УДК 519.977

К.А. Рыбаков

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОГО УПРАВЛЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКИМИ МУЛЬТИСТРУКТУРНЫМИ СИСТЕМАМИ

Аннотация

Рассматривается задача оптимального управления нелинейными стохастическими системами со случайной структурой при неполной информации о состоянии. Получены достаточные условия оптимальности и соотношения для определения оптимального управления как для общего случая минимизируемого функционала, так и для нахождения оптимального в среднем управления.

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является продолжением исследований в области синтеза оптимальных систем со случайной структурой при неполной информации о векторе состояния, начатых в [1]. В отличие от задачи, рассмотренной в [1], здесь изучается случай, когда управление не зависит от номера структуры, иными словами, не учитывается информация о смене структуры. Такое управление будем называть централизованным.

Полученные на основе принципа расширения [2] с использованием предложенной в [3] методики условия оптимальности и соотношения позволяют найти оптимальное управление с неполной обратной связью для стохастических мультиструктурных систем при распределенных переходах между структурами [4, 5]. Функционал качества управления в общем случае является нелинейным по плотности вероятности вектора состояния, как частный случай рассмотрен синтез оптимального в среднем управления. Проанализированы предельные случаи информированности и найдены соотношения для синтеза оптимального программного управления и оптимального управления с полной обратной связью.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть каждая структура модели стохастической мультиструктурной системы управления описывается уравнением Ито

$$dX(t) = f^{<k>}\big(t, X(t), \mathbf{u}(t)\big)dt + \sigma^{<k>}\big(t, X(t), \mathbf{u}(t)\big)dW(t), \qquad (1)$$

где $X \in R^n$ – вектор состояния; $k = 1,2,\ldots,N$ – номер структуры, N – число структур; $\mathbf{u} \in U \subseteq R^q$ – вектор управления; $W(t)$ – s-мерный стандартный винеровский процесс, не зависящий от начального состояния $X_0 = X(t_0)$; $f^{<k>}(t,x,u): T \times R^n \times U \to R^n$ – вектор-функция размера n, $\sigma^{<k>}(t,x,u): T \times R^n \times U \to R^{n\times s}$ – матричная функция размера $n \times s$;

$t \in T = [t_0, t_1]$; T – отрезок времени функционирования системы; N, t_0 и t_1 заданы.

Начальное состояние системы задается ненормированными плотностями вероятности $\phi_0^{<k>}(x)$, при этом выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{N} \int_{R^n} \phi_0^{<k>}(x)\,dx = 1, \quad \phi_0^{<k>}(x) \geq 0.$$

Дискретный случайный процесс $K(t)$ смены структуры удовлетворяет условию $\Pr\big(K(t+\Delta t) = r \mid K(t) = k, X(t) = x\big) = \lambda_{kr}(t,x)\Delta t + o(\Delta t)$, где непрерывная и ограниченная функция $\lambda_{kr}(t,x)$ задает интенсивность перехода от структуры с номером k к структуре с номером r ($k, r = 1, 2, \ldots, N$, $k \neq r$). Начальное условие для процесса $K(t)$ определяется вероятностями

$$\mathbb{P}_0^{<k>} = \int_{R^n} \phi_0^{<k>}(x)\,dx.$$

В моменты смены структуры траектории случайного процесса $X(t)$ остаются непрерывными, т.е. рассматривается случай точного восстановления реализаций [4, 5].

При управлении используется информация о величине m первых координат вектора состояния, $0 \leq m \leq n$, т.е. $X = \left[X_{(1)} \;\; X_{(2)} \right]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{u}(t) = u\big(t, X_{(1)}(t)\big)$, где $X_{(1)} = \left[X_1 \; X_2 \ldots X_m \right]^{\mathrm{T}} \in R^m$, $X_{(2)} = \left[X_{m+1} \ldots X_n \right]^{\mathrm{T}} \in R^{n-m}$.

Предполагается, что функции $f^{<k>}(t,x,u)$, $\sigma^{<k>}(t,x,u)$ и $u\big(t, x_{(1)}\big) : T \times R^m \to U$ удовлетворяют следующим условиям: функции $f_{i;u}^{<k>}(t,x) = f_i^{<k>}\Big(t, x, u\big(t, x_{(1)}\big)\Big)$ и $g_{ij;u}^{<k>}(t,x) = g_{ij}^{<k>}\Big(t, x, u\big(t, x_{(1)}\big)\Big)$ кусочно-непрерывны по t для всех $x \in R^n$; при фиксированном $t \in T$ $f_{i;u}^{<k>}(t,x) \in \widehat{C}^1(R^n)$ и $g_{ij;u}^{<k>}(t,x) \in \widehat{C}^2(R^n)$, где $g_{ij;u}^{<k>}(t,x)$ – элементы матричной функции $g^{<k>}(t,x,u) = \sigma^{<k>}(t,x,u)\left[\sigma^{<k>}(t,x,u)\right]^{\mathrm{T}}$, $\widehat{C}^r(R^n)$ – пространство функций, имеющих непрерывные и ограниченные производные порядка $1 \leq \gamma \leq r$; $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Далее множество функций $u\big(t, x_{(1)}\big)$, удовлетворяющих перечисленным условиям, будем обозначать через $\mathfrak{A}_m$.

