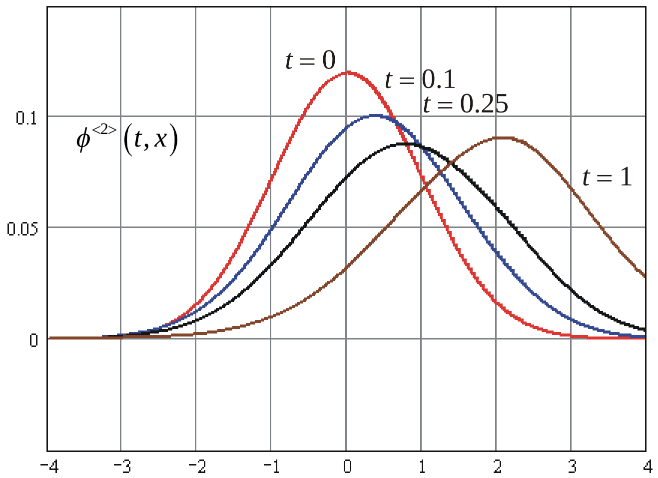

Рис. 9. Плотность вероятности состояния системы стабилизации в режиме поиска при различных значениях переменной времени.

Перейдем к определению вероятностей работы структур и взвешенных моментных характеристик. Воспользуемся формулой (25), тогда спектральные характеристики функций $\mathbb{P}^{<1>}(t)$ и $\mathbb{P}^{<2>}(t)$ определяются соотношением

$$P^{<k>}(1,0)=\left(E(1,1)\otimes J(0,1)\right)\cdot\Phi^{<k>}(2,0),\qquad k=1,2,$$

где $J(0,1)$ – спектральная характеристика функционала $\mathcal{J}$ (см. примеры 1 и 5), определенная относительно системы функций Эрмита.

Для перехода от спектральных характеристик $P^{<1>}(1,0)$ и $P^{<2>}(1,0)$ к соответствующим функциям времени используется формула обращения (33):

$$\mathbb{P}^{<k>}(t)=\mathbb{S}^{-1}\left[P^{<k>}(1,0)\right]=\sum_{i_0=0}^{\infty}P_{i_0}^{<k>}\cdot P_{i_0}(t),$$

где $P_{i_0}^{<k>}$ – элементы спектральной характеристики $P^{<k>}(1,0)$, $t\in T$, $k=1,2$.

На рис. 10 изображены графики вероятностей работы структур, полученных спектральным методом (сплошная линия) и методом ортогонального разложения (пунктир) [20].

Спектральные характеристики взвешенных математического ожидания и дисперсии состояния системы стабилизации определяются соотношениями (24) и (26), которые в данном случае принимают вид:

$$M^{<k>}(1,0)=\left(E(1,1)\otimes J(0,1)\right)\cdot\left(E(1,1)\otimes X(1,1)\right)\cdot\Phi^{<k>}(2,0),$$

$$D^{<k>}(1,0)=\left(E(1,1)\otimes J(0,1)\right)\cdot\left(E(1,1)\otimes X^2(1,1)\right)\cdot\Phi^{<k>}(2,0)-$$
$$-\left(V(1,2)\odot P^{<k>}(1,0)\right)^{-1}\cdot\left(V(1,2)\odot M^{<k>}(1,0)\right)\cdot M^{<k>}(1,0),$$

где $V(1,2)$ – спектральная характеристика множительного звена, определенная относительно системы полиномов Лежандра, $k=1,2$.

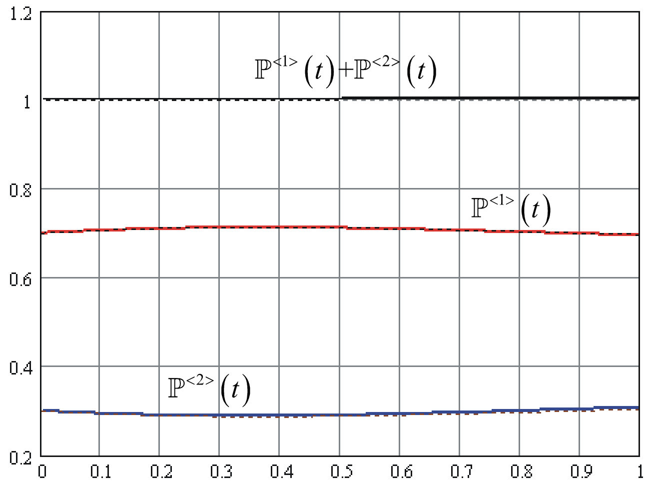

Рис. 10. Вероятности работы системы стабилизации
в режимах захвата и поиска.