Известно [4], что если ненормированные плотности вероятности $\phi^{<k>}(t,x)$ вектора состояния принадлежат пространтву $C^{1,2}\big(T \times R^n\big)$, то они удовлетворяют системе обобщенных уравнений Фоккера-Планка-Колмогорова:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \phi^{<k>}(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f_i^{<k>}\big(t,x,u(t,x_{(1)})\big)\phi^{<k>}(t,x)\Big) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Big(g_{ij}^{<k>}\big(t,x,u(t,x_{(1)})\big)\phi^{<k>}(t,x)\Big) - \\
&\quad - \sum_{r=1,r\neq k}^{N} \lambda_{kr}(t,x)\phi^{<k>}(t,x) + \sum_{r=1,r\neq k}^{N} \lambda_{rk}(t,x)\phi^{<r>}(t,x), \\
&k = 1,2,\ldots,N.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Начальные условия для уравнения (2) записываются в виде

$$\phi^{<k>}(t_0,x) = \phi_0^{<k>}(x), \quad k = 1,2,\ldots,N. \tag{3}$$

Начальную задачу (2), (3) можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial \phi(t,x)}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{u(t,x_{(1)})}\phi(t,x), \quad \phi(t_0,x) = \phi_0(x), \tag{4}$$

где

$$\phi(t,x) = \begin{bmatrix} \phi^{<1>}(t,x) \\ \phi^{<2>}(t,x) \\ \vdots \\ \phi^{<N>}(t,x) \end{bmatrix}, \quad \phi_0(x) = \begin{bmatrix} \phi_0^{<1>}(x) \\ \phi_0^{<2>}(x) \\ \vdots \\ \phi_0^{<N>}(x) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mathcal{A}}_u = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mathcal{A}}_{11} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{12} & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{1N} \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_{21} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{22} & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_{N1} & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{N2} & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{NN} \end{bmatrix},$$

при этом

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\mathcal{A}}_{kk}\phi^{<k>}(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f_i^{<k>}(t,x,u)\phi^{<k>}(t,x)\Big) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\Big(g_{ij}^{<k>}(t,x,u)\phi^{<k>}(t,x)\Big) - \sum_{r=1,r\neq k}^{N} \lambda_{kr}(t,x)\phi^{<k>}(t,x), \\
&\boldsymbol{\mathcal{A}}_{kr}\phi^{<r>}(t,x) = \lambda_{rk}(t,x)\phi^{<r>}(t,x), \quad k,r = 1,2,\ldots,N, \quad k \neq r.
\end{aligned}
$$

Следует отметить, что состоянием системы (1), характеризующим распределение случайного процесса $\left[X(t)\ K(t)\right]^{\mathrm{T}}$, является вектор-функция $\phi(t,x)$ при фиксированном *t*, а (4) представляет собой уравнение состояния.

Далее, обозначим через $\mathfrak{F}$ множество допустимых состояний:

$$\mathfrak{F} = \left\{ \phi(x) = \begin{bmatrix} \phi^{<1>}(x) \\ \phi^{<2>}(x) \\ \vdots \\ \phi^{<N>}(x) \end{bmatrix} : \ \sum_{k=1}^{N} \int_{R^n} \phi^{<k>}(x)dx = 1, \phi^{<k>}(x) \geq 0 \right\}.$$

Пусть $\mathfrak{D}_m$ – множество пар $d_m = \big(\phi(t,x), u(t,x_{(1)})\big)$ таких, что $\phi(t,x)$ и

$u\left(t,x_{(1)}\right)\in\mathfrak{A}_m$ удовлетворяют уравнению (4), где $\phi(t,x)\in\mathfrak{F}$ для любого фиксированного $t\in T$. Введем на множестве $\mathfrak{D}_m$ функционал качества:

$$J\left(\phi_0(x),d_m\right)=\int_{t_0}^{t_1}\int_{R^n}\omega\left(t,\phi(t,x),u\left(t,x_{(1)}\right)\right)dxdt+\theta\left(\phi(t_1,x)\right), \tag{5}$$

где $\omega(t,\phi(t,x),u):T\times R^n\times U\to R$ – ограниченная функция, а $\theta(\phi):\mathfrak{F}\to R$ – ограниченный функционал. Функция $\omega(t,\phi(t,x),u)$ и функционал $\theta(\phi)$ заданы.

Например, при $\omega\left(t,\phi(t,x),u\left(t,x_{(1)}\right)\right)=\sum_{k=1}^{N}\left[\phi^{<k>}(t,x)-\tilde{\phi}^{<k>}(t,x)\right]^2$ интегральный член функционала (5) описывает отклонение ненормированных плотностей вероятности $\phi^{<k>}(t,x)$ вектора состояния от опорных $\tilde{\phi}^{<k>}(t,x)$; при $\theta\left(\phi(t_1,x)\right)=\left[\int_{R^n}x_1\sum_{k=1}^{N}\phi^{<k>}(t_1,x)dx_1-\mu\right]^2$ терминальный член функционала (5) описывает отклонение математического ожинания координаты X_1 вектора состояния в конечный момент времени от заданного уровня. Наряду с этим можно рассматривать задачу оптимального в среднем управления, когда функционал (5) линеен относительно функции $\phi(t,x)$ (этот случай описывается ниже).