Переход от спектральных характеристик $M^{<k>}(1,0)$ и $D^{<k>}(1,0)$ к соответствующим функциям времени осуществляется по формулам обращения:

$$m^{<k>}(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[M^{<k>}(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} M_{i_0}^{<k>} \cdot P_{i_0}(t),$$

$$D^{<k>}(t) = \mathbb{S}^{-1}\left[D^{<k>}(1,0)\right] = \sum_{i_0=0}^{\infty} D_{i_0}^{<k>} \cdot P_{i_0}(t),$$

где $M_{i_0}^{<k>}$ и $D_{i_0}^{<k>}$ – элементы спектральных характеристик $M^{<k>}(1,0)$ и $D^{<k>}(1,0)$ соответственно, $k = 1,2$.

Математическое ожидание и дисперсия состояния системы стабилизации определяются выражениями $m(t) = m^{<1>}(t) + m^{<2>}(t)$ и $D(t) = \sum_{k=1}^{2}\left[D^{<k>}(t) + \frac{\left(m^{<k>}(t)\right)^2}{\mathbb{P}^{<k>}(t)}\right] - m^2(t)$.

Графики взвешенных моментных характеристик состояния системы стабилизации и графики функций $m(t)$ и $D(t)$ показаны на рис. 11 и 12, причем сплошной линией изображены графики функций, полученных спектральным методом, а пунктиром – графики функций, полученных методом ортогонального разложения.

На рис. 10 и 11 видно, что графики функций, полученных спектральным методом и методом ортогонального разложения, практически совпадают, а на рис. 12 заметны расхождения. Это объясняется тем, что дисперсия не может быть представлена в виде значения линейного функционала (см. (11), (20) и (23)), что приводит к необходимости использования свойства спектрального преобразования произведения функций, или недостаточной точностью метода ортогонального разложения. Тем не менее, точность вычислений может быть повышена посредством увеличения порядка усечения спектральных характеристик.

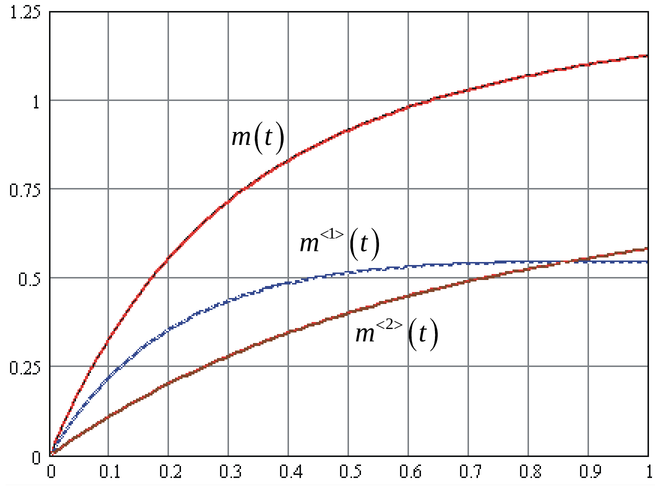

Рис. 11. Математическое ожидание состояния системы стабилизации.