Далее будем рассматривать две задачи оптимального управления.

Задача 1. Требуется найти элемент $d_m^*=\left(\phi^*(t,x),u^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)\in\mathfrak{D}_m$ такой, что

$$J\left(\phi_0(x),d_m^*\right)=\min_{d_m\in\mathfrak{D}_m}J\left(\phi_0(x),d_m\right). \tag{6}$$

Задача 2. Требуется найти синтезирующую функцию $u^*\left(t,x_{(1)},\phi(x)\right)$: $T\times R^m\times\mathfrak{F}\to U$ такую, что

$$J\left(\phi_0(x),d_m^*\right)=\min_{d_m\in\mathfrak{D}_m}J\left(\phi_0(x),d_m\right)\quad\forall\phi_0(x)\in\mathfrak{F}. \tag{7}$$

Предполагается, что минимум в (6) и (7) существует, иначе задачу оптимального управления можно сформулировать в терминах минимизирующих последовательностей. Кроме того, в выражении (7) предполагается, что $d_m=\left(\phi(t,x),u\left(t,x_{(1)},\phi(t,x)\right)\right)$, где $\phi(t,x)$ удовлетворяет уравнению (4). Таким образом, минимум ищется для всех допустимых функций $\phi_0(x)$, при этом множество $\mathfrak{D}_m$ зависит от $\phi_0(x)$, однако эта зависимость здесь и далее явно не указана.

При решении задачи 2 следует иметь в виду наличие двух уровней определения управления системой [3]: оптимальная синтезирующая функция

$u^*\left(t, x_{(1)}, \phi(x)\right)$ для каждого начального распределения, описываемого функцией $\phi_0(x)$, порождает оптимальное управление $u^*\left(t, x_{(1)}\right) = u^*\left(t, x_{(1)}, \phi^*(t,x)\right)$ в задаче 1 ($\phi^*(t,x)$ – решение уравнения (2) при $u\left(t, x_{(1)}\right) = u^*\left(t, x_{(1)}, \phi(t,x)\right)$, рис. 1), которое затем используется в схеме, изображенной на рис. 2, для управления траекториями исходной системы.