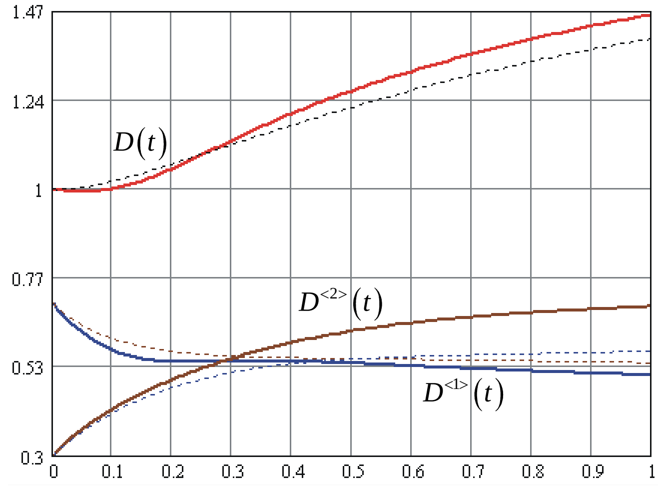

Рис. 12. Дисперсия состояния системы стабилизации.

$\triangleleft$

Замечание. Все расчеты проводились с помощью специализированного программного обеспечения спектрального метода анализа и синтеза систем управления Spectrum [21].

Приложение 1

Многомерные матрицы

Пусть m_1 и m_2 – заданные натуральные числа, $M = m_1 + m_2$. Каждый из индексов $i_1, i_2, ..., i_{m_1}$, $j_1, j_2, ..., j_{m_2}$ пробегает бесконечный ряд целых неотрицательных чисел, т.е.

$$i_1 = 0,1,2,..., \quad i_2 = 0,1,2,..., \quad ..., \quad i_{m_1} = 0,1,2,...,$$
$$j_1 = 0,1,2,..., \quad j_2 = 0,1,2,..., \quad ..., \quad j_{m_2} = 0,1,2,...$$

Упорядоченная совокупность в общем случае комплексных чисел $A_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}$ называется многомерной матрицей размерности M, имеющей m_1 строчных и m_2 столбцовых индексов, и обозначается $A(m_1, m_2)$ или $\left(A_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}\right)$. Таким образом, первые m_1 индексов являются строчными, а остальные – столбцовыми. Числа $A_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}$ называются элементами многомерной матрицы.

Разделение множества индексов на строчные и столбцовые позволяет задать структуру многомерной матрицы. Например, упорядоченную совокупность чисел $X_0, X_1, X_2, ...$ можно интерпретировать как матрицу–столбец, тогда в принятых обозначениях $X(1,0) = \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$. Эту же совокупность чисел можно рассматривать как матрицу–строку, и тогда

$X(0,1)=\begin{bmatrix} X_0 & X_1 & X_2 & \cdots \end{bmatrix}$.

Двумерная матрица $A(1,1)$ представляется в виде прямоугольной таблицы чисел, т.е. $A(1,1)=\begin{bmatrix} A_{00} & A_{01} & A_{02} & \cdots \\ A_{10} & A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{20} & A_{21} & A_{22} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$. Способ представления многомерных матриц в случае, когда количество строчных или столбцовых индексов больше единицы, изложен в [12].

Если элементы многомерной матрицы $A(m_1,m_2)$ являются функциями времени, то эту зависимость целесообразно указывать в обозначении матрицы, отделяя переменную t от количества строчных и столбцовых индексов точкой с запятой, т.е. $A(m_1,m_2;t)$.

Многомерная матрица $A(m_1,m_2)$, у которой количество строчных и столбцовых индексов совпадает, т.е. $m_1=m_2$, называется гиперквадратной. Многомерная матрица $A(m_1,m_2)$ называется гиперстрочной, если все ее индексы являются столбцовыми, т.е. $m_1=0$, и гиперстолбцовой, если все ее индексы строчные, т.е. $m_2=0$. Матрицу вида $A(0,0)$ следует понимать как число.

Рассмотрим основные операции над многомерными матрицами.