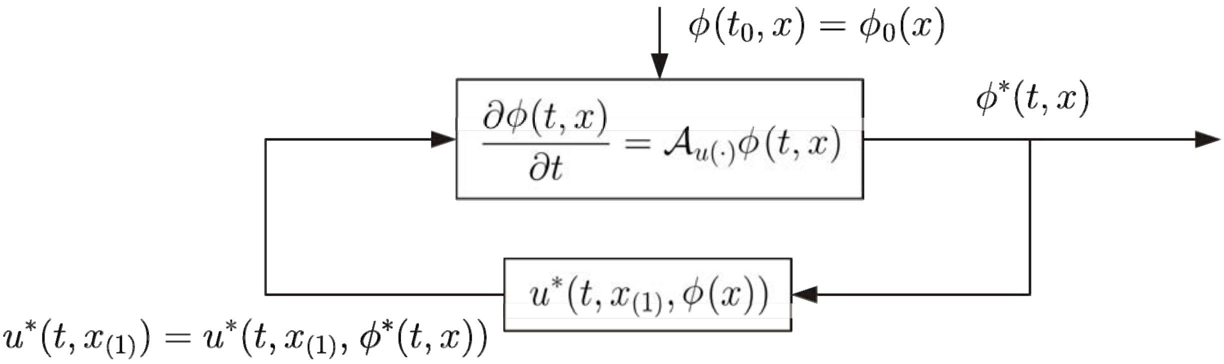

Рис. 1

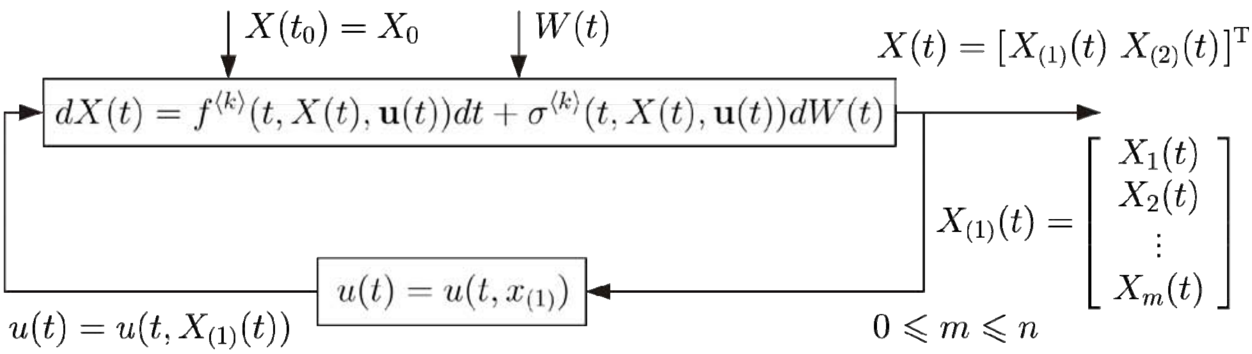

Рис. 2

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Как и в [1], рассмотрим множество $\mathfrak{S}$ функций $S\left(t, \phi(x)\right)$: $T \times \mathfrak{F} \to R$, непрерывно дифференцируемых по t на множестве T и имеющих непрерывные вариационные производные $\dfrac{\delta S\left(t, \phi(\kappa)\right)}{\delta \phi^{<k>}(x)} \in C^{1,2}\left(T \times R^n\right)$ [6], $k = 1, 2, \ldots, N$.

Определим на $\mathfrak{S}$ следующие конструкции:

$$R\left(t, \phi(x), u\right) = \frac{\partial S\left(t, \phi(x)\right)}{\partial t} + \\ + \int\limits_{R^n} \left(\left[\frac{\delta S\left(t, \phi(\kappa)\right)}{\delta \phi(x)} \right]^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_u \phi(x) - \omega\left(t, \phi(x), u\right) \right) dx, \tag{8}$$

$$G\left(t_1, \phi(x)\right) = S\left(t_1, \phi(x)\right) + \theta\left(\phi(x)\right), \tag{9}$$

где $\dfrac{\delta S(t,\phi(\kappa))}{\delta\phi(x)}=\left[\dfrac{\delta S(t,\phi(\kappa))}{\delta\phi^{<1>}(x)}\ \dfrac{\delta S(t,\phi(\kappa))}{\delta\phi^{<2>}(x)}\ \cdots\ \dfrac{\delta S(t,\phi(\kappa))}{\delta\phi^{<N>}(x)}\right]^{\mathrm{T}}$.

Предположим, что при некотором заданном m функции $R(t,\phi(x),u)$ и $G(t_1,\phi(x))$ достигают экстремальных значений:

$$r_m(t)=\max_{\phi(x)\in\mathfrak{F}}\left\{\frac{\partial S(t,\phi(x))}{\partial t}+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{R^m}\max_{u\in U}\left\{\int\limits_{R^{n-m}}\left(\phi^{\mathrm{T}}(x)\mathcal{A}_u^*\left[\frac{\delta S(t,\phi(\kappa))}{\delta\phi(x)}\right]-\omega(t,\phi(x),u)\right)dx_{(2)}\right\}dx_{(1)}\right\}, \tag{10}$$

$$g=\min_{\phi(x)\in\mathfrak{F}}\left\{S(t_1,\phi(x))+\theta(\phi(x))\right\}. \tag{11}$$

В выражении (10) через $\mathcal{A}_u^*$ обозначен сопряженный оператор по отношению к оператору $\mathcal{A}_u$, т.е.

$$\mathcal{A}_u^*=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\mathcal{A}}_{11}^* & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{21}^* & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{N1}^*\\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_{12}^* & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{22}^* & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{N2}^*\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{\mathcal{A}}_{1N}^* & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{2N}^* & \cdots & \boldsymbol{\mathcal{A}}_{NN}^*\end{bmatrix},$$

где

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{kk}^*\psi^{<k>}(t,x)=\sum_{i=1}^{n}f_i^{<k>}(t,x,u)\frac{\partial\psi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}^{<k>}(t,x,u)\frac{\partial^2\psi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\lambda_{kr}(t,x)\psi^{<k>}(t,x),$$

$$\boldsymbol{\mathcal{A}}_{rk}^*\psi^{<r>}(t,x)=\lambda_{kr}(t,x)\psi^{<r>}(t,x),\quad k,r=1,2,...,N,\quad k\neq r.$$

Теорема 1. Если существует функция $S(t,\phi(x))\in\mathfrak{S}$ такая, что элемент $d_m^*=\left(\phi^*(t,x),u^*(t,x_{(1)})\right)\in\mathfrak{D}_m$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $R\left(t,\phi^*(t,x),u^*(t,x_{(1)})\right)=r_m(t)$ почти всюду на *T*,

2) $G\left(t_1,\phi^*(t_1,x)\right)=g$,

то справедливо условие (6).

Если $S(t,\phi(x))$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то нетрудно показать, что с помощью замены

$$\tilde{S}(t,\phi(x))=S(t,\phi(x))+\int\limits_t^{t_1}r_m(\tau)d\tau-g$$

функцию $r_m(t)$ и величину g, соответствующие $\tilde{S}(t,\phi(x))$, можно положить равными нулю, причем $\tilde{S}(t,\phi(x))$ будет также удовлетворять условиям теоремы 1 (см. [3]). В этом случае минимальное значение функционала (5) вычисляется по формуле

$$J\left(\phi_0(x),d_m^*\right)=-\tilde{S}\left(t_0,\phi_0(x)\right). \quad (12)$$

Теорема 2. Если существуют $S(t,\phi(x))\in\mathfrak{S}$ и $u^*(t,x_{(1)},\phi(x))$ такие, что при любых $t\in T$ и для всех $\phi(x)\in\mathfrak{F}$ выполняются следующие условия:

1) $\dfrac{\partial S(t,\phi(x))}{\partial t}+$

$$+\int_{R^m}\max_{u\in U}\left\{\int_{R^{n-m}}\left(\phi^{\mathrm{T}}(x)\mathcal{A}_u^*\left[\frac{\delta S(t,\phi(\kappa))}{\delta\phi(x)}\right]-\omega(t,\phi(x),u)\right)dx_{(2)}\right\}dx_{(1)}=0,$$

2) $S(t_1,\phi(x))=-\theta(\phi(x))$,

то справедливо условие (7).