1. Суммой (разностью) многомерных матриц $A(m_1,m_2)=\left(A_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}\right)$ и $B(m_1,m_2)=\left(B_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}\right)$ называется многомерная матрица $C(m_1,m_2)=\left(C_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}\right)$, т.е. $C(m_1,m_2)=A(m_1,m_2)+B(m_1,m_2)$ $\left(C(m_1,m_2)=A(m_1,m_2)-B(m_1,m_2)\right)$, если

$C_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}=A_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}+B_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}$ $\left(C_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}=A_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}-B_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}\right)$

для всех $i_1,i_2,\ldots,i_{m_1}=0,1,2,\ldots$, $j_1,j_2,\ldots,j_{m_2}=0,1,2,\ldots$

2. Произведением многомерной матрицы $A(m_1,m_2)=\left(A_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}\right)$ на число α называется многомерная матрица $B(m_1,m_2)=\left(B_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}\right)$, т.е. $B(m_1,m_2)=\alpha A(m_1,m_2)$, если $B_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}=\alpha A_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}$ для всех $i_1,i_2,\ldots,i_{m_1}=0,1,2,\ldots$, $j_1,j_2,\ldots,j_{m_2}=0,1,2,\ldots$

3. Произведением многомерных матриц $A(m_1,m_3)=\left(A_{i_1i_2\ldots i_{m_1}k_1k_2\ldots k_{m_3}}\right)$ и $B(m_3,m_2)=\left(B_{k_1k_2\ldots k_{m_3}j_1j_2\ldots j_{m_2}}\right)$ называется многомерная матрица $C(m_1,m_2)=\left(C_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}\right)$, т.е. $C(m_1,m_2)=A(m_1,m_3)\cdot B(m_3,m_2)$, если $C_{i_1i_2\ldots i_{m_1}j_1j_2\ldots j_{m_2}}=\sum\limits_{k_1,k_2,\ldots,k_{m_3}=0}^{\infty}A_{i_1i_2\ldots i_{m_1}k_1k_2\ldots k_{m_3}}\cdot B_{k_1k_2\ldots k_{m_3}j_1j_2\ldots j_{m_2}}$ для всех

$i_1, i_2, ..., i_{m_1} = 0,1,2,...,\ j_1, j_2, ..., j_{m_2} = 0,1,2,...$

4. Произведением многомерных матриц $A(m_1, 2m_1) = \left(A_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_1} k_1 k_2 \dots k_{m_1}}\right)$ и $B(m_1, 0) = \left(B_{k_1 k_2 \dots k_{m_1}}\right)$ называется многомерная матрица $C(m_1, m_1) = \left(C_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_1}}\right)$, т.е. $C(m_1, m_1) = A(m_1, 2m_1) \odot B(m_1, 0)$, если $C_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_1}} = \sum_{k_1, k_2, ..., k_{m_1} = 0}^{\infty} A_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_1} k_1 k_2 \dots k_{m_1}} \cdot B_{k_1 k_2 \dots k_{m_1}}$ для всех $i_1, i_2, ..., i_{m_1} = 0,1,2,...$, $j_1, j_2, ..., j_{m_1} = 0,1,2,...$

5. Тензорным произведением многомерных матриц $A(m_1, m_2) = \left(A_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}\right)$ и $B(m_3, m_4) = \left(B_{k_1 k_2 \dots k_{m_3} l_1 l_2 \dots l_{m_4}}\right)$ называется многомерная матрица $C(m_1 + m_3, m_2 + m_4) = \left(C_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} k_1 k_2 \dots k_{m_3} j_1 j_2 \dots j_{m_2} l_1 l_2 \dots l_{m_4}}\right)$, т.е. $C(m_1 + m_3, m_2 + m_4) = A(m_1, m_2) \otimes B(m_3, m_4)$, если $C_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} k_1 k_2 \dots k_{m_3} j_1 j_2 \dots j_{m_2} l_1 l_2 \dots l_{m_4}} = A_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}} \cdot B_{k_1 k_2 \dots k_{m_3} l_1 l_2 \dots l_{m_4}}$ для всех $i_1, i_2, ..., i_{m_1} = 0,1,2,...$, $k_1, k_2, ..., k_{m_3} = 0,1,2,...$, $j_1, j_2, ..., j_{m_2} = 0,1,2,...$, $l_1, l_2, ..., l_{m_4} = 0,1,2,...$

6. Многомерная матрица $B(m_2, m_1) = \left(B_{j_1 j_2 \dots j_{m_2} i_1 i_2 \dots i_{m_1}}\right)$ называется транспонированной по отношению к многомерной матрице $A(m_1, m_2) = \left(A_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}\right)$, т.е. $B(m_2, m_1) = \left[A(m_1, m_2)\right]^{\mathrm{T}}$, если $B_{j_1 j_2 \dots j_{m_2} i_1 i_2 \dots i_{m_1}} = A_{i_1 i_2 \dots i_{m_1} j_1 j_2 \dots j_{m_2}}$ для всех $i_1, i_2, ..., i_{m_1} = 0,1,2,...$, $j_1, j_2, ..., j_{m_2} = 0,1,2,...$

7. Гиперквадратная матрица $A^{-1}(m_1, m_1)$ называется обратной по отношению к гиперквадратной матрице $A(m_1, m_1)$, если справедливо равенство

$$A(m_1, m_1) \cdot A^{-1}(m_1, m_1) = A^{-1}(m_1, m_1) \cdot A(m_1, m_1) = E(m_1, m_1),$$

где гиперквадратная матрица $E(m_1, m_1)$ называется единичной, т.е. для любой гиперквадратной матрицы $B(m_1, m_1)$ выполняется тождество

$$B(m_1, m_1) \cdot E(m_1, m_1) = E(m_1, m_1) \cdot B(m_1, m_1) = B(m_1, m_1).$$

Свойства операций сложения, вычитания, умножения на число, умножения, тензорного умножения, транспонирования и обращения многомерных матриц приведены в [11,12].

Приложение 2

Спектральные характеристики функций и линейных операторов

Пусть x принадлежит множеству $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, а система функций $\left\{p(i_1, i_2, ..., i_n, x)\right\}_{i_1, i_2, ..., i_n = 0}^{\infty}$ образует базис пространства $L_2(\Omega)$.

Гиперстолбцовая матрица $H(n,0)=\left(H_{i_1 i_2 \dots i_n}\right)$, элементы которой представляют собой коэффициенты разложения функции $h(x)\in L_2(\Omega)$ в ряд по функциям базисной системы $\left\{p(i_1,i_2,\dots,i_n,x)\right\}_{i_1,i_2,\dots,i_n=0}^{\infty}$, т.е.

$$H_{i_1 i_2 \dots i_n}=\left(p(i_1,i_2,\dots,i_n,x),h(x)\right)_{L_2(\Omega)}, \qquad i_1,i_2,\dots,i_n=0,1,2,\dots,$$

называется спектральной характеристикой функции $h(x)$.

Отображение, ставящее в соответствие функции $h(x)$ ее спектральную характеристику $H(n,0)$, называется спектральным преобразованием функции $h(x)$ и обозначается $\mathbb{S}$:

$$\mathbb{S}\left[h(x)\right]=H(n,0).$$

Обратный переход от спектральной характеристики $H(n,0)$ к функции $h(x)$ осуществляется по формуле обращения:

$$h(x)=\mathbb{S}^{-1}\left[H(n,0)\right]=\sum_{i_1,i_2,\dots,i_n=0}^{\infty} H_{i_1 i_2 \dots i_n}\cdot p(i_1,i_2,\dots,i_n,x).$$

Замечание. Понятие спектральных характеристик может быть распространено на более широкий класс функций, в том числе на обобщенные функции [4,5].

Перейдем к определению спектральных характеристик линейных операторов. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(\Omega)$. Гиперквадратная матрица $A(n,n)=\left(A_{i_1 i_2 \dots i_n j_1 j_2 \dots j_n}\right)$, элементы которой определяются формулой

$$A_{i_1 i_2 \dots i_n j_1 j_2 \dots j_n}=\left(p(i_1,i_2,\dots,i_n,x),\mathcal{A}p(j_1,j_2,\dots,j_n,x)\right)_{L_2(\Omega)}, \qquad i_1,i_2,\dots,i_n=0,1,2,\dots, \qquad j_1,j_2,\dots,j_n=0,1,2,\dots,$$