Доказательство теорем 1 и 2 аналогично доказательству теорем о достаточных условиях оптимальности в задаче управления стохастическими мультиструктурыми системами в случае, когда управление зависит от номера структуры [1].

Пример. Рассмотрим линейную одномерную двухструктурную стохастическую систему, первая структура которой описывается уравнением $dX(t)=(aX(t)+b\mathbf{u}(t))dt+\sigma dW(t)$, а вторая – уравнением $dX(t)=aX(t)dt+\sigma dW(t)$, где $t\in[t_0,t_1]$, $X(t_0)=X_0$, $X,u\in R$, $a,b\in R$, $\sigma>0$.

В начальный момент времени задана вероятность активности первой структуры $P_0^{<1>}$ и среднее значение начального состояния X_0 для первой структуры, равное $\mu_0^{<1>}$.

Интенсивность перехода из первой структуры во вторую постоянна и равна $\lambda>0$, а возврат из второго состояния в первое недопустим, т.е. возможен отказ управляющего устройства.

Функционал качества является нелинейным по плотности вероятности:

$$J\left(\phi_0(x),d_0\right)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_0}\int_R qu^2(t)\phi^{<1>}(t,x)\,dx\,dt+\left[\int_R x\phi^{<1>}(t_1,x)\,dx\Big/\int_R\phi^{<1>}(t_1,x)\,dx-\mu\right]^2,$$

где $q>0$, $\mu\in R$. Таким образом, терминальный член функционала качества характеризует отклонение среднего значения $X(t_1)$ для первой структуры от заданного уровня μ.

Требуется найти оптимальное программное управление ($m=0$).

Поскольку от управления зависит только коэффициент сноса в уравнении первой структуры, то из первого условия теоремы 2 следует, что

$$u^{*}(t)=\arg\max_{u\in R}\int_R\left(b\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\delta S(t,\phi(\kappa))}{\delta\phi^{<1>}(x)}\right]u-\frac{1}{2}qu^2\right)\phi^{<1>}(x)dx.$$

Будем искать функцию $S(t,\phi(x))$, где $\phi(x)=\left[\phi^{<1>}(x)\quad\phi^{<2>}(x)\right]^{\mathrm{T}}$, в виде

$$S(t,\phi(x))=\frac{1}{2}\xi(t)\left[m^{<1>}\right]^2+\eta(t)m^{<1>}+\varsigma(t),\quad m^{<1>}=\int_R x\phi^{<1>}(x)dx,$$

где $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\varsigma(t)$ – неизвестные функции. Тогда $\frac{\partial}{\partial t}S(t,\phi(x))=\frac{1}{2}\dot{\xi}(t)\left[m^{<1>}\right]^2+\dot{\eta}(t)m^{<1>}+\dot{\varsigma}(t)$,

$\frac{\delta}{\delta\phi^{<1>}(x)}S(t,\phi(\kappa))=\left(\xi(t)m^{<1>}+\eta(t)\right)x$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta}{\delta\phi^{<1>}(x)}S(t,\phi(\kappa))=\xi(t)m^{<1>}+\eta(t)$.

Применяя необходимые и достаточные условия экстремума, получаем оптимальную синтезирующую функцию как функционал от $\phi^{<1>}(x)$, т.е. $u^{*}\left(t,m^{<1>}\right)=\frac{b}{q}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\delta}{\delta\phi^{<1>}(x)}S(t,\phi(\kappa))=\frac{b}{q}\left(\xi(t)m^{<1>}+\eta(t)\right)$.

Воспользуемся условиями 1 и 2 теоремы 2. Подставим найденные выражения и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $m^{<1>}$, в результате получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (с учетом равенства $P^{<1>}(t)=\int_R\phi^{<1>}(t,x)dx$ и того факта, что вероятность $P^{<1>}(t)$ можно определить и при неизвестной функции $\phi^{<1>}(t,x)$, т.к. интенсивность отказа не зависит от x):

$$\begin{cases}\dot{\xi}(t)+2(a-\lambda)\xi(t)+\frac{b^2}{q}\xi^2(t)P^{<1>}(t)=0,\quad \xi(t_1)=-2\left[P^{<1>}(t_1)\right]^{-2},\\ \dot{\eta}(t)+(a-\lambda)\eta(t)+\frac{b^2}{q}\xi(t)\eta(t)P^{<1>}(t)=0,\quad \eta(t_1)=2\mu\left[P^{<1>}(t_1)\right]^{-1},\\ \dot{\varsigma}(t)+\frac{b^2}{2q}\eta^2(t)P^{<1>}(t)=0,\quad \varsigma(t_1)=-\mu^2.\end{cases}$$

Функцию $P^{<1>}(t)$ определим из дифференциального уравнения Колмогорова $\dot{P}^{<1>}(t)=-\lambda P^{<1>}(t)$ [4], тогда с учетом начального условия $P^{<1>}(t)=P_0^{<1>}e^{-\lambda(t-t_0)}$.