называется спектральной характеристикой оператора $\mathcal{A}$, а отображение, ставящее в соответствие линейному оператору его спектральную характеристику, также называется спектральным преобразованием и обозначается $\mathbb{S}$:

$$\mathbb{S}[\mathcal{A}]=A(n,n).$$

Теорема. Пусть $\mathcal{A}$ – линейный оператор, определенный на пространстве $L_2(\Omega)$, $h(x)\in L_2(\Omega)$, $A(n,n)$ и $H(n,0)$ – спектральные характеристики оператора $\mathcal{A}$ и функции $h(x)$ соответственно, определенные относительно базисной системы $\left\{p(i_1,i_2,\dots,i_n,x)\right\}_{i_1,i_2,\dots,i_n=0}^{\infty}$. Тогда

$$\mathbb{S}\left[\mathcal{A}h(x)\right]=A(n,n)\cdot H(n,0),$$

т.е. спектральная характеристика образа функции $h(x)$ равна произведению спектральной характеристики оператора $\mathcal{A}$ и спектральной характеристики функции $h(x)$.

Доказательство. Обозначим через $w(x)$ образ функции $h(x)$, т.е. $w(x)=\mathcal{A}h(x)$. Представим функцию $h(x)$ в виде ряда по функциям базисной системы $\left\{p\left(i_1,i_2,\ldots,i_n,x\right)\right\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$ и воспользуемся свойством линейности оператора $\mathcal{A}$:

$$w(x)=\mathcal{A}\left[\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n=0}^{\infty}H_{j_1j_2\ldots j_n}\cdot p\left(j_1,j_2,\ldots,j_n,x\right)\right]=\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n=0}^{\infty}H_{j_1j_2\ldots j_n}\cdot\mathcal{A}p\left(j_1,j_2,\ldots,j_n,x\right).$$

Найдем коэффициенты разложения функции $w(x)$ по функциям базисной системы $\left\{p\left(i_1,i_2,\ldots,i_n,x\right)\right\}_{i_1,i_2,\ldots,i_n=0}^{\infty}$:

$$W_{i_1i_2\ldots i_n}=\left(p\left(i_1,i_2,\ldots,i_n,x\right),w(x)\right)_{L_2(\Omega)}=\left(p\left(i_1,i_2,\ldots,i_n,x\right),\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n=0}^{\infty}H_{j_1j_2\ldots j_n}\cdot\mathcal{A}p\left(j_1,j_2,\ldots,j_n,x\right)\right)_{L_2(\Omega)},$$

$i_1,i_2,\ldots,i_n=0,1,2,\ldots$

Учитывая свойства скалярного произведения, получаем, что

$$W_{i_1i_2\ldots i_n}=\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n=0}^{\infty}\left(p\left(i_1,i_2,\ldots,i_n,x\right),\mathcal{A}p\left(j_1,j_2,\ldots,j_n,x\right)\right)_{L_2(\Omega)}\cdot H_{j_1j_2\ldots j_n}=\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n=0}^{\infty}A_{i_1i_2\ldots i_n j_1j_2\ldots j_n}\cdot H_{j_1j_2\ldots j_n}.$$

Тогда по определению произведения многомерных матриц справедливо равенство $W(n,0)=A(n,n)\cdot H(n,0)$, где $W(n,0)$ – спектральная характеристика функции $w(x)$, следовательно, $\mathbb{S}\left[\mathcal{A}h(x)\right]=A(n,n)\cdot H(n,0)$. $\triangleleft$

Приведем основные свойства спектрального преобразования линейных операторов, определенных на пространстве $L_2(\Omega)$.

1. Спектральная характеристика тождественного оператора $\mathcal{I}$ представляет собой $2n$-мерную единичную матрицу, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{I}]=E(n,n)$.

2. Спектральная характеристика композиции линейных операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равна произведению их спектральных характеристик, т.е. $\mathbb{S}[\mathcal{A}\circ\mathcal{B}]=A(n,n)\cdot B(n,n)$, где $A(n,n)=\mathbb{S}[\mathcal{A}]$, $B(n,n)=\mathbb{S}[\mathcal{B}]$.