Минимум $J\left(\phi_0(x),d_0\right)$ вычисляется по формуле (12) после определения функций $\xi(t)$, $\eta(t)$ и $\varsigma(t)$:

$$J\left(\phi_0(x),d_0^{*}\right)=-\tfrac{1}{2}\xi(t_0)\left[P_0^{<1>}\mu_0^{<1>}\right]^2-\eta(t_0)P_0^{<1>}\mu_0^{<1>}-\varsigma(t_0).$$

Чтобы найти оптимальное программное управление $u^{*}(t)$, требуется определить взвешенное математическое ожидание $m^{<1>}(t)$. Для этого воспользуемся уравнением метода двухмоментной параметрической аппроксимации [4], а именно $\dot{m}^{<1>}(t)=am^{<1>}(t)+bP^{<1>}(t)u^{*}\left(t,m^{<1>}(t)\right)-\lambda m^{<1>}(t)$,

$m^{<1>}(t_0) = P_0^{<1>} \mu_0^{<1>}$, интегрируя которое, окончательно получим, что $\mathbf{u}^*(t) = u^*(t) = u^*\left(t, m^{<1>}(t)\right)$. В частном случае при $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $a = -1$, $b = q = \lambda = \mu = 1$, $\mu_0^{<1>} = 1$ и $P_0^{<1>} = 1$ оптимальная синтезирующая функция имеет вид

$$u^*\left(t, m^{<1>}\right) = \frac{6}{2e^{-t} - 3e^{2-4t} - 2e^{3-4t}} m^{<1>} + \frac{6}{3e^{1-2t} + 2e^{2-2t} - 2e^{t-1}}$$

а оптимальное программное управление представляется в форме

$$u^*(t) = \frac{48e^t + 6\left(9e^{-2t} + 4e^{t-1} + 3e^{1-2t} - 8e^{2-2t} - 4e^{4t-3} + 4e^{4t-4} - 12e^{t-2} - 4e^{3-2t}\right)}{\left(2e^{-t-4} - 3e^{-4t-2} - 2e^{-4t-1}\right)\left(-2e^{3t} + 3e^2 + 2e^3\right)\left(-2 + 3e^2 + 2e^3\right)},$$

при этом минимальное значение функционала качества равно $\left(3\text{-}6\mathrm{e}+3\mathrm{e}^2\right)\left(\text{-}2+3\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}^3\right)^{-1}$.

Заметим, что в данном случае вместо пары $d_0^* = \left(\phi^*(t,x), u^*(t)\right)$ найдена пара $\left(m^{*<1>}(t), u^*(t)\right)$, поскольку информация о взвешенном математическом ожидании оказалась достаточной для решения задачи.

СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Используя соотношение (10) и первое условие теоремы 1, можно записать структуру оптимального управления:

$$u^*\left(t, x_{(1)}\right) = \arg\max_{u \in U} \left\{ \int_{R^{n-m}} \Psi(t,x,u)\, dx_{(2)} \right\}, \tag{13}$$

где $\Psi(t,x,u) = \left[\phi^*(t,x)\right]^{\mathrm{T}} \mathcal{A}_u^* \left[\frac{\delta S\left(t, \phi(\kappa)\right)}{\delta \phi(x)} \right] - \omega\left(t, \phi^*(t,x), u\right)$.

В частном случае оптимальное программное управление $(m = 0)$ и оптимальное управление с полной обратной связью $(m = n)$ определяются выражениями

$$u^*(t) = \arg\max_{u \in U} \left\{ \int_{R^n} \Psi(t,x,u)\, dx \right\}, \quad u^*(t,x) = \arg\max_{u \in U} \left\{ \Psi(t,x,u) \right\}.$$

Необходимые условия экстремума в (8) и (9) записываются в виде

$$\frac{\delta R\left(t, \phi^*(t,x), u^*\left(t, x_{(1)}\right)\right)}{\delta \phi(x)} = 0, \quad \frac{\delta G\left(t_1, \phi^*(t_1, x)\right)}{\delta \phi(x)} = 0,$$

следовательно,

$$\frac{\delta S_t\left(t, \phi^*(t,x)\right)}{\delta \phi(x)} = -\frac{\delta H\left(t, \phi^*(t,x), u^*\left(t, x_{(1)}\right)\right)}{\delta \phi(x)}, \tag{14}$$

$$\frac{\delta S\left(t_1,\phi^*\left(t_1,x\right)\right)}{\delta\phi\left(x\right)}=-\frac{\delta\theta\left(\phi^*\left(t_1,x\right)\right)}{\delta\phi\left(x\right)}, \tag{15}$$

где

$$S_t\left(t,\phi\left(x\right)\right)=\frac{\partial S\left(t,\phi\left(x\right)\right)}{\partial t},$$

$$H\left(t,\phi\left(x\right),u\right)=\int\limits_{R^n}\left(\phi^{\mathrm{T}}\left(x\right)\mathcal{A}_u^*\left[\frac{\delta S\left(t,\phi\left(\kappa\right)\right)}{\delta\phi\left(x\right)}\right]-\omega\left(t,\phi\left(x\right),u\right)\right)dx.$$

В соотношениях (13)–(15) функция $\phi^*\left(t,x\right)$ является решением задачи (4). Вид уравнений (14) и (15) для нахождения оптимального управления зависит от решаемой задачи и, следовательно, от задания функции $S\left(t,\phi\left(x\right)\right)\in\mathfrak{S}$.

Рассмотрим частный случай, а именно задачу синтеза оптимального в среднем управления. Пусть заданы функции $\omega^{<k>}\left(t,x,u\right)$: $T\times R^n\times U\to R$ и $\theta^{<k>}\left(x\right):R^n\to R$, удовлетворяющие условию полиномиального роста [7], $k=1,2,...,N$; функционал (5) является линейным относительно функции $\phi\left(t,x\right)$:

$$J\left(\phi_0\left(x\right),d_m\right)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{R^n}\hat{\omega}^{\mathrm{T}}\left(t,x,u\left(t,x_{(1)}\right)\right)\phi\left(t,x\right)dxdt+\int\limits_{R^n}\hat{\theta}^{\mathrm{T}}\left(x\right)\phi\left(t_1,x\right)dx, \tag{16}$$

где

$$\hat{\omega}\left(t,x,u\right)=\begin{bmatrix}\omega^{<1>}\left(t,x,u\right)\\ \omega^{<2>}\left(t,x,u\right)\\ \vdots\\ \omega^{<N>}\left(t,x,u\right)\end{bmatrix},\quad \hat{\theta}\left(x\right)=\begin{bmatrix}\theta^{<1>}\left(x\right)\\ \theta^{<2>}\left(x\right)\\ \vdots\\ \theta^{<N>}\left(x\right)\end{bmatrix},$$

т.е. $\omega\left(t,\phi\left(t,x\right),u\right)=\hat{\omega}^{\mathrm{T}}\left(t,x,u\right)\phi\left(t,x\right)$, $\theta\left(\phi\left(x\right)\right)=\int\limits_{R^n}\hat{\theta}^{\mathrm{T}}\left(x\right)\phi\left(x\right)dx$.

Будем искать $S\left(t,\phi\left(x\right)\right)\in\mathfrak{S}$ в виде

$$S\left(t,\phi\left(x\right)\right)=\int\limits_{R^n}\psi^{\mathrm{T}}\left(t,x\right)\phi\left(x\right)dx, \tag{17}$$

где вспомогательная вектор-функция

$$\psi\left(t,x\right)=\begin{bmatrix}\psi^{<1>}\left(t,x\right)\\ \psi^{<2>}\left(t,x\right)\\ \vdots\\ \psi^{<N>}\left(t,x\right)\end{bmatrix}$$

подлежит определению, $\psi^{<k>}\left(t,x\right):T\times R^n\to R$, $k=1,2,...,N$.

Поскольку от управления зависят только диагональные элементы матрицы $\mathcal{A}_u^*$, из равенства $\dfrac{\delta S\left(t,\phi(\kappa)\right)}{\delta\phi(x)} = \psi(t,x)$ и выражения (13) следует структура оптимального в среднем управления:

$$u^*\left(t,x_{(1)}\right) = \arg\max_{u\in U}\left\{\sum_{k=1}^{N}\int_{R^{n-m}}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i^{<k>}(t,x,u)\frac{\partial\psi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i} + \right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{<k>}(t,x,u)\frac{\partial^2\psi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j} - \omega^{<k>}(t,x,u)\right)\phi_{(2|1)}^{*<k>}\left(t,x_{(2)}\,|\,x_{(1)}\right)dx_{(2)}\right\}, \tag{18}$$

где $\phi_{(2|1)}^{<k>}\left(t,x_{(2)}\,|\,x_{(1)}\right) = \phi^{<k>}(t,x)\Big/\int_{R^{n-m}}\phi^{<k>}(t,x)\,dx_{(2)}$.