3. Предположим, что для линейного оператора $\mathcal{A}$ существует обратный оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Тогда спектральная характеристика обратного оператора равна обратной спектральной характеристике оператора $\mathcal{A}$, т.е. $\mathbb{S}\left[\mathcal{A}^{-1}\right]=A^{-1}(n,n)$, где $A(n,n)=\mathbb{S}[\mathcal{A}]$.

Замечание. Спектральные характеристики функций из пространств $L_2(T)$ и $L_2(T\times\Omega)$, где $T\subseteq[0,+\infty)$ и $\Omega=\mathbb{R}^n$, а также линейных операторов, заданных на этих пространствах, определяются аналогично и обладают такими же свойствами.

Список литературы

1. Семенов В.В. Уравнение обобщенной характеристической функции вектора состояния систем автоматического управления. // Аналитические методы синтеза регуляторов: Межвуз. науч. сб. – Саратов: СПИ, 1977, вып. 2. – с. 3–36.
2. Сотскова И.Л. Применение аппарата обобщенной характеристической функции к анализу стохастических систем управления ЛА. // Задачи стохастического управления: Тем. сб. науч. тр. – М.: МАИ, 1986. – с. 71–78.
3. Semenov V.V., Sotskova I.L. The spectral method for solving Fokker-Planck-Kolmogorov equation for stochastic control system analysis. // Proc. of 2nd IFAC symposium on stochastic control. Preprints, part 1. – 1986. – p. 131–136.
4. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. – М.: Наука, 1974. – 336 с.
5. Солодовников В.В., Семенов В.В., Пешель М., Недо Д. Расчет систем управления на ЦВМ: спектральный и интерполяционный методы. – М.: Машиностроение, 1979. – 664 с.
6. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Анализ систем с переменной структурой в классе обобщенных характеристических функций. // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2003, № 11. – http://www.mai.ru (11.04.03).
7. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Анализ непрерывно-дискретных систем в классе обобщенных характеристических функций. // Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения: Межвуз. сб. науч. тр. – М.: МИРЭА, 2003. – с. 81–89.
8. Пантелеев А.В., Семенов В.В. Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. – М.: МАИ, 1992. – 192 с.
9. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Синтез оптимальных систем с переменной структурой при неполной информации. // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2003, № 13. – http://www.mai.ru (21.10.03).
10. Пугачев В.С. Лекции по функциональному анализу. – М.: МАИ, 1996. – 744 с.
11. Соколов Н.П. Введение в теорию многомерных матриц. – Киев: Наукова думка, 1972. – 175 с.
12. Гришин В.Н., Дятлов В.А., Милов Л.Т. Модели, алгоритмы и устройства идентификации сложных систем. – Л.: Энергоатомиздат, 1985. – 104 с.
13. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Алгоритмическое обеспечение спектрального метода анализа систем управления в неограниченных областях изменения времени и фазовых координат. // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2004, № 16. – http://www.mai.ru (28.06.04).
14. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Советское радио, 1977. – 488 с.
15. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 632 с.

16. Артемьев В.М. Теория динамических систем со случайными изменениями структуры. – Минск: Вышэйшая школа, 1979. – 160 с.
17. Казаков И.Е., Артемьев В.М., Бухалев В.А. Анализ систем случайной структуры. – М.: Физматлит, 1993. – 272 с.
18. Федосов Е.А., Инсаров В.В., Селивохин О.С. Системы управления конечным положением в условиях противодействия среды. – М.: Наука, 1989. – 272 с.
19. Красовский А.А. Статистическое исследование переходных процессов в нелинейных системах. // Современные методы проектирования систем автоматического управления. – М.: Машиностроение, 1967. – с. 520–544.
20. Казаков И.Е. Статистическая динамика систем с переменной структурой. - М.: Наука, 1977. – 416 с.
21. Рыбаков К.А. Программное обеспечение спектрального метода Spectrum. // Электронный журнал «Труды МАИ». – 2003, № 14. – http://www.mai.ru (26.12.03).

Рыбаков Константин Александрович, аспирант кафедры математической кибернетики Московского авиационного института (государственного технического университета); e-mail: rkoffice@mail.ru, dep805@mai.ru.