Выражение для $H\left(t,\phi(x),u\right)$ с учетом (17) имеет вид

$$H\left(t,\phi(x),u\right) = \int_{R^n}\phi^{\mathrm{T}}(x)\left(\mathcal{A}_u^*\psi(t,x) - \hat{\omega}\left(t,\phi(x),u\right)\right)dx,$$

следовательно,

$$\frac{\delta H\left(t,\phi(\kappa),u\right)}{\delta\phi(x)} = \mathcal{A}_u^*\psi(t,x) - \hat{\omega}\left(t,\phi(x),u\right),$$

и, кроме того,

$$\frac{\delta\theta\left(\phi(\kappa)\right)}{\delta\phi(x)} = \hat{\theta}(x), \quad \frac{\delta S_t\left(t,\phi(\kappa)\right)}{\delta\phi(x)} = \frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t}, \quad \frac{\delta S\left(t_1,\phi(\kappa)\right)}{\delta\phi(x)} = \psi(t_1,x).$$

Таким образом, учитывая полученные выражения и уравнения (4), (14), (15), можно записать соотношения для определения функций $\phi^*(t,x)$ и $\psi(t,x)$:

$$\frac{\partial\phi^*(t,x)}{\partial t} = \boldsymbol{\mathcal{A}}_{u^*\left(t,x_{(1)}\right)}\phi^*(t,x), \quad \phi^*(t_0,x) = \phi_0(x);$$

$$\frac{\partial\psi(t,x)}{\partial t} = -\mathcal{A}^*_{u^*\left(t,x_{(1)}\right)}\psi(t,x) + \hat{\omega}\left(t,x,u^*\left(t,x_{(1)}\right)\right), \quad \psi(t_1,x) = -\hat{\theta}(x),$$

или в координатной форме:

$$\frac{\partial\phi^{*<k>}(t,x)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(f_i^{<k>}\left(t,x,u^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)\phi^{*<k>}(t,x)\right) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\left(g_{ij}^{<k>}\left(t,x,u^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)\phi^{*<k>}(t,x)\right) -$$
$$-\sum_{r=1,k\neq r}^{N}\lambda_{kr}(t,x)\phi^{*<k>}(t,x) + \sum_{r=1,r\neq k}^{N}\lambda_{rk}(t,x)\phi^{*<r>}(t,x), \tag{19}$$
$$\phi^{*<k>}(t_0,x) = \phi_0^{<k>}(x), \quad k = 1,2,\ldots,N;$$

$$\frac{\partial\psi^{<k>}(t,x)}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n} f_i^{<k>}\left(t,x,u^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)\frac{\partial\psi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{<k>}\left(t,x,u^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)\frac{\partial^2\psi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-$$
$$-\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\lambda_{kr}(t,x)\psi^{<k>}(t,x)+\sum_{r=1,r\neq k}^{N}\lambda_{kr}(t,x)\psi^{<r>}(t,x)- \tag{20}$$
$$-\omega^{<k>}\left(t,x,u^*\left(t,x_{(1)}\right)\right)=0,\quad \psi^{<k>}(t_1,x)=-\theta^{<k>}(x),\quad k=1,2,\ldots,N.$$

Следовательно, для определения оптимального управления необходимо решить систему (18)–(20). Минимум функционала (16) определяется выражением $J\left(\phi_0(x),d_m^*\right)=-\sum_{k=1}^{N}\int_{R^n}\psi^{<k>}(t_0,x)\phi_0^{<k>}(x)dx$.

Рассмотрим предельные случаи информированности. Пусть $m=0$, тогда структура оптимального программного управления имеет вид

$$u^*(t)=\arg\max_{u\in U}\left\{\sum_{k=1}^{N}\int_{R^n}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i^{<k>}(t,x,u)\frac{\partial\psi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{<k>}(t,x,u)\frac{\partial^2\psi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-\omega^{<k>}(t,x,u)\right)\phi^{*<k>}(t,x)dx\right\}, \tag{21}$$

причем соотношения (19)–(21) по форме аналогичны уравнениям стохастического принципа максимума для систем с фиксированной структурой [3]. Уравнения (19) и (20) совпадают с соотношениями для определения оптимального программного управления стохастическими мультиструктурными системами в случае, когда управление зависит не только от времени, но от номера k (см. [1]).

При $m=n$ структура оптимального управления с полной обратной связью задается выражением

$$u^*(t,x)=\arg\max_{u\in U}\left\{\sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i^{<k>}(t,x,u)\frac{\partial\psi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}^{<k>}(t,x,u)\frac{\partial^2\psi^{<k>}(t,x)}{\partial x_i\partial x_j}-\omega^{<k>}(t,x,u)\right)\right\}, \tag{22}$$

а уравнения (19) и (20) решаются в этом случае независимо.

Следует подчеркнуть, что соотношения (14) и (15) получены с использованием только необходимых условий экстремума, поэтому после решения задачи (18)–(19) нужны дополнительные исследования, тем не менее, из теоремы 2 следует, что для синтеза оптимального в среднем управления с полной обратной связью достаточно решить (20) с учетом (22).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Оптимальное управление нелинейными системами со случайной структурой при неполной информации о векторе состояния // Автоматика и телемеханика. – 2006, № 7. – С. 62–75.
2. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.
3. Пантелеев А.В., Семенов В.В. Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. – М.: МАИ, 1992.
4. Казаков И.Е., Артемьев В.М. Оптимизация динамических систем случайной структуры. – М.: Наука, 1980.
5. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А., Сотскова И.Л. Спектральный метод анализа нелинейных стохастических систем управления. – М.: Вузовская книга, 2006.
6. Авербух В.И., Смолянов О.Г. Теория дифференцирования в линейных топологических пространствах // УМН. – 1967. Т. XXII. Вып. 6 (138). – С. 201– 260.
7. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами. – М.: Мир, 1978